

# 수치 해석을 이용한 난류 경계층 내 벽면 변동 압력을 받는 보의 진동 해석

## Vibration of Beams Induced by Wall Pressure Fluctuation in Turbulent Boundary Layer Using Numerical Approaches

유 정 수<sup>†</sup> · 김 은 비<sup>\*</sup>  
Jungsoo Ryue and Eunbi Kim

(Received April 1, 2013 ; Revised May 16, 2013 ; Accepted May 16, 2013)

**Key Words** : Wall Pressure Fluctuation(벽면 변동 압력), Turbulent Boundary Layer(난류경계층), Corcos Model(코코스 모델), Waveguide Finite Element Method(도파관유한요소법)

### ABSTRACT

Structural vibration induced by excitation forces under turbulent boundary layer is investigated in terms of the numerical analysis in this paper. Since the responses of structures excited by the wall pressure fluctuation(WPF) are described by the power spectral density functions, they are calculated and reviewed theoretically for finite and infinite length beams. For the use of numerical approaches, the WPF needs to be discretized but conventional finite element method is not much effective for that purpose because the WPF lose the spatial correlation characteristics. As an alternative numerical technique for WPF modelling, a wavenumber domain finite element approach, called waveguide finite element method, is examined here for infinite length beams. From the comparison between the numerical and theoretical results, it was confirmed that the WFE method can effectively and easily cope with the excitation from WPF and hence the suitable approach.

### 1. 서 론

물체 주위로 흐르는 유체는 유체의 점성에 의해 물체 표면에 얇은 난류 경계층을 형성한다. 난류 경계층 내부에서는 에디(eddy)로 불리는 복잡한 유체 입자의 운동이 발생하며, 이로 인해 물체의 표면에는 불규칙한 유체력인 벽면 변동 압력(wall pressure fluctuation)이 작용한다. 이 벽면 변동 압력은 물체의

표면에서 가진력으로 작용하여 진동을 발생시킨다.

난류 경계층에 의한 유동 유기 진동의 예로써, 고속으로 운항하는 항공기나 기차, 수중에서 운용되는 음향 탐지 센서(SONAR)에 유기되는 진동을 들 수 있다. 특히, 수중 운동체에 부착되어 운용되는 소나에 있어 유체 소음은 센서의 탐지 성능을 저하시키는 주요 원인이 된다.

난류 경계층 내 벽면 변동 압력에 의한 구조물의 진동 해석에 관한 연구는 평판의 진동 응답에 대하

<sup>†</sup> Corresponding Author ; Member, School of Naval Architecture and Ocean Engineering, University of Ulsan  
E-mail : jsryue@ulsan.ac.kr  
Tel : +82-52-259-2168, Fax : +82-52-259-2677  
<sup>\*</sup> DNV

<sup>‡</sup> Recommended by Editor Sung Soo Na  
© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

여 오래 전부터 많은 이론적 및 실험적 연구가 수행되어 왔다<sup>(1-3)</sup>. 비교적 최근의 연구 사례로는 원통형 실린더의 축 방향 유동에 관한 벽면 변동 압력의 연구 및 예인 선배열 소나(towed arrays)에 관한 벽면 변동 압력의 연구를 들 수 있다<sup>(4-6)</sup>.

그러나, 구조물이 복잡해지면 난류 기진력이 작용하는 물체의 운동을 이론적으로 해석하기 어려우므로 유한요소법(finite element method)과 같은 수치 해석 기법의 도입이 필요하다. 그러나 유한요소법을 이용한 수치 해석 방법은 난류 기진력이 가지는 주요한 특징인 공간적 상관관계(cross correlation)를 표현하는데 제약을 갖는다. 즉, 변동 압력이 집중되어 있는 짧은 파장의 대류 파수(convective wave-number)를 해석에 고려하기 위해서는 유한요소의 절점간 거리가 충분히 짧아야 하는 제한을 가진다. Hong과 Shin<sup>(7)</sup>은 난류 기진력을 받는 유한 길이 보의 고주파수 대역 응답을 유한요소법으로 해석하기 위한 모델링 방안을 제시한 바 있다. 그러나 선배열 예인 소나처럼 구조물의 길이가 길어져 무한 길이 구조물로 가정해야 하는 경우라면 유한요소법을 적용하기는 더욱 어렵다. 이러한 문제점을 개선하고자 이 연구에서는 도파관 유한요소법을 도입해 무한 길이 보에 난류 기진력이 작용할 때 발생하는 진동 응답을 해석하고자 한다.

해석에 사용한 난류 경계층 내 벽면 변동 압력은 Corcos가 제안한 모델을 채택하였다. 2장에서는 Corcos 모델로 표현되는 벽면 변동 압력의 특성에 관해 기술한다. 난류 기진력이 작용할 때 발생하는 유한 길이 및 무한 길이 보의 응답은 3장에서 이론 해석을 수행하고 Hong과 Shin<sup>(7)</sup>의 해석 결과와 비교하였다. 4장에서는 난류 기진력이 작용하는 무한 길이 보의 응답을 도파관 유한요소법으로 해석하고 이론 해석 결과와 비교하였다.

## 2. 벽면 변동 압력 모델

난류 경계층 내의 벽면 변동 압력은 시간적, 공간적으로 랜덤한 특성을 가지며, 공간상에 인접한 두 지점의 변동 압력은 서로 특정한 상관관계를 갖는다. 압력 구배가 없는 무한 평판 위의 충분히 발달한 난류 경계층에 대하여 벽면 변동 압력을 모사한 수학적 모델로는 Corcos 모델<sup>(8)</sup>, Chase 모델<sup>(9)</sup>,

Ffowcs Williams 모델<sup>(10)</sup> 등이 있다. 이 논문에서는 수학적으로 비교적 간단하게 표현된 Corcos 모델을 채택하였다.

Corcos 모델은 벽면 변동 압력에 의한 난류 기진력을 벽면 변동 압력의 상호 스펙트럼 밀도 함수로 표현한다. 보 구조물에 대한 응답 해석을 위해 보의 길이 방향(x방향) 유동만을 고려하면 Corcos 모델은 벽면 변동 압력의 상호 스펙트럼 밀도 함수를 식(1)과 같이 표현한다.

$$C_{pq}(\gamma_x; \omega) = C_{pp}(\omega) A(\gamma_x; \omega) e^{-j \left( \frac{\omega \gamma_x}{U_c} \right)} \quad (1)$$

여기서  $C_{pp}(\omega)$ 는 벽면 변동 압력의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수,  $U_c$ 는 경계층 내 에디의 대류 속도(convection velocity)이며,  $\gamma_x$ 는  $p$ 와  $q$ 지점 사이의  $x$ 방향 거리,  $\omega$ 는 각 주파수이다.  $A(\gamma_x; \omega)$ 는 유동의 흐름 방향에 대한 거리 감쇠 특성을 표현하는 함수이며,  $A(\gamma_x; \omega) e^{-j \left( \frac{\omega \gamma_x}{U_c} \right)}$ 는  $\gamma_x$ 만큼 떨어진 두 지점간 기진력의 상관관계(cross correlation)을 나타내는 함수이다. 변동 압력의 거리 감쇠  $A(\gamma_x; \omega)$ 는 식(2)로 정의된다.

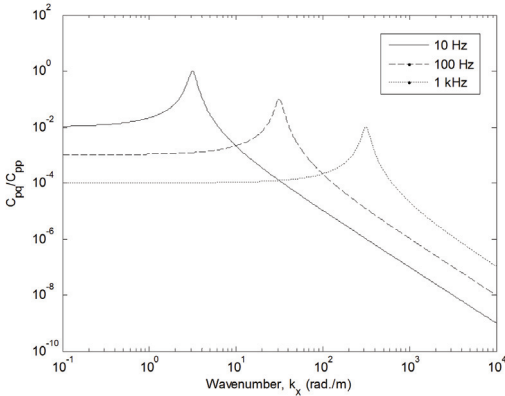
$$A(\gamma_x; \omega) = e^{-\alpha \left| \frac{\omega \gamma_x}{U_c} \right|} \quad (2)$$

식(2)의 계수  $\alpha$ 는 매끈한 평판의 경우 각각 0.1 정도의 값을 가지는 것으로 알려져 있다. 식(1)의 상호 스펙트럼 밀도 함수를 공간에 대해 푸리에 변환하면 파수 영역에서 표현된 상호 스펙트럼 밀도 함수, 식(3)을 얻을 수 있다.

$$C_{pq}(k_x; \omega) = C_{pp}(\omega) \cdot \frac{(\alpha k_c) / \pi}{(k_x - k_c)^2 + (\alpha k_c)^2} \quad (3)$$

여기서  $k_x$ 는  $x$ 축을 따라 진행되는 파동의 파수이며  $k_c$ 는 난류 기진력의 대류 파수(convective wave-number)로서  $k_c = \omega / U_c$ 로 정의된다.

Fig. 1에는  $U_c=20$  m/s일 때 몇 개의 주파수에 대해 식(3)의 벽면 변동 압력 상호 스펙트럼 밀도 함수  $C_{pq}$ 를  $C_{pp}$ 로 정규화하여 파수 영역에 나타내었다. 각각의 주파수에서 벽면 변동 압력의 최대값이 나타나는 파수는 대류 파수  $k_c$ 에 해당하며, Fig. 1의



**Fig. 1** Spectra of the wall pressure fluctuation in wavenumber domain at several different frequencies for  $U_c = 20$  m/s

결과는 대류 속도로 흐르는 에디에 벽면 변동 압력의 에너지가 집중됨을 의미한다. 또한 대류 파수를 기준으로 그 이하 파수 영역에서는 벽면 변동 압력이 일정한 반면 그 보다 높은 파수에서는 파수가 증가할 수록 감소하는 경향을 보인다.

### 3. 보의 진동 응답: 이론 해석

#### 3.1 유한 길이 보

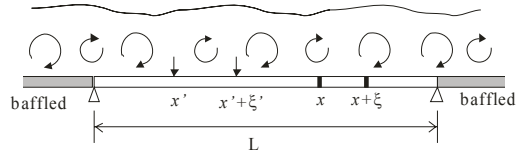
Fig. 2와 같이 양쪽으로 강체 배플(rigid baffle)된 길이  $L$ 의 양단 단순 지지된 보 위에 균질한 난류 경계층이 형성되어 있다고 가정하면, 주어진 주파수에서 길이  $L$ 의 보 위에 분포된 벽면 변동 압력에 의한  $x$ 지점의 수직 방향 변위  $u(x)$ 는 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$u(x) = \int_0^L C_p(x')H(x, x')dx' \tag{4}$$

여기서  $C_p(x')$ 는  $x'$ 지점에 작용하는 벽면 변동 압력이며  $H(x, x')$ 는  $x'$ 지점에 단위 하중이 작용할 때  $x$ 지점에 발생하는 보의 변위를 나타내는 전달함수이다. 식 (4)를 이용해  $y$ 지점의 응답을 표현하면

$$u(y) = \int_0^L C_q(y')H(y, y')dy' \tag{5}$$

식 (4)와 식 (5)를 이용해 변위의 상호 파워 스펙트럼 밀도 함수를 구하면



**Fig. 2** A simply supported beam subjected to turbulent wall pressure fluctuation.  $x'$  and  $\xi'$  denote excitation points and  $x$  and  $\xi$  for response points

$$S_{uu}(x, y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[u^*(x)u(y)]}{T}$$

$$= \int_0^L \int_0^L \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[C_p^*(x')C_q(y')]}{T} H^*(x, x')H(y, y')dx'dy' \tag{6}$$

이 된다. 여기서 상첨자 \*는 복소 켈레(complex conjugate)을 나타낸다. 식 (6)에서  $y$ 를  $x$ 로부터의 이격 거리  $\xi$ 로,  $y'$ 을  $x'$ 으로부터의 이격 거리  $\xi'$ 으로 치환하면 Fig. 2와 같이  $x'$ 위치와  $x'+\xi'$  위치에 작용하는 벽면 변동 압력에 의해 두 지점  $x$ 와  $x+\xi$ 에서 발생하는 변위의 상호 파워 스펙트럼 밀도 함수는

$$S_{uu}(x, \xi) = \int_0^L \int_{-x'}^{L-x'} C_{pq}(\xi')H^*(x, x')H(x+\xi, x'+\xi')d\xi'dx' \tag{7}$$

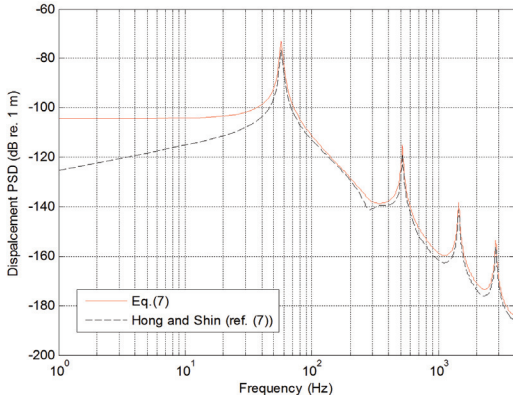
와 같다. 식(7)에서  $\xi=0$ 이면 위치  $x$ 에서의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수가 된다. 식 (7)의  $C_{pq}(\xi')$ 은 식 (1)에 정의되어 있으며, 전달함수  $H(x, x')$ 는 유한 길이 보의 운동 방정식으로부터 구할 수 있다.

참고문헌(7)에 제시된 상호 스펙트럼 밀도 함수는 두 번째 가진력  $\xi'$ 에 대한 적분 구간이 이 논문의 식 (7)과 다르게 표기되어 있다. 즉, 참고문헌(7)에 유도된  $S_{uu}(x, \xi)$ 는  $\xi'$ 의 적분 구간이 0에서부터  $L$ 까지로 되어 있어  $0 \leq x'+\xi' \leq 2L$ 의 구간에서 전달 함수가 계산된다.

Table 1에 제시된 물성치를 갖는 길이  $L=1$  m의 유한 길이 보에 대해 식 (7)과 참고문헌(7)의 식을 적용한 결과를 비교하여 Fig. 3에 나타내었다. 해석에 사용한 대류 속도는 참고문헌(7)과 동일하게  $U_c=200$  m/s로 설정하였다. Fig. 3의 해석 결과는  $x=0.5$  m

**Table 1** Properties of the beam

Moment of inertia	$3 \times 10^{-8} \text{ m}^4$
Density	$2650 \text{ kg/m}^3$
Cross-sectional area	$6.16 \times 10^{-8} \text{ m}$
Young's modulus	$71 \times 10^9 \text{ Pa}$
Damping loss factor	0.02

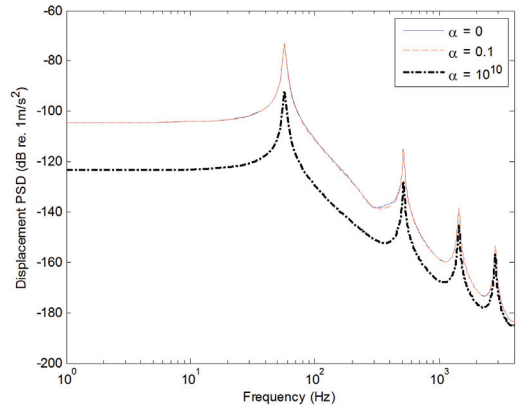


**Fig. 3** Comparison of power spectral densities calculated by Eq. (7) in the present paper and Ref. (7)

지점에서 발생하는 변위의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수로서, 약 100 Hz 이상의 주파수 대역에서는 참고문헌(7)의 결과가 식 (7)의 결과보다 약 2~3 dB 낮게 나타나고 있다. 보의 첫 번째 진동 모드가 발생하는 약 60 Hz 이하 주파수 대역 응답의 경우에는 식 (7)의 결과가 일정한 상수 값으로 수렴하는 반면 참고문헌(7)의 결과는 주파수가 낮아질수록 값이 감소하는 경향을 보인다. 참고문헌(7)에서는 이러한 저 주파수 대역의 응답 특성을 유한 길이 보의 바깥에 존재하는 난류 경계층 벽면 변동 압력의 상관관계에 의한 효과로 설명하고 있으나 저자는 참고문헌(7)에서 사용된 상호 파워 스펙트럼 밀도 함수식의 오류에 의한 것으로 예상한다. 즉, 참고문헌에서 유한 길이 보의 전달함수는 진동 모드를 중첩하여 나타낸 식 (8)을 이용하였다.

$$H(x+\xi, x'+\xi') = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x+\xi)\phi_n(x'+\xi')}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j\eta\omega_n^2} \quad (8)$$

여기서  $\omega_n$ 은  $n$ 번째 모드의 고유진동수,  $\phi_n$ 은 모드



**Fig. 4** Comparison of the auto-power spectral densities for three different values of the correlation parameter  $\alpha$

형태(mode shape),  $m$ 은 단위 길이당 질량,  $\eta$ 는 보의 감쇠 손실 계수를 나타낸다. 그러나 참고문헌(7)에서는  $0 \leq x'+\xi' \leq 2L$ 의 구간을 가지므로 식 (8)에 사용된  $\phi_n(x'+\xi')$ 는 타당하지 못하며 이로 인해 Fig. 3에 보인 것과 같은 오차가 발생하였다. 이 논문에서는 식 (7)의 상호 파워 스펙트럼 밀도 함수를 사용하여 보의 진동을 해석하였다.

### 3.2 무한 길이 보

식 (7)은 유한 길이 보에 대한 진동 응답이지만 보의 감쇠(damping)를 고려할 때 길이  $L$ 이 충분히 크다면 무한 길이 보에도 적용 가능하다. 이 경우 무한 길이 보의 전달 함수  $H(x, x')$ 는 보에 존재하는 파동해(wave solution)를 이용해 구할 수 있다.

보의 수직 방향 변위  $u(x, t)$ 에 대한 Euler-Bernoulli 보의 운동방정식은 식 (8)과 같다.

$$EI(1+j\eta) \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x,t) \quad (8)$$

여기서  $E$ 는 영률(Young's modulus),  $I$ 는 관성모멘트(moment of inertia),  $\eta$ 는 보의 감쇠 손실 계수(damping loss factor),  $\rho$ 는 밀도, 그리고  $S$ 는 보의 단면적을 나타낸다. 식 (8)에 대한 파동해는 시간과 공간에 대한 복소 지수 함수로 식 (9)와 같이 표현할 수 있다.

$$u(x,t) = \bar{u}(x) e^{j\omega t} = D e^{\beta x} e^{j\omega t} \quad (9)$$

식 (9)를 식 (8)에 대입하여 수직 방향 변위에 대한 운동방정식의 해를 구하면

$$\beta = \pm(k_{(b)} - i\delta_b), \pm(ik_b + \delta_b) \tag{10}$$

이며  $\eta \ll 1$ 인 경우  $k_b$ 와  $\delta_b$ 는 식 (11)과 같이 근사화 된다.

$$k_b \approx \omega^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\rho S}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \delta_b \approx \frac{k_b \eta}{4} \tag{11}$$

식 (10)에서 구한  $\beta$ 는 네 개의 해를 가지므로 보의 수직 방향 변위  $\bar{u}(x)$ 는 식 (12)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) = & D_1 e^{k_b x} e^{-i\delta_b x} + D_2 e^{-k_b x} e^{i\delta_b x} \\ & + D_3 e^{\delta_b x} e^{ik_b x} + D_4 e^{-\delta_b x} e^{-ik_b x} \end{aligned} \tag{12}$$

식 (12)에 정의된 것과 같이, 무한 길이 보에는 양의  $x$ 방향과 음의  $x$ 방향으로 진행되는 4개의 파동만이 존재한다. 이 중 두 개는 보를 따라 전파되는 진행파(propagating wave)이며 나머지 두 개는 파동의 크기가 거리에 따라 지수적으로 감소하는 근접장 파동(near-field wave)이다. 보의  $x=0$  지점에 외력이 작용할 경우 가진점에서 변위 연속 조건 및 힘의 평형 조건을 식 (12)에 적용하여 네 계수  $D_1 \sim D_4$ 를 구하면 식 (12)는 양의  $x$ 영역과 음의  $x$ 영역에 대해 식 (13)과 식 (14)로 표현된다.

$$\bar{u}_- = \frac{jF}{4EI(\delta + jk)^3} (e^{-j(\delta + jk)x} + j e^{(\delta + jk)x}) \tag{13}$$

$$\bar{u}_+ = \frac{jF}{4EI(\delta + jk)^3} (e^{j(\delta + jk)x} + j e^{-(\delta + jk)x}) \tag{14}$$

여기서 아래 첨자  $\pm$ 는 각각 양의  $x$ 영역과 음의  $x$ 영역을 나타낸다. 따라서 전달함수  $H(x; \omega)$ 는 식 (15)와 식 (16)으로부터 얻을 수 있다.

$$H_-(x; \omega) = \bar{u}_- / F \tag{15}$$

$$H_+(x; \omega) = \bar{u}_+ / F \tag{16}$$

식 (15)와 식 (16)을 식 (7)에 대입하면 무한 길이 보의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수를 구할 수 있다.

Fig. 5에는 Table 1에 제시된 물성치를 이용해 무한 길이 보에서 구한 진동 속도의 자기 파워 스펙트럼

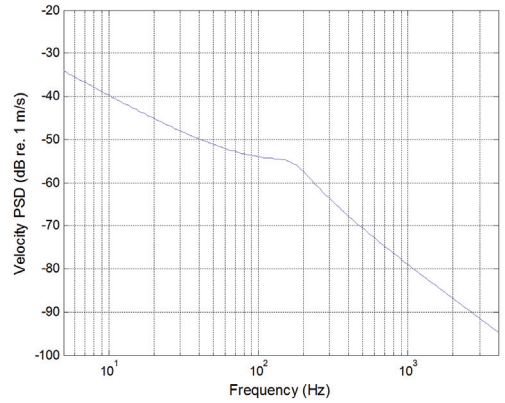


Fig. 5 Power spectral density of velocity for infinite length beam

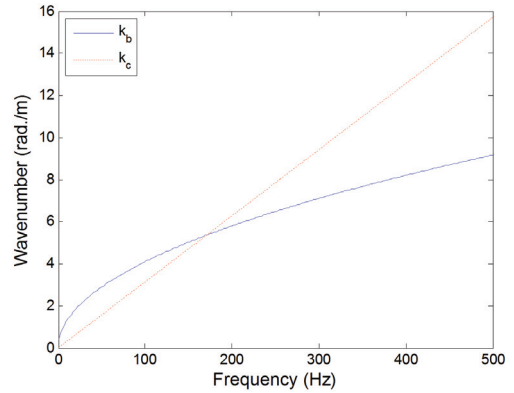
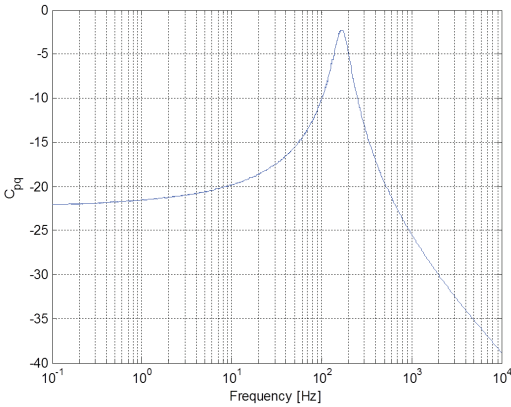


Fig. 6 Comparison between convective wave-number( $k_c$ ) and bending wavenumber( $k_b$ )

밀도 함수를 나타내었다. 해석의 편의를 위해 보의 감쇠 손실 계수는 0.2로 설정하였다. 계산 시 적분 구간  $L$ 은 파동의 거리 감쇠가 충분히 발생하여 무한 길이 보로 간주될 수 있도록 주파수에 따라  $L$ 을 조정하였다. 또한 주파수가 증가함에 따라 식 (7)의 미소 적분 간격  $dx'$ 와  $dx'$ 를 짧게하여 수치 적분에 의한 오차가 발생하지 않도록 하였다.

Fig. 5의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수는 약 170 Hz를 중심으로 그 보다 낮은 주파수 대역과 높은 주파수 대역 응답 곡선의 기울기가 달라지는 특징을 보인다. 그 이유를 살펴보기 위해  $U_c=200$  m/s 일 때 난류 기진력의 대류 파수( $k_c$ )와 보의 굽힘파 파수( $k_b$ )를 비교하여 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 6을 보면 약 170 Hz에서  $k_b$ 가  $k_c$ 와 같아지는 것을 알



**Fig. 7** Cross power spectral density of the wall pressure fluctuation at the bending wavenumber  $k_b$

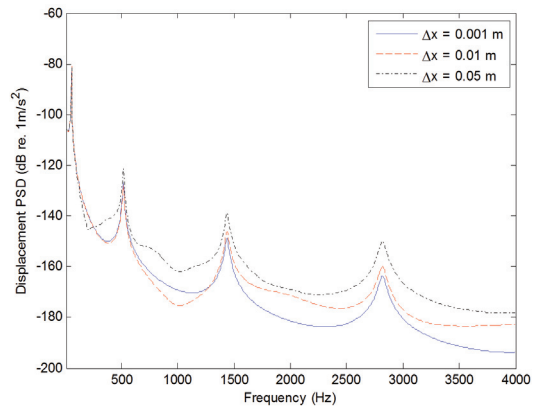
수 있다. Fig. 1에 보인 난류 기진력의 파수 스펙트럼을 이용해 난류 기진력이 굽힘파의 파수에서 가지는 상호 파워 스펙트럼 밀도 함수  $C_{pq}(k_b, \omega)$ 의 크기를 Fig. 7에 나타내었다. Fig. 7을 보면  $k_b$ 와  $k_c$ 가 같아지는 약 170 Hz를 경계로 저주파수 대역과 고주파수 대역  $C_{pq}(k_b, \omega)$ 의 기울기가 달라지는 것을 볼 수 있다. 따라서 Fig. 5의 무한 길이 보 응답에서 약 170 Hz를 중심으로 자기 스펙트럼 밀도 함수의 기울기가 바뀌는 것은 무한 길이 보에 작용하는 난류 경계층 내 벽면 변동 압력의 크기가 Fig. 6과 같이 변화하기 때문이다.

**4. 보의 진동 응답: 수치 해석**

이 장에서는 먼저 유한요소법을 이용한 유한 길이 보의 진동 해석에 관해 참고문헌<sup>(7)</sup>의 내용을 검토하고, 유한요소법의 문제점을 개선하기 위해 대안으로써 도파관 유한요소법을 적용하였다.

**4.1 난류 기진력 이산화 모델링**

기존의 유한요소법을 이용해 난류 기진력을 받는 보의 응답을 구하기 위해서는 Fig. 1에 나타난 것과 같이 기진력의 입력 파워가 집중되어 있는 대류 파수가 해석에 구현될 수 있도록 유한요소 모델링이 되어야 한다. 즉, 길이 방향( $x$ 방향)으로 유한요소를 이용해 구조물을 이산화할 때 공간 에일리어싱 (spatial aliasing) 문제를 억제하기 위해서는 대류 파수의 최소 2배 이상까지 해석이 가능하도록  $x$  방



**Fig. 8** Displacement power spectral densities calculated by using three different discrete element lengths

향 유한요소의 크기를 설정하여야 한다. 그러나 일반적으로 대류 파수는 해석 주파수 범위 내에 포함된 구조물의 파수 또는 보의 최고차 진동 모드가 가지는 파수보다 훨씬 크기 때문에 난류 기진력을 신뢰성 있게 모델링하기 위해서는 유한요소의 크기가 식 (17)의 조건을 만족해야 한다.

$$k_s \geq 2k_{(c,max)} \tag{17}$$

여기서  $k_s$ 는 보의 유한요소가 가지는 샘플링 파수 (sampling wavenumber)이며  $k_{c,max}$ 는 관심주파수 대역의 최대 대류 파수이다. 그러나 식 (17)의 조건을 만족하기 위해서는 아주 많은 수의 유한요소를 필요로 한다. 예를 들어,  $U_c=20$  m/s를 가정하면 주파수 4000 Hz에서 유한요소의 길이  $\Delta x$ 는  $\Delta x \leq 0.0025$  m 이어야 한다.

보의 모델링에 사용된 유한요소의 크기가 진동 응답에 미치는 영향을 살펴보기 위해 Table 1에 제시된 길이 1 m의 보에 대해 대류 속도  $U_c=20$  m/s 조건에서 요소의 길이에 따른 진동 응답을 식 (7)을 이용해 구하고 그 결과를 Fig. 8에 비교하였다. 최대 해석 주파수인 4000 Hz에서 대류 파수는 약 1260 rad/m이며 보 요소의 길이는  $\Delta x = dx' = d\xi' = 0.001$  m와 0.01 m로 설정하였다. 요소의 길이  $\Delta x$ 에 의해 결정되는 Nyquist파수( $k_s/2$ )는 각각 3140 rad/m와 314 rad/m이므로  $\Delta x=0.001$  m에서는 요소의 길이가 충분히 짧아 공간 에일리어싱 문제가 거의 발생하지 않는 반면 요소 길이  $\Delta x=0.01$  m에서는 약 700 Hz

이상 주파수 대역부터 공간 에일리어싱에 따른 오차가 발생하는 것을 볼 수 있다. 이러한 오차의 원인은 유한요소의 절점 길이  $\Delta x=0.01$  m로는 두 지점 간에 존재하는 난류 기진력의 상호관계를 제대로 표현할 수 없기 때문이다<sup>(7)</sup>.

Fig. 8에 보인 것과 같이, 난류 기진력을 신뢰성 있게 모델링하기 위해서는 많은 수의 유한요소가 요구되므로 유한요소법을 이용한 해석은 한계를 갖는다. Hong과 Shin<sup>(7)</sup>은 난류 기진력의 상호 스펙트럼 밀도 함수를 적은 수의 유한요소로 모델링하기 위해 방법을 제안한 바 있다.

### 4.2 무한 길이 보의 진동 해석

이 절에서는 유한요소 해석이 가지는 어려움을 해소하고자 도파관 유한요소법을 적용하여 무한 길이 보의 진동을 해석하고 그 결과를 이론 해석 결과와 비교한다.

도파관 유한요소법(waveguide finite element method)은 구조물의 2차원 단면만을 유한요소 모델링하며, 길이 방향(x방향)으로는 조화 진동 이론해를 사용한다. 따라서 x방향으로는 유한요소가 필요치 않기 때문에 높은 파수 영역까지 포함해야 하는 난류 기진력의 모델링에 적합한 수치해석 방법으로 판단된다.

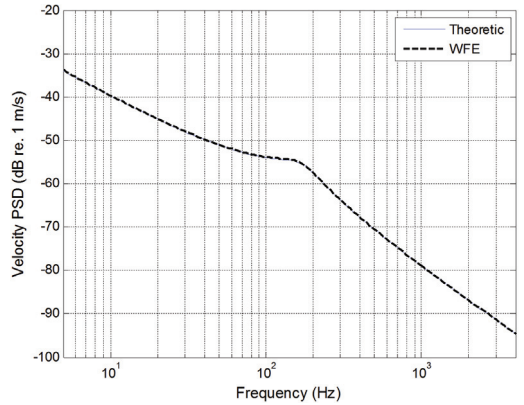
도파관 유한요소법의 정식화에 관해서는 참고문헌<sup>(11-13)</sup>에 상세히 기술되어 있으므로 이 절에서는 그내용을 생략한다. 주파수와 파수의 함수로 표현된 WFE 운동방정식은 식 (18)과 같다.

$$\begin{cases} K_2(1+j\eta)(-jk)^{2+K_1}(1+j\eta)(-jk) \\ K_0(1+j\eta) - \omega^2 M \end{cases} \vec{\Phi} = F(k, \omega) \quad (18)$$

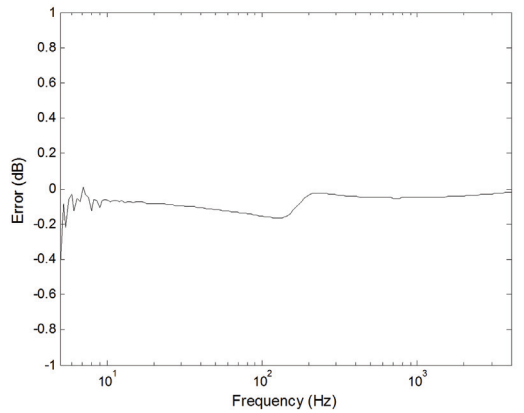
여기서  $K_2$ ,  $K_1$  그리고  $K_0$ 는 구조물의 강성과 관련된 행렬이며,  $M$ 은 질량 행렬 그리고  $\vec{\Phi}$ 는 단면의 모드형상 벡터이고  $\eta$ 는 보의 감쇠 손실 계수(damping loss factor)이다.

구조물의  $x=0$  지점에서 단위 가진력이 작용할 때 발생하는 구조물의 변위는 식 (19)와 같이 구조물에 존재하는 모든 파동들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\vec{u}_+ = \sum_{m=1}^N a_m \vec{\phi}_m e^{-jk_m x} \quad \text{for } x \geq 0 \quad (19)$$



(a)



(b)

Fig. 9 (a) Comparison of the auto-power spectral densities of velocity calculated theoretically and numerically with WFE analysis, (b) the error of WFE result

여기서  $a_m$ 는 양의 x방향으로 진행하는 파동의 크기를 나타내며,  $k_m$ 과  $\vec{\phi}_m$ 은 각각 양의 방향으로 진행하는 파동의 파수와 단면의 모드 형태 벡터, 그리고  $N$ 은 양의 x방향으로 진행하는 파동의 개수로서, WFE 모델이 가지는 전체 자유도 수의 절반이 된다. 파동의 크기  $a_m$ 은

$$a_m = \frac{i \vec{\phi}_{mL} F(k)}{\vec{\phi}_{mL} K' \vec{\phi}_{mR}} \quad (20)$$

로 표현되며 하첨자  $L$ 과  $R$ 은 각각 왼쪽 고유 벡터(left eigenvector)와 오른쪽 고유 벡터(right eigenvector)를 나타내며  $K' = dK/dk = -2kK_2$ , 그리고

$F(k)$ 는 파수 영역에서 표시한 단위 가진력이다. 식 (19)과 식 (20)로부터 무한 길이 보의 전달 함수를 구하면 식 (21)과 같다.

$$H_+(x) = \sum_{m=1}^N \frac{i\vec{\phi}_{mL}F(k)}{\vec{\phi}_{mL}K' \vec{\phi}_{mR}} \vec{\phi}_m e^{-jk_m x} \quad (21)$$

식 (21)의 전달 함수를 식 (7)에 대입하면 난류 기진력을 받는 무한 길이 보의 진동 응답을 구할 수 있다. 3.2절의 해석 이론 해석 결과와 비교하기 위해 Table 1에 제시된 보를 사각 단면을 가진 보를 WFE 모델링하여 구한 진동 속도의 자기 파워 스펙트럼 밀도 함수를 Fig. 5의 이론 해석 결과와 함께 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9의 비교를 통해 WFE를 이용한 수치해석 결과가 이론 해석 결과와 잘 일치함을 볼 수 있다.

### 5. 결 론

이 논문에서는 난류 경계층 내 벽면 변동 압력을 받는 보의 진동 응답을 수치 해석을 이용해 구하기 위한 방법에 관해 기술하였다. 난류 기진력 모델로는 Corcos 모델을 사용하였다. 기존의 유한요소법은 벽면 변동 압력이 가지는 높은 대류 파수의 가진력을 모델링 함에 있어 많은 수의 유한요소를 필요로 한다. 이 연구에서는 이러한 문제점을 해소하기 위해 파수 영역 유한요소법인 도파관 유한요소법을 적용하여 벽면 변동 압력을 받는 무한 길이 보의 진동 응답을 구하고 이론 해석 결과와 비교하였다.

먼저 벽면 변동 압력을 받는 구조물의 응답을 자기 상호 스펙트럼 밀도 함수로 유도하고, 유한 길이 보에 대해 수치 해석 시 이산화로 인하여 난류 기진력의 상호 관계가 훼손되며, 이로 인해 오차가 발생함을 확인하였다. 도파관 유한요소법에서는 길이 방향 이산화가 필요치 않으므로 유한요소법에서 발생하는 난류 기진력의 이산화 문제점을 해소할 수 있다.

벽면 변동 압력을 받는 무한 길이 보에 대해 이론 해석과 도파관 유한요소 해석을 적용하고 그 결과를 비교하였다. 이를 통해 도파관 유한요소법을 이용한 해석 결과가 이론 해석 결과와 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 도파관 유한요소법은 벽면 변동 압력을 받는 임의 형상의 구조물에 대한 진동 해석

에도 적용 가능하며, 추후에는 평판 또는 원통형 실린더에 대해 진동 해석에 응용하고자 한다.

### 후 기

이 논문은 2012년도 울산대학교 연구비에 의하여 연구되었음.

### References

- (1) Ribner, H. S., 1966, Response of a Flexible Panel to Turbulent Flow : Running Wave Versus Modal Density Analysis, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 40, No. 3, pp. 721~726.
- (2) Maestrello, L., 1967, Use of Turbulent Model to Calculate the Vibration and Radiation Responses of a Panel with Practical Suggestions for Reducing Sound Level, Journal of Sound and Vibration, Vol. 5, No. 3, pp. 407~448.
- (3) Strawderman, W. A., 1969, Turbulence-induced Plate Vibrations : an Evaluation of Finite- and Infinite-plate Models, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 46, No. 5B, pp. 1294~1307.
- (4) Shin, K.-K., Hong, C.-S. and Lee, H.-G., 1996, A Study of Flow Induced Noise for Multilayered Cylinder due to Turbulent Boundary Layer, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 6, No. 5, pp. 671~677.
- (5) Knight, A., 1996, Flow Noise Calculations for Extended Hydrophones in Fluid-and Solid-filled Towed Arrays, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 100, No. 1, pp. 245~251.
- (6) Hong, C., Shin, K.-K. and Jeon, J.-J., 2008, Transitional Wall Pressure Fluctuations on Axisymmetric Bodies, Journal of Acoustical Society of America, Vol. 124, No. 5, pp.2767~2773.
- (7) Hong, C. and Shin, K.-K., 2010, Modeling of wall Pressure Fluctuations for Finite Element Structural Analysis, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 10, pp. 1673~1685.
- (8) Corcos, G. M., 1964, The Structure of the Turbulent Pressure Field in Boundary-layer Flows, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 18, No. 3, pp.



335~378.

(9) Chase, D. M., 1980, Modeling the Wavevector-frequency Spectrum of Tubulent Boundary Layer Wall Pressure, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, No. 1, pp. 29~67.

(10) Ffowcs Williams, J. E., 1982, Boundary-layer Pressures and the Corcos model: A Development to Incorporate Low-wavenumber Constraints, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 125, pp. 9~25.

(11) Birgersson, F., Finnvenden, S. and Nilsson, C.-M., 2005, A Spectral Super Element for Modeling of Plate Vibration. Part1: General Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 287, No. 1-2, pp. 297~314.

(12) Nilsson, C.-M., Jones, C. J. C., Thompson, D. J. and Ryue, J., 2009, A Waveguide Finite Element and Boundary Element Approach to Calculating the Sound Radiated by Railway and Tram Rails, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 321, No. 3-5, pp. 813~836.

(13) Ryue, J., 2010, A Numerical Method for Analysis of the Sound and Vibration of Waveguides Coupled with External Fluid, *The Journal of the Acoustical Society of Korea*, Vol. 29, No. 7, pp.

448~457.



**Jungsoo Ryue** graduated with a BSc in Mechanical Engineering from Pusan National University in 1995. He took the MSc degree in KAIST and received his second MSc and PhD in ISVR at University of Southampton in UK.

He has been working for School of Naval Architecture and Ocean Engineering in University of Ulsan as an assistant professor since 2009. His research interest includes wave propagation along waveguide structures, vibro-acoustic problems and related signal processing.



**Eunbi Kim** graduated from School of Naval Architecture and Ocean Engineering in University of Ulsan with bachelor degree in 2010 and a master degree in 2012. She has been working in DNV classification as an approval

engineer since 2012.