

# 재생품 공급량이 불확실한 주문시분해 환경에서의 생산 및 재제조 계획\*

강 창 목\*\*†

Production and Remanufacturing Planning under Uncertain Supply  
of Recovery Cores and a Disassemble-to-order Environment

Changmuk Kang\*\*

## ■ Abstract ■

Remanufacturing is a process of recovering end-of-life products into serviceable parts for producing new products. Due to the limited supply of recovery cores to remanufacture, a remanufacturing firm also needs to produce or procure new parts for fulfilling the demand. This paper is targeted for solving the problem of determining the optimal amount of newly produced and remanufacturing parts, which is called production and remanufacturing planning (PRP) problem, under uncertain supply of recovery cores. The new production mitigates the risk of insufficient core supply while it takes more costs than the remanufacturing. The PRP model in this paper also considers disassemble-to-order (DTO) environment, in which multiple kinds of parts are remanufactured from multiple products on order of the parts. Whereas existing studies presents only heuristic solutions for DTO remanufacturing, this paper provides an exact solution for this problem and analytical sensitivity of the involved cost parameters, adopting multi-dimensional newsvendor modeling and stochastic linear programming techniques. The result shows that production and remanufacturing plans for multiple products are mutually dependent, and a change of cost parameters involved in only one part is propagated to all other parts.

Keyword : Production and Remanufacturing Planning, Core Supply Uncertainty, Disassemble- to-Order, Mutli-Dimensional Newsvendor, Stochastic Linear Programming

논문접수일 : 2012년 10월 05일 논문게재확정일 : 2012년 12월 31일

논문수정일(1차 : 2012년 11월 27일)

\* 이 연구는 2012년도 숭실대학교 교내연구비 지원에 의한 연구임.

\*\* 숭실대학교 산업정보시스템공학과

† 교신저자, changmuk.kang@ssu.ac.kr

## 1. 서 론

전 세계적으로 생산자책임 재활용제도(extended producer responsibility, EPR), 폐전기전자제품 처리 지침(waste electrical and electronic equipment, WEEE) 등 환경규제가 강화됨에 따라 학계와 산업계에서는 사용 후 제품을 적절히 처리하여 이를 자원으로 재활용하는 방법에 대한 많은 논의가 이루어지고 있다[28]. 여러 자원 재처리 모형 중 하나인 재제조는 사용 후 제품에서 아직 수명이 다하지 않은 부품을 분리 및 재처리하여 신규 제품 혹은 재활용 제품의 생산 부품으로 활용하는 모형이다[21]. 폐프린터 토너를 재생하는 사례나 폐 노트북 부품을 분해 및 재조립하여 중고 노트북으로 생산하는 사례 등이 대표적이다[19].

본 논문은 사용 후 제품(end-of-life product)을 재제조(remanufacturing)하여 신규 제품 혹은 재활용 제품의 생산 부품으로 활용하는 기업이 가지게 되는 ‘생산 및 재제조 계획(production and remanufacturing planning, 이하 PRP)[6]’ 문제를 다룬다. PRP 문제는 재제조를 통해 생산할 부품의 양과 신규 제조를 통해 생산할 부품의 양을 결정하는 문제이다. 만약 재제조 부품을 충분히 생산할 수 있다면 신규 부품이 필요치 않지만, 제품 회수율의 제약 및 재제조 능력의 한계로 인해 재제조로 모든 수요를 충족할 수 없을 때는 신규 부품을 생산하거나 구매하여 수요를 만족시켜야 하므로 이에 대한 계획이 필요하게 된다. 본 논문에서는 특히 재생품(recovery core)의 공급이 불확실하고 주문 시분해(disassemble-to-order, 이하 DTO) 방식으로 재제조 부품을 생산하는 환경을 대상으로 한다. 재생품은 사용 후 제품 자체를 지칭하기도 하고 재제조를 위해 사용 후 제품으로부터 분리한 부분 조립품(subassembly)을 지칭하기도 하는데, 이후의 논의에서는 일련의 재제조 프로세스의 투입물로서 재제조 대상 부품들을 포함하고 있는 조립품을 모두 재생품으로 칭하기로 한다.

본 논문에서 고려하는 재생품 공급량의 불확실

성은 재제조 프로세스가 일반 제조 프로세스와 구별되는 가장 대표적인 특징이면서 재제조 생산의 계획 및 관리를 어렵게 하는 대표적인 요인이다[8]. 일반적인 재고 시스템에서 공급자의 불확실성이 재고비용을 증가시키는 것처럼 재생품 공급량의 불확실성은 재제조 생산자의 비용을 증가시킨다[1, 10]. 재생품의 공급량은 사용 후 제품 회수율이 일정하지 않다는 점과 회수된 제품들 중에서도 재제조가 가능한 수준의 품질을 유지하고 있는 제품의 비율이 일정하지 않다는 점 때문에 재제조 생산자가 미리 예측하기 힘들다. 본 논문에서는 신규 생산량이 계획되는 시점에서 재생품의 회수량이 알려져 있지 않아 재생품 공급이 불확실한 상황에서 신규 생산량과 재제조 계획량을 결정하는 모형을 제시하고 있다. 따라서 부품의 수요가 확정적으로 알려져 있다고 할지라도 신규 부품의 생산량에 적절한 여유를 두게 된다.

다음으로 본 논문에서는 DTO 시스템을 가정한다고 하였는데, 이는 서로 다른 종류의 재생품이 존재하고 부품의 수요량에 따라 해당 부품을 포함하고 있는 재생품을 분해하여 재제조하는 시스템을 말한다. 일반 제조 환경에서 부품을 보관하다가 주문 시에 조립해서 생산하는 주문조립생산(assemble-to-order, 이하 ATO) 시스템[2]의 역이라고 할 수 있다. 각 재생품이 고유한 부품만을 가지고 있는 경우에는 각 부품의 생산계획을 독립적으로 수립할 수 있지만, 부품 중 일부가 여러 재생품이 공통적으로 가지고 있는 부품일 경우에는 이 공통 부품에 의해 한 부품의 생산계획이 다른 부품의 생산계획에도 영향을 미치게 된다. 따라서 생산계획이 훨씬 더 복잡해지고 최적해를 구하기가 어려워진다[12].

제 2장에서 자세히 살펴보겠지만 기존 연구들은 재생품 공급이 불확실한 DTO 시스템에 대해 근사적인 해법만을 제시하여 왔다. 반면에 본 논문에서는 이러한 환경에서의 최적해를 분석적으로(analytically) 제시함으로써 보다 효율적인 재제조 계획을 제공하고 관련 비용 변수들이 재제조 계획에

미치는 영향을 분석하였다. 제시된 모형은 단일기간(single period) 모형으로서 두 단계의 의사결정으로 이루어져 있다. 첫 번째 단계에서는 신규 부품의 생산량을 계획한다. 신규 부품을 생산하는 것보다는 재제조를 통해 부품을 생산하는 것이 더 저렴하지만 후에 도착하는 재생품의 공급량이 부족한 경우에는 수요를 잃어버리거나 긴급 생산을 하게 되기 때문에 원래의 생산 비용보다 더 큰 부족비용(penalty cost)을 지불해야 한다. 신규 생산량의 결정은 생산자의 위험회피 성향에 따라 달라질 수 있는데 본 논문에서는 생산자가 위험중립적(risk-neutral)이라고 가정한다. 따라서 이 문제는 일종의 신문판매(newsvendor) 문제의 형태를 띠게 된다. 계획된 신규 부품 생산량이 인도되는 시점에서는 재생품의 공급량도 실현 되는데, 이 때 두 번째 의사결정으로서 나머지 수요를 재제조 부품으로 공급하기 위한 재생품의 분해 및 재제조 수량이 결정된다. 이는 분해 및 재제조 비용과 부족비용의 합을 최소화하는 선형계획법(linear programming, 이하 LP)으로 모형화 된다. 이러한 2단계 의사결정 모형을 통해 최적 생산량과 이에 대한 재제조 환경 요인들의 영향을 분석하게 된다.

앞으로의 논문 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 사용 후 제품의 재제조와 관련된 기존 문헌들을 살펴본다. 제 3장에서는 본 논문에서 제시된 최적 생산량 결정모형을 설명하고, 제 4장에서는 이 모형의 최적해를 유도한다. 제 5장에서는 최적해에 대한 탐구를 통해 재제조 환경 요인들의 민감도를 분석한다. 제 6장에서는 결론과 추후연구 방향을 제시한다.

## 2. 관련 연구

사용 후 제품의 재처리를 통한 자원화 관련 연구는 여러 연구자들에 의해 폭넓게 진행되어 왔다. 제품의 재처리 방식은 크게 재사용(reuse)과 재제조(remanufacturing), 재활용(recycling)로 나뉘는데 [23], 이중 재제조는 상당한 열화(deterioration)가 진행된 제품을 대상으로 하면서도 제품을 원료 수준으로 환원하지 않고 부품 단위로 재생하기 때문에 부가가치가 높은 재처리 방법으로 평가받고 있다[7].

본 연구에서는 재제조된 부품을 제품의 생산에 활용하는 기업이 재제조 부품을 얼마나 생산할 것인지, 그리고 신규 부품을 얼마나 생산 혹은 구매할 것인지에 대한 의사결정을 내리는 문제를 다루고 있다. 이러한 생산 계획문제를 Golany et al.[6]은 PRP 문제로 일반화하여 수리 모형을 제시하였다. 이때 의사결정 변수는 각 재제조 부품의 생산량 및 재고량, 재제조 부품이 부족한 경우의 신규 부품 생산량, 수요를 초과하는 재제조 부품에 대한 폐기량 등이 된다. 수요와 공급이 확정적이고 단일 제품만을 재제조하는 PRP 문제에 대해 Golany et al.[6], Yang et al.[31], Teunter et al.[27]은 각각 비용이 선형적인 경우, 오목한(concave) 함수인 경우, 시작 비용(setup cost)이 있는 경우의 해법을 제시하였다.

본 연구에서는 기본적인 PRP 상황에서 (1)재생품의 공급이 불확실하고, (2)두 개 이상의 제품을 DTO 방식으로 재제조 한다는 조건이 추가된 경우에 대한 해법을 제시하고 있다. 이처럼 확장된 PRP 문제 상황에 대해서도 <표 1>과 같이 많은 기존 연

<표 1> PRP관련 기존 연구

	단일 제품 PRP 문제	DTO 방식 PRP 문제
확정적 수요와 공급	Golany et al.[6], Yang et al.[31], Teunter et al.[27]	Kongar and Gupta[18], Taleb and Gupta[26], Kang and Hong[14], Kim et al.[17], Langella[20], Schulz and Langella[25, 10]
불확실한 수요 혹은 공급	Schulz and Ferretti[24], Inderfurth[11, 13], Kiesmüller[15], Van der Laan et al.[29], Fleischmann et al.[5]	Inderfurth and Langella[12], Kim and Xirouchakis[16] 본 연구

구들이 존재하여 왔다. 먼저 재생품의 공급 및 부품 수요의 불확실성을 반영한 확률적(stochastic) PRP 모형을 제시한 연구들은 다음과 같다. Schulz and Ferretti[24]는 수요가 일정하고 재생품의 수율(yield rate)이 임의로 변동할 때 재제조품과 신규 생산품의 로트(lot) 크기를 결정하기 위한 정책을 제시하였으며, Inderfurth[11, 13]과 Kiesmüller[15], Van der Laan et al.[29]은 재생품 공급량과 부품 수요량이 모두 불확실할 때 재제조 부품과 신규 생산품의 안전재고(safety stock) 수준을 결정하는 모형을 제시하였다. Inderfurth[11]가 밝힌 바와 같이 신규 부품 생산과 재제조의 인도 기간(lead time)이 다른 경우 PRP 모형의 최적 재고량은 일반적인 목표재고(order-up-to) 정책 등이 적용되지 않기 때문에, 이들 연구에서는 근사 정책들을 제시하고 있다. Fleischmann et al.[5]은 이를 단순화하기 위해 재생품은 공급되는 즉시 소비된다고 보고 신규 생산품의 최적 재고 수준만을 결정하는 모형을 제시하기도 하였다.

다음으로 DTO 방식의 재제조에서는 복수의 재생품과 부품이 관여하기 때문에 의사결정의 변수가 많아진다. 재생품 공급 및 제품 수요가 확정적인 경우에 DTO 시스템에서의 의사결정은 재생품의 분해 및 재제조 비용을 최소화하면서 수요를 모두 충족시키기 위해 각 재생품을 몇 개씩 분해하여 부품을 재제조 할 것인가가 된다. Kongar and Gupta[18]는 단일 기간에서 이러한 의사결정을 내리기 위한 목적 계획법(goal programming) 모형을 제시하였고, Taleb and Gupta[26]과 Kang and Hong[14], Kim et al.[17], Langella[20], Schulz and Langella[25]은 다기간에서의 의사결정 모형과 해법을 제시하였다.

반면 불확실성과 DTO 방식의 재製조를 모두 고려한 상황에 대해서는 많은 연구가 이루어지지 못했다. Inderfurth and Langella[12]과 Kim and Xirouchakis[16] 등의 연구에서 이에 대한 모델을 제시하고 있기는 하지만 모두 근사적인 해법만을 제시하고 있다. Inderfurth and Langella[12]는 공

급의 수율(yield)이 불확실할 때 각 재생품을 얼마나 획득해야 하는지에 대한 모형을 제시하였다. 하지만 재생품과 부품의 관계를 그대로 반영하지 못하고 재생품 간에 서로 공통되는 부품이 없다고 가정하였다. Kim and Xirouchakis[16]는 재생품 공급량에 제한이 없는 대신 수요가 불확실하고 분해 및 재제조 능력이 확정적으로 제약된 상황에서 각 재생품의 분해 개수를 찾기 위한 근사 해법을 제시하였는데, 이 경우에도 역시 재생품 간에 공통부품은 없다고 가정하여 일반적인 DTO 방식을 재製조를 반영하지 못하였다. 이와 달리 본 연구에서는 공통 부품이 존재하는 상황에서의 최적 재제조 계획을 제시하였다는 점에서 의의를 지닌다.

방법론적 측면에서 본 논문에서는 재생품 공급의 불확실성이 고유 부품과 공통 부품의 생산량에 미치는 영향을 모형화하기 위해 Fine and Freund[4], Harrison and Van Mieghem[9], Van Mieghem[30]의 연구에서 제시된 바 있는 불확실한 수요하에서의 종속적인(dedicated) 생산 능력과 유연한(flexible) 생산 능력의 수준을 결정하는 모형을 응용하였다. 이들 모형에서는 생산 능력을 먼저 결정하고 주어진 생산능력 하에서 불확실한 수요에 대응하는 다차원 신문판매 모형 형태의 의사결정 모형을 제시하고 있는데, 본 연구에서는 이를 재제조 계획량을 먼저 결정하고 불확실한 재생품의 공급하에서 계획량을 최소 비용으로 만족시키는 모형으로 변형하였다.

### 3. 연구모형

#### 3.1 기호정의

- $D_i$  : 부품  $i$ 의 수요량,  $i = 1, 2, 3$ ;  $D = \{D_1, D_2, D_3\}^T$
- $S_j$  : 재생품  $j$ 의 회수량,  $j = 1, 2$ ;  $S = \{S_1, S_2\}^T$
- $M_i$  : 부품  $i$ 의 신규 생산량,  $i = 1, 2, 3$ ;  
 $M = \{M_1, M_2, M_3\}^T$
- $Q_i$  : 부품  $i$ 의 재제조 계획량,  $Q_i = D_i - M_i$ ,  
 $i = 1, 2, 3$ ;  $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}^T$

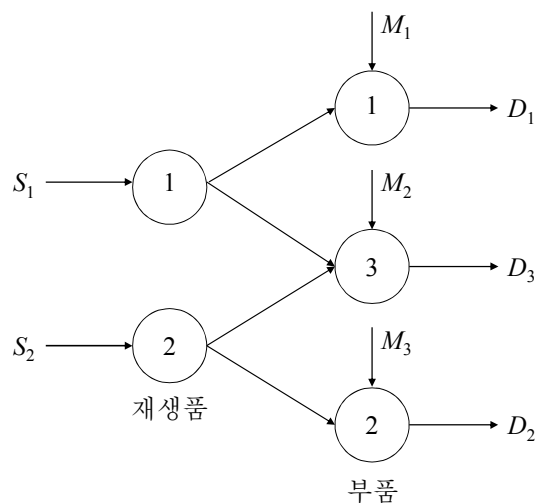
- $r_i$  : 부품  $i$ 의 단위당 신규 생산 비용,  
 $i = 1, 2, 3; r = \{r_1, r_2, r_3\}^T$
- $x_j$  : 재생품  $j$ 의 실제 재제조 수량,  $j = 1, 2;$   
 $x = \{x_1, x_2\}^T$
- $y_i$  : 부품  $i$ 를 계획량  $Q$ 만큼 재제조하지 못했을  
때의 부족량,  $i = 1, 2, 3; y = \{y_1, y_2, y_3\}^T$
- $c_j$  : 재생품  $j$ 의 단위당 재제조 비용,  $j = 1, 2;$   
 $c = \{c_1, c_2\}^T$
- $p_i$  : 부족한 재제조 수량에 대한 단위당 부족  
비용,  $i = 1, 2, 3; p = \{p_1, p_2, p_3\}^T$
- $TC(M)$  : 각 부품의 신규 생산량을  $M$ 으로 정했을  
때의 총 기대비용
- $V(Q)$  : 각 부품의 재제조 계획량을  $Q$ 로 정했을  
때 모든 수요를 신규 생산했을 때보다  
증가되는 비용의 기대값
- $C(Q, S)$  : 각 부품의 재제조 계획량이  $Q$ 이고 각 재  
생품의 회수량이  $S$ 로 주어질 때 달성할  
수 있는 최소 재제조 비용(재생품 재제  
조 비용과 부품 부족비용의 합)
- $\Omega_k$  : 재제조 계획량  $Q$ 에 따라 재생품의 회수  
량  $S_1, S_2$ 가 만드는 평면을 구분한 영역,  
 $k = 1, \dots, 12$
- $P_k$  : 불확실한 재생품의 회수량  $S_1, S_2$ 가 영역  
 $\Omega_k$ 에 포함될 확률,  $k = 1, \dots, 12$
- $\lambda_k$  : 각 영역  $\Omega_k$ 에서  $C(Q, S)$ 를 구하는 선형  
계획법 문제의 쌍대해(dual solution)  
벡터,  $k = 1, \dots, 12$

### 3.2 재생품 공급이 불확실한 주문시분해(Dis- assemble-to-Order) 시스템

본 논문의 연구모형은 DTO 방식의 재제조를 수행하는 위험중립적인 재제조 사업자의 신규 부품 생산량과 재생품의 분해 및 재제조 수량 결정 과정을 모형화한다. DTO 방식의 재제조가 단일 제품 혹은 부품만을 대상으로 하는 재제조와 다른 점은 여러 제품에 공통으로 속해 있는 공통 부품이 존재한다는 것이다. 이로 인해 서로 다른 부품의 생산

및 재제조 계획이 연관된다. 본 논문에서는 모형을 단순화하면서도 공통부품으로 인한 영향을 반영하기 위해 두 가지 종류의 재생품으로부터 각각 1개씩의 고유 부품과 1개의 공통 부품, 총 세 가지 종류의 서로 다른 부품이 추출되는 상황을 가정한다. 이는 단순화된 모형이지만 현실적인 사례에도 직접적으로 대응된다. 예를 들어 재제조가 활발히 이루어지는 레이저 프린터 토너 카트리지의 경우 대용량 토너와 일반 토너는 외부 카트리지의 크기는 다르지만 내부의 드럼과 롤러 등의 부품을 같은 규격으로 사용한다. 이 경우 외부 카트리지는 고유 부품과 드럼과 롤러 등의 공통 부품이 존재하는 상황에서의 재제조 프로세스라 할 수 있다. 다수의 부품이 재제조 되는 상황에서도 고유 부품과 공통 부품의 집합을 하나의 부품으로 취급하면 모형을 그대로 적용할 수 있다.

두 가지 재생품은 재생품 1, 2로 구분하고, 각각의 고유 부품은 동일하게 부품 1과 부품 2로, 공통 부품은 부품 3으로 구분한다. 각각의 재생품을 재제조하면 부품 1, 2, 3이 추출되고 이들 부품은 신규 생산을 통해서도 공급된다. 이를 도식화하면 [그림 1]과 같이 나타낼 수 있다. 부품의 신규 생산량은 재생품의 공급량이 실현되기 전에 계획되어야 한다. 재생품이 도착하고 나면 신규 생산량을 제외



[그림 1] 재생품과 재제조 부품의 구성

한 나머지 수요를 재제조를 통해 최대한 충족시키게 된다. Inderfurth[11]의 정의를 따르자면 신규 생산의 인도기간이 재제조의 인도기간보다 긴 경우라 하겠다. 따라서 신규 생산량을 결정한다는 것은 바꿔 말하면 전체 수요 중 재제조를 통해 충족할 수요의 양을 결정한다는 것과도 같다. 신규 생산의 비용은 재생품을 재제조하는 것보다는 비싸지만 후에 재생품이 부족하여 수요를 충족하지 못하는 경우에 발생하는 부족비용보다는 작다고 가정한다(만약, 재제조 비용보다 싸다면 재제조를 할 이유가 없고, 부족비용보다 비싸다면 미리 신규 생산을 계획할 필요가 없다). 생산자는 위험중립적이라고 가정하였으므로 비용의 기대값을 최소화하도록 신규 부품의 생산량이 결정될 것이다. 이상의 의사결정 과정을 정리하면 다음과 같다.

- (1) 각 부품의 수요  $D_i$ 는 주어졌지만 재생품의 공급량  $S_j$ 는 불확실한 상황에서 신규 생산량  $M_i$ 를 결정한다.  $M_i$ 에 의해 재제조를 통해 충족해야 할 수요의 양  $Q_i (= D_i - M_i)$  또한 결정된다. 부품  $i$ 를 신규 생산하기 위한 단위 비용을  $r_i$ 라 했을 때, 생산 비용  $r^T M$ 이 발생한다( $r$ 와  $M$ 은 각각  $r_i$ 와  $M_i$ 로 이루어진 벡터).
- (2) 재생품의 획득 및 품질 검사가 완료되어 재생품  $j$ 의 공급량  $S_j$ 가 확정된다.
- (3) 주어진  $S_j$ 를 가지고 재제조 비용과 부족비용을 최소화하기 위한 각 재생품의  $j$ 의 분해 및 재제조 수량  $x_j$ 를 결정한다.

위의 과정에서 두 번의 의사결정이 이루어지게 되는데 첫 번째는 신규 생산량  $M_i$ , 즉 재제조 총당량  $Q$ 를 결정하는 것이고, 두 번째는 재생품의 분해 및 재제조 수량  $x_j$ 를 결정하는 것이다. 이 두 가지 의사결정은 이전 연구[4, 9, 30]에서 활용된 다차원 신문판매 모형을 공급 불확실성에 대해 변형하여 모형화할 수 있다. 먼저 첫 번째 의사결정은

총 기대 비용을 최소화하는  $M_i$ 을 찾는 것이다. 신규 생산량의 벡터  $M$ 에 대해 총 기대비용  $TC(M)$ 은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$TC(M) = r^T M + E_S[C(D - M, S)] = r^T D + V(Q). \quad (1)$$

$$\text{단, } V(Q) = -r^T Q + E_S[C(Q, S)],$$

$$0 \leq Q_i \leq D_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

이 식에서 확정적인 수요  $D$ 는 생산량 및 재제조 수량 결정에 영향을 미치지 않으므로 총비용을 최소화하기 위해서는  $V(Q)$ 를 최소화하는  $Q$ 를 찾아야 한다.  $C(Q, S)$ 는 재제조를 통해 충족해야 할 수요의 양과 재생품의 공급량  $S$ 가 주어질 때 발생하는 재제조 비용 및 부족 비용의 합으로, 재제조 수량에 대한 두 번째 의사결정을 최적으로 내렸다고 했을 때 얻어지는 비용이다.  $S$ 가 확률변수이므로 위험중립적인 생산자는 비용에 대한 기대값(expected value)을 고려하여 최적 생산량을 결정하게 된다.

최소 재제조 비용  $C(Q, S)$ 를 구하는 두 번째 의사결정은 LP로 모형화한다. 재생품 1이  $x_1$ 만큼 분해되면 부품 1과 부품 3이  $x_1$ 개씩 생산되고, 재생품 2가  $x_2$ 만큼 분해되면 부품 2와 부품 3이  $x_2$ 개씩 생산된다. 총 재제조 비용은 분해 및 재제조 비용과 부족비용의 합으로 계산되고, 재제조 수량은 재생품 공급량을 초과할 수 없으므로 이때의 의사결정은 식 (2)~식 (8)과 같이 모형화 할 수 있다.

$$\min \quad \sum_{j=1}^2 c_j x_j + \sum_{i=1}^3 p_i y_i \quad (2)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + y_1 \geq Q_1 \quad (3)$$

$$x_2 + y_2 \geq Q_2 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + y_3 \geq Q_3 \quad (5)$$

$$x_1 \leq S_1 \quad (6)$$

$$x_2 \leq S_2 \quad (7)$$

$$x_j, y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

재생품  $j$ 의 분해 및 재제조하면 단위 비용  $c_j$ 가 발생하고, 계획량  $Q_j$ 에 비해 부품  $j$ 의 재제조 수량이 1개 부족하면  $p_j$ 만큼의 부족비용이 발생한다.  $y_j$

는 부품  $i$ 의 부족량을 나타낸다. 앞서 가정한 바와 같이 부품  $j$ 에 대해  $r_i < p_j$ 이고, 모든  $i$ 와  $j$ 에 대해  $\max\{c_j\} < \min\{p_i\}$ 이 성립한다. 이 경우 식 (3)~식 (5)에 의해 계획된 재제조 수량을 최대한 공급할 수 있도록 재생품의 분해 및 재제조가 이루어진다. 식 (6)과 식 (7)은 재생품 공급량의 제약을 나타낸다. 또한  $q_1 \leq q_2$ 임을 가정하여 두 재생품이 모두 충분한 경우 부품 1을 우선적으로 분해하는 것이 최적 이 되도록 한다. 이 선형계획법 문제의 최적해를  $x^*, y^*$ 라 할 때 이 값들은  $Q$ 와  $S$ 에 따라 달라지므로  $C(Q, S)$ 는 식 (9)와 같이 정의될 수 있다.

$$C(Q, S) = c^T x^*(Q, S) + p^T y^*(Q, S). \quad (9)$$

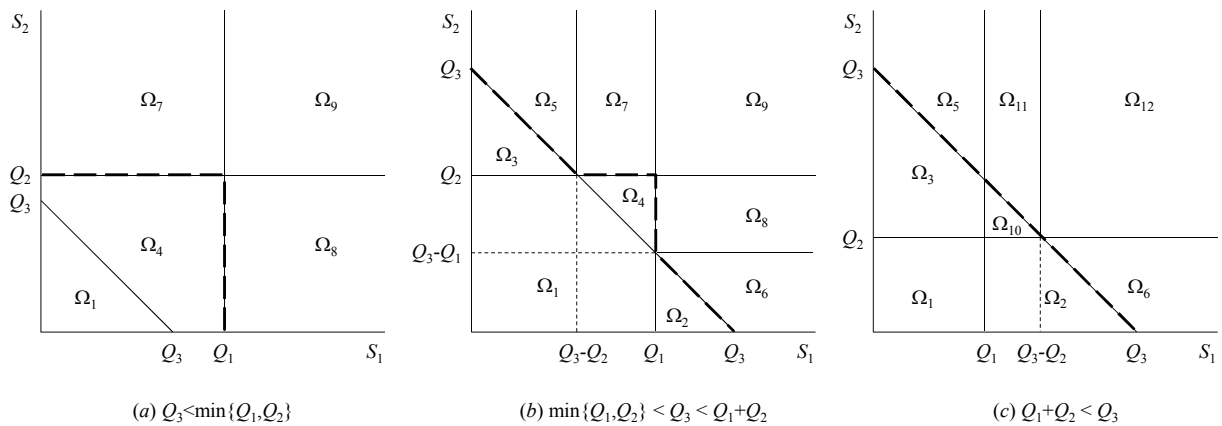
따라서 의사결정의 순서와 역으로 최적 생산량의 결정은 주어진  $Q$ 에 대해 선형계획법의 최적해를 구한 후에 최적  $Q^*$  및  $M^*$ 를 결정하는 순서로 전개된다. 자세한 풀이과정은 제 4장에서 다루도록 한다.

#### 4. 최적 생산량 결정

먼저 주어진  $Q$ 와  $S$ 에서 식 (2)~식 (8) LP 문제의 최적해  $x^*, y^*$ 를 구하도록 하자. 이 LP 문제는  $Q$ 와  $S$ 가 어떠한 값을 가지느냐에 따라 서로 다른 기저해(basic solution)를 가지게 된다. 각각의  $S_j$ 가 모든  $Q_i$  생산량을 만족할 만큼 충분하다면 필요한 수량

만큼의 재생품 1과 2를 분해하여 재제조하고 부족분이 0되지만, 둘 중 하나라도 공급이 부족한 경우에는 보유한 모든 재생품을 분해하여 부족분을 최소화해야 한다. 본 논문에서는 이처럼 서로 다른 기저해를 가지는  $Q$ 와  $S$ 의 조합을 [그림 2]와 같이 확률변수  $S_1$ 과  $S_2$ 의 영역으로 구분하여 각 영역에서의 최적해를 탐색한다. 불확실성이 있는 파라미터의 가능 영역을 구분하여 최적해를 탐색하는 접근법은 Fine and Freund[4], Doğru et al.[3], Harrison and Van Mieghem[9], Van Mieghem[30] 등의 기존 연구에서도 널리 활용되었다.

최적해의 영역 구분은  $Q_1, Q_2, Q_3$ 의 상대적 크기에 따라 달라진다. 조건  $\min\{Q_1, Q_2\} < Q_3 < Q_1 + Q_2$ 을 만족하는 경우에 [그림 2](b)와 같이 가장 많은 수의 영역 구분이 만들어지게 된다.  $Q_3 < \min\{Q_1, Q_2\}$ 인 경우에는 [그림 2](a)와 같이 영역  $\Omega_{2,3,5,6}$ 에  $S$ 가 위치할 수 없게 되고,  $Q_1 + Q_2 < Q_3$ 인 경우 [그림 2](c)와 같이 새로운 영역  $\Omega_{10,11,12}$ 가 생성되고, 영역  $\Omega_{4,7,8}$ 이 사라진다. 각 경우에서 굵은 점선 안쪽 영역  $\Omega_{1,2,3,4,10}$ 에  $S$ 가 위치하게 되면 부품 1, 2, 3중 최소한 1개의 부품은 계획된 생산량만큼 재제조할 수 없기 때문에 주어진 재생품을 모두 분해하는 것, 즉  $x_1^* = S_1, x_2^* = S_2$ 이 최적이 된다. 굵은 선 바깥쪽에서는 두 부품 중 최소한 하나는 충분히 생산할 수 있게 되므로 생산 계획량에 맞추어 부품을 생산하게 된다.  $\Omega_5$ 나  $\Omega_7$



[그림 2] 선형계획법의 최적해가 달라지는  $(S_1, S_2) \in \mathbb{R}^2$ 의 영역. 단,  $Q_1, Q_2, Q_3$ 의 상대적 크기에 따라 영역 구분이 달라진다.

에서는 위치하게 되면 부품 2과 3은 충분하지만 부품 1이 부족하므로  $x_1^* = S_1$ 이 되고, 영역  $\Omega_5$ 에서는  $x_2^* = Q_3 - S_1$ , 영역  $\Omega_7$ 에서는  $x_2^* = Q_2$ 가 된다. 반대로 영역  $\Omega_6$ 이나  $\Omega_8$ 에서는 부품 1과 부품 3은 충분하지만 부품 2가 부족하므로  $x_2^* = S_2$ 가 되고, 영역  $\Omega_6$ 에서는  $x_1^* = Q_3 - S_2$ , 영역  $\Omega_8$ 에서는  $x_1^* = Q_1$ 가 된다. 마지막으로 영역  $\Omega_9, \Omega_{11}, \Omega_{12}$ 에서는 모든 재생품이 충분하다. 영역  $\Omega_9$ 는  $Q_3 < Q_1 + Q_2$ 일 때 존재하므로 ( $x_1^* = Q_1, x_2^* = Q_2$ )가 최적해가 되고, 영역  $\Omega_{11,12}$ 는  $Q_1 + Q_2 < Q_3$ 일 때 존재하는데  $c_1 \leq c_2$ 이므로 영역  $\Omega_{11}$ 에서는 ( $x_1^* = S_1, x_2^* = Q_3 - S_1$ ),  $\Omega_{12}$ 에서는 ( $x_1^* = Q_3 - Q_2, x_2^* = Q_2$ )가 최적해가 된다. 각 영역에서 부품의 부족분  $y^*$ 의 값은  $x^*$ 만큼 재생품을 분해 및 재제조하고 나서 각 부품이 생산 계획량에 미치지 못한 만큼이 된다. 이와 같은 최적해를 가지고 심플렉스(simplex) 알고리즘을 적용하면 각 영역에서의 쌍대해(dual solution) 역시 구할 수 있다. 이를 [보조정리 1]로 정리하였다.

**[보조정리 1]** 재생품 공급량  $S$ 의 가능영역을 [그림 2]와 같이 나누었을 때,  $S$ 의 각 영역에서 식 (4)~식 (6)에 해당하는 최적 쌍대해  $\lambda$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (p_1, p_2, p_3)^T, S \in \Omega_1; \lambda_2 = (0, p_2, p_3)^T, S \in \Omega_2; \\ \lambda_3 &= (p_1, 0, p_3)^T, S \in \Omega_3; \lambda_4 = (p_1, p_2, 0)^T, S \in \Omega_4; \\ \lambda_5 &= (p_1, 0, c_2)^T, S \in \Omega_5; \lambda_6 = (0, p_2, c_1)^T, S \in \Omega_6; \quad (10) \\ \lambda_7 &= (p_1, c_2, 0)^T, S \in \Omega_7; \lambda_8 = (c_1, p_2, 0)^T, S \in \Omega_8; \\ \lambda_9 &= (c_1, c_2, 0)^T, S \in \Omega_9; \lambda_{10} = (0, 0, p_3)^T, S \in \Omega_{10}; \\ \lambda_{11} &= (0, 0, c_2)^T, S \in \Omega_{11}; \lambda_{12} = (0, c_2 - c_1, c_1)^T, S \in \Omega_{12}. \end{aligned}$$

다음으로  $V(Q)$  전체를 최소화하는 최적  $Q^*$ 의 조건을 구한다.  $V(Q)$ 가 볼록함수(convex function)라면 이를 최소화하는  $Q^*$ 는 식 (1)에 대한 쿤터커 조건(Kuhn-Tucker condition)을 이용해 찾을 수 있다. 최소화 LP 문제의 최적해는 우변상수 값에 대해 볼록함수(convex function)이므로[22],  $C(Q, S)$ 는 우변상수인  $Q$ 에 대한 볼록함수(convex func-

tion)이다.  $V(Q)$ 는  $-r^T Q$ 와  $C(Q, S)$ 의 합으로 이루어져 있으므로  $V(Q)$ 도 볼록함수가 되어 쿤터커 조건이 최적  $Q^*$ 에 대한 필요충분조건이 된다.

쿤터커 조건을 활용하기 위해서는  $C(Q, S)$ 의  $Q$ 에 대한 기울기(gradient)를 알아야 한다. 그런데 Harrison and Van Mieghem[9]은 'Proposition 2'에서 LP문제의 우변상수가  $b$ 로 주어질 때 최적값  $\pi(b)$ 와 쌍대해  $\theta(b)$ 에 대해  $\nabla E\pi(b) = E\theta(\cdot, b)$ 가 성립함을 보였다. 이는  $\pi(b)$ 의 기울기가  $\theta(b)$ 와 같고,  $b$ 가 확률변수일 경우 기대값과 기울기 함수의 치환이 가능하기 때문이다. 이를 활용하면 식 (11)과 같이  $\nabla E_S[C(Q, S)]$ 를 [보조정리 1]의 쌍대해  $\lambda$ 에 대한 기대값으로 치환할 수 있다.

$$\nabla E_S[C(Q, S)] = E_S \lambda(Q, S) \quad (11)$$

따라서  $Q^*$ 의 필요충분조건은 [정리 1]과 같이 유도된다.

**[정리 1]** 다음의 조건들을 만족하는 양의  $\mu_i$  값들이 존재한다면  $Q_i^* \leq D_i$ 인  $Q^*$ 는  $V(Q)$ 를 최소화하는 재제조 계획량의 벡터이다.

$$p_1(P\{S \in \Omega_{1,3,4,5,7}(Q^*)\}) + c_1(P\{S \in \Omega_{8,9}(Q^*)\}) = r_1 - \mu_1, \quad (12)$$

$$p_2(P\{S \in \Omega_{1,3,4,6,8}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{7,9,12}(Q^*)\}) - c_1(P\{S \in \Omega_{12}(Q^*)\}) = r_2 - \mu_2, \quad (13)$$

$$p_3(P\{S \in \Omega_{1,2,3,10}(Q^*)\}) + c_1(P\{S \in \Omega_{6,12}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{5,11}(Q^*)\}) = r_3 - \mu_3, \quad (14)$$

$$\mu_i(D_i - Q_i^*) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (15)$$

최적해 조건은 재생품 공급량의 불확실성으로 인해 최적 재제조 계획량은 다차원 신문판매 모형의 해와 유사한 형태를 띠게 된다. 단, 공통 부품의 존재로 인해 각 부품의 재제조 수량이 서로 종속되어 결정되게 된다. 이에 따라 한 부품의 재제조 계획량을 결정하는 데 다른 부품의 신규 생산 비용이나 부족 비용, 재제조 비용 등이 영향을 미친다. 이러



한 민감도는 제 5장에서 보다 자세히 살펴보도록 한다. 또한 수요량이 적은 경우에는 모든 수요를 재 제조를 통해 충당하는 것이 최적일 수도 있음을 확인할 수 있다.

한편 [따름정리 1]은 수요가 충분히 많다는 가정 하에서 부품 간 비용의 차이가 크다면 최적 재제조 계획량이 독립적인 신문판매 모형의 형태로 결정되는 경우도 있음을 보여준다. 고유 부품 1, 2가 공통 부품 3에 비해 신규 생산 비용이 확연히 높고 부족 비용 및 재제조 비용이 낮은 경우, 혹은 공통 부품의 신규 생산 비용이 높고 부족 비용 및 재제조 비용이 낮으며 재제품 간 재제조 비용이 같은 경우( $c_1 = c_2$ )에 각 부품의 신규 생산량을 독립적으로 결정할 수 있다. 하지만 부품 간 생산 비용과 부족 비용이 비슷한 경우에는 [정리 1]에 따라 각 부품의 재 제조 계획량을 결정하여야 한다.

**[따름정리 1]** (a) 다음을 만족하는  $Q_1^\alpha, Q_2^\alpha, Q_3^\alpha$ 가  $Q_i^\alpha \leq D_i, i=1, 2, 3$ 이고  $Q_3^\alpha < \min\{Q_1^\alpha, Q_2^\alpha\}$ 라면  $Q_1^\alpha, Q_2^\alpha, Q_3^\alpha$ 는  $V(Q)$ 를 최소화하는 최적 생산 계획량이다

$$P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\} = \frac{r_1 - c_1}{p_1 - c_1} \quad (16)$$

$$P\{S_2 \leq Q_2^\alpha\} = \frac{r_2 - c_2}{p_2 - c_2} \quad (17)$$

$$P\{S_1 + S_2 \leq Q_3^\alpha\} = \frac{r_3}{p_3}. \quad (18)$$

(b) 다음을 만족하는  $Q_1^\beta, Q_2^\beta, Q_3^\beta$ 가  $Q_i^\beta \leq D_i, i=1, 2, 3$ 이고  $Q_1^\beta + Q_2^\beta < Q_3^\beta$ 라면  $Q_1^\beta, Q_2^\beta, Q_3^\beta$ 는  $V(Q)$ 를 최소화하는 최적 생산 계획량이다

$$P\{S_1 \leq Q_1^\beta\} = \frac{r_1}{p_1} \quad (19)$$

$$p_2 (P\{S_2 \leq Q_2^\beta\}) + (c_2 - c_1) (P\{S_1 > Q_3^\beta - Q_2^\beta, S_2 > Q_2^\beta\}) = r_2, \quad (20)$$

$$p_3 (P\{S_1 + S_2 \leq Q_3^\beta\}) + c_1 (P\{S_1 + S_2 > Q_3^\beta\}) + (c_2 - c_1) (P\{S_1 + S_2 > Q_3^\beta, S_1 \leq Q_3^\beta - Q_2^\beta\}) = r_3. \quad (21)$$

## 5. 재제조 환경에 대한 민감도 분석

위 4장에서 구한 최적해는 재제조 환경 변수, 즉 신규 생산 비용  $r$ , 분해 및 재제조 비용  $c$ , 미달부품의 부족비용  $p$ 에 따라 달라진다. 각각의 환경변수에 대한 최적 재제조 계획량(생산 계획량)의 민감도를 분석함으로써 재제조 생산계획에 있어서의 시사점을 얻을 수 있다. 단,  $Q_i^* = D_i$ 인 경우에는 비용 변화에 영향을 받지 않고,  $Q_3^* < \min\{Q_1^*, Q_2^*\}$ 나  $Q_1^* + Q_2^* < Q_3^*$ 인 경우에는 [따름정리 1]로부터 자명하게 민감도를 알 수 있다. 따라서 본 장에서는 수요  $D$ 가 충분히 커  $Q_i^* < D_i$ 가 되고  $\min\{Q_1^*, Q_2^*\} < Q_3^* < Q_1^* + Q_2^*$ 인 경우의 민감도에 대해서만 논의하도록 한다.

먼저 부품의 신규 생산 비용  $r$ 에 대한 최소 비용  $TC^*$ 와 최적 재제조량  $Q^*$ 의 민감도는 [정리 2]와 같이 나타낼 수 있다.

**[정리 2]** 신규 생산 비용  $r$ 에 대한 재제조 계획량  $Q^*$ 와 신규 생산량  $M^*$ 의 민감도는 다음과 같다.

$$-(\nabla_r M^*)^T \quad (22)$$

$$= (\nabla_r Q^*)^T = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_5 & a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_1 + a_3 + a_6 & a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{bmatrix}.$$

$a_1, \dots, a_6$ 은 모두 양수이다.

생산 비용의 증가는 재製조를 통한 이득을 증가시키므로 [정리 2]에서 보는 바와 같이 최적 재제조량은 많아지고 신규 생산량은 줄어들게 된다. 여기서 흥미로운 결과는 부품 하나의 생산 비용이 높아지면 가격이 상승한 부품의 재제조 계획량뿐만 아니라 다른 부품들의 재제조 계획량까지도 커진다는 것이다.  $r_1$ 에 대한 민감도는  $a_1 + a_2 + a_5 > a_1 + a_2 > a_1$  순이고,  $r_2$ 에 대한 민감도는  $a_1 + a_3 + a_6 > a_1 + a_3 > a_1$  순이므로 신규 생산 비용이 증가할 때 재제조 계획량은 해당 부품, 같은 재제품에서 추출되는 부품, 다른 재제품에서 추출되는 부품 순으로 증가하는 것을 알 수 있다.

이처럼 동시적인 재제조량 증가는 재제조 과정에서 두 가지 이상의 부품이 한번에 생산되는 재제조 프로세스의 특징 때문으로 해석할 수 있다. 서로 결합되어 있는 부품 1과 부품 3 혹은 부품 2와 부품 3은 재생품 분해과정을 거쳐 함께 추출되기 때문에 둘 중 한 부품의 생산 비용이 올라 재제조 계획량을 증가시켜야 하는 상황이라면 결합된 다른 부품의 재제조량도 함께 증가시키므로써 일종의 규모의 경제(economy of scale) 효과를 누릴 수 있다. 이러한 관계가 서로 결합되지 않은 부품 1과 부품 2사이에도 존재하는데, 이는 부품 1의 가격 상승이 공통 부품 3의 재제조 수량을 증가시키면 재생품 2를 부품 3의 획득을 위해 분해하고 부품 2를 남기게 되는 확률([그림 2](b)영역  $\Omega_5$ 에 해당)이 높아지기 때문으로 해석할 수 있다. 이 경우 부품 2가 과도하게 남게 되므로 부품 2의 재제조 계획량도 함께 증가시키는 것이 비용을 최소화하게 되는 것이다. 이와 같이 재제조 수량이 함께 커지는 관계는 분해 및 재제조에 소요되는 고정비용이 증가할수록 강해질 것으로 예상할 수 있는데, 실제로 식 (22) 민감도 행렬의 요소들은 증명에 명시된 바와 같이 분해 비용  $c_1$ 과  $c_2$ 의 값에 비례한다.

다음으로 분해 및 재제조 비용  $c$  및 부족비용  $p$ 에 대한  $TC^*$ 와  $Q^*$ 의 민감도를 살펴보자.

**[정리 3]** 분해 및 재제조 비용  $c$ 와 부족비용  $p$ 의 변화량에 대한 재제조 계획량  $Q^*$ 와 신규 생산량  $M^*$ 의 민감도는 다음과 같다.

$$-(\nabla_c M^*)^T = (\nabla_c Q^*)^T = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2)P_{6,8,9} - a_3P_{8,9} \\ -a_1P_{6,8,9} - a_4P_6 \\ -(a_1 + a_2)P_{6,8,9} - (a_3 + a_4)P_6 \\ -a_1P_{5,7,9} - a_2P_5 \\ -(a_1 + a_3)P_{5,7,9} - a_6P_{7,9} \\ -(a_1 + a_3)P_{5,7,9} - (a_2 + a_4)P_5 \end{bmatrix}, (23)$$

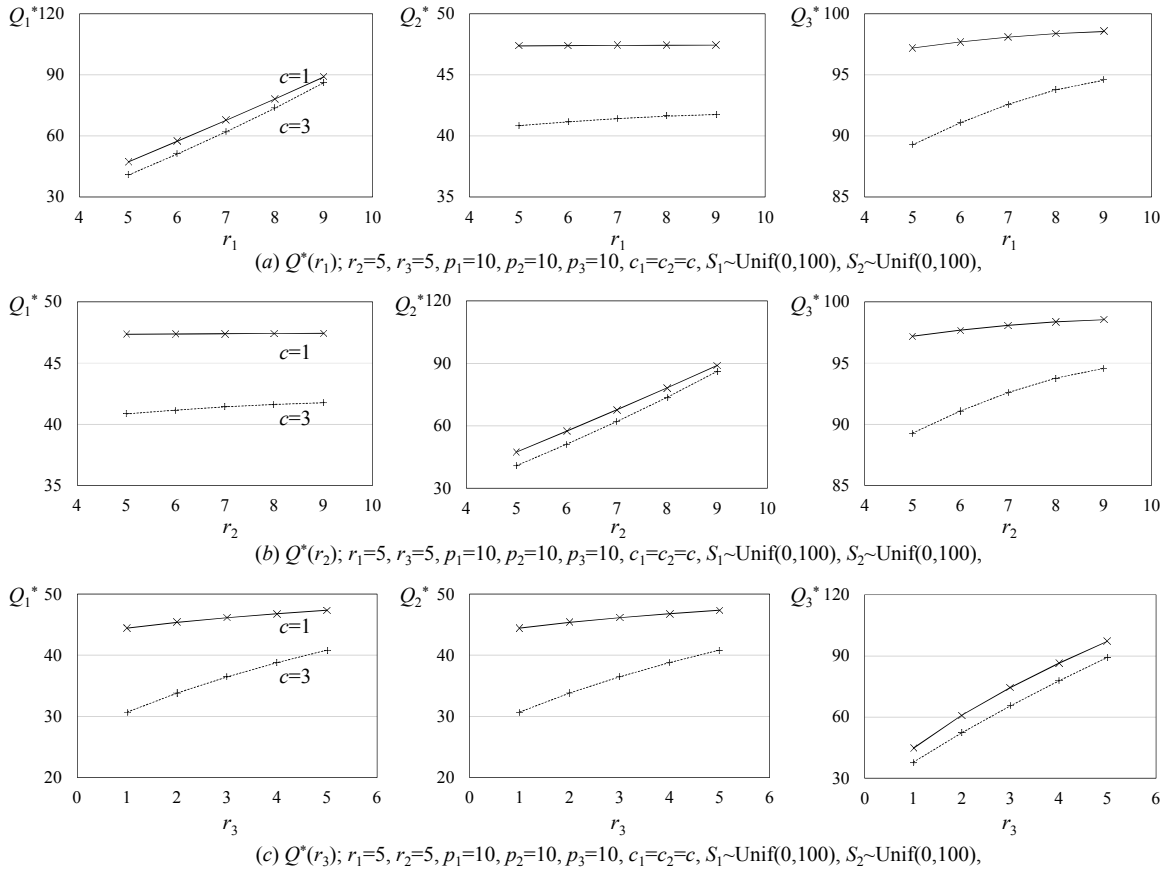
$$-(\nabla_p M^*)^T = (\nabla_p Q^*)^T = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2 + a_5)F_1(Q_1^*) \\ -a_1F_1(Q_1^*) \\ -(a_1 + a_2)F_1(Q_1^*) \\ -a_1F_2(Q_2^*) \\ -(a_1 + a_3 + a_6)F_2(Q_2^*) \\ -(a_1 + a_3)F_2(Q_2^*) \\ -(a_1 + a_2)F_{12}(Q_3^*) \\ -(a_1 + a_3)F_{12}(Q_3^*) \\ -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)F_{12}(Q_3^*) \end{bmatrix}. (24)$$

$$\text{단, } P_k = P\{S \in \Omega_k(Q^*)\}, F_j(x) = P\{S_j \leq x\}, \\ F_{12}(x) = P\{S_1 + S_2 \leq x\}.$$

[정리 3]과 같이 분해 및 재제조 비용과 부족비용이 늘어나면 최적 재제조량은 줄어들고 신규 생산량은 늘어난다. [정리 2]에서 한 부품의 생산 비용 증가가 다른 모든 부품의 재제조 수량에 영향을 준 것처럼, 분해 비용과 부족비용의 증가는 모든 부품의 재제조 계획량을 감소시키는 결과를 가져온다. 신규 생산 비용의 민감도와 같은 원리로 분해 비용 및 부족 비용 증가로 인해 한 고유 부품의 재제조 수량이 감소하면 이와 결합된 공통 부품의 재제조량이 감소하고, 이것이 다시 다른 고유 부품이 남게 될 확률을 감소시키기 때문에 모든 부품의 재제조 계획량이 감소한다. 식 (24)에서 부족 비용에 대한 민감도는 식 (22)의 신규 생산 비용에 대한 민감도에 재생품 공급이 재제조 계획량에 비해 부족할 확률을 곱한 형태로 주어지는 것을 볼 수 있다. 따라서 생산 비용이 증가하는 것이 부족 비용이 감소하는 것보다 재제조 수량을 더 크게 증가시킨다.

재제조 계획량  $Q$ 에 대한 민감도는 음과 양의 방향만 바꾸면 생산 계획량  $M$ 에 논의로 정확히 대치된다. 즉, 신규 생산 부품의 수량은 생산 비용이 증가할 때 식 (23)에 나타난 민감도로 감소하게 되고, 재제조 비용이 증가할 때는 식 (23)의 민감도로, 부족 비용이 증가할 때는 식 (24)의 민감도로 증가하게 된다.

이러한 분석 결과가 수치적으로도 성립한다는 것을 보이기 위해 [그림 3]과 같이  $r_i$ 값의 변화에 따른 최적 재제조량  $Q_i^*$ 의 변화를 추적해 보았다. 수치 분석에 활용된 각 파라미터의 값들은 [그림 3]에 제시된 것과 같고, 재생품  $S_1$ 과  $S_2$ 는 0과 100사이의 일양(uniform) 분포를 따른다고 가정하였다. 조건  $\min\{Q_1^*, Q_2^*\} < Q_3^* < Q_1^* + Q_2^*$ 을 만족하는 경우에  $Q_i^*$  값들을 [정리 1]을 이용해 구해본 결과 민감도 분석의 결과와 같이 어느 한  $r_i$ 의 증가는 모든  $Q_i^*$ 를 증가시키는 것을 볼 수 있다. 이러한 전과 효과는 같은 재생품에 속한 부품에 대해 더 강하게 작용한다.



[그림 3] 신규 생산 비용  $r_i$ 의 변화에 따른 최적 재제조 계획량  $Q_i^*$ 의 변화

분해 및 재제조비용  $c$ 에 대해서는 이 값이 클 때  $Q_i^*$ 가 작아지지만  $r_i$ 에 대한 민감도는 오히려 커지는 것 또한 확인할 수 있다. 특히 직접적으로 변화하는 부품  $i$ 이 아닌 다른 부품의 최적 생산량의 민감도가  $c$ 의 증가에 크게 증가하는 것을 볼 수 있다. 부족 비용  $p$ 에 대해서는 방향만 다를 뿐  $r_i$ 와 같은 결과를 가져오므로 이에 대한 수치적인 결과는 생략하였다.

이상의 결과를 종합하여 재제조 관련 비용의 변화와 재제조 수량의 관계에 대해 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다.

- (1) 한 부품의 신규 생산 비용이 증가하면 해당 부품 뿐만 아니라 공통 부품으로 연결된 다른 부품들의 재제조 계획량도 함께 증가시켜야 한다. 즉, 한 부품에 대해 원가 인상 요인이 생기면

전체적으로 재제조를 통한 부품 공급의 규모를 늘려야 한다. 신규 생산 비용의 증가는 재제조 의 이득을 증가시키므로 해당 부품의 재제조를 늘리는 것은 당연한 반응이지만, 이로 다른 부품의 재제조 수량까지 늘려야 한다는 것은 본 연구의 분석 결과로서 얻을 수 있는 특징적인 결과라 하겠다.

- (2) 한 부품의 부족 비용이 감소하면 해당 부품을 비롯해 공통 부품으로 연결된 다른 부품들의 재제조 계획량도 함께 증가시킬 수 있다. 부품의 부족 비용은 최적 재제조 수량에 신규 생산 비용과 반대의 영향을 가지므로 이 비용이 감소할 때 재제조가 확대되며 이 영향도 공통 부품으로 연결된 모든 부품에 전파된다. 영향의 전파는 특히 같은 재생품에 포함된 부품에 대해 더 크게 작용

하므로 고유 부품 보다는 공통 부품의 부족 비용을 줄였을 때 전체적인 재제조 규모를 더 크게 증가시킬 수 있다. 부족 비용 절감을 위한 방안으로는 대체품의 마련, 긴급 구매를 위한 공급자의 선정 등이 있을 수 있다.

- (3) 신규 생산 비용이나 부족 비용의 변화로 인한 최적 재제조 수량의 민감도는 재생품의 재제조 비용에 비례한다. 이러한 민감도 변화는 직접적으로 생산 비용이나 부족 비용이 변화하는 부품보다 공통부품으로 연결된 다른 부품에서 특히 두드러지는 것을 확인할 수 있었다. 즉, 상대적으로 재제조 비용이 높은 재생품일수록 그 안에 포함된 부품들 중 하나의 생산 비용이나 부족 비용만 변화해도 포함된 모든 부품들의 재제조량이 크게 변화한다.

## 6. 결론 및 추후 연구

본 논문에서는 사용 후 제품을 활용하여 재제조 부품을 생산하고 이를 판매 혹은 신규 부품의 대체품으로 활용하는 기업에서 발생하는 재제조 부품의 생산계획 문제를 다루었다. 재제조 대상이 되는 재생품은 사용 후 제품의 불확실한 회수량 및 품질로 인해 공급량에 제약이 있기 때문에 이를 감안하여 적절한 수준의 신규 생산량 및 재제조량을 계획하여야 한다. 또한 서로 다른 재생품에 공통 부품이 존재하고 이를 DTO 방식으로 생산하는 경우에는 각 부품의 생산 계획량이 서로 연관되기 때문에 생산계획의 수립이 보다 복잡해지게 된다. 사용 후 제품을 그대로 재제조하여 다시 판매할 수 있는 제품은 제한적이기 때문에 여러 종류의 제품에서 필요한 부품만을 생산해 내는 DTO 방식의 재제조는 보다 현실적인 재제조 방식이라 할 수 있다.

본 논문의 의의는 이전 연구에서 단순화된 제품 구조에서 근사적으로만 제시되었던 DTO 환경에서의 재제조 계획을 공통 부품이 있는 일반적인 제품 구조에서 최적해로서 제시하였다는 점이다. 또한

분석적으로 최적해를 유도했기 때문에 각 부품의 가격, 부족비용, 분해 및 재제조비용 등의 재제조 환경 변수가 변화할 때 해당 부품의 재제조량 및 신규 생산량의 변화도 알 수 있었다. 원가 상승 등의 영향으로 부품의 생산 비용이 오르거나 재제조 비용 및 부족 비용이 감소할 때 기업은 신규 생산량을 줄이고 재제조량을 증가시키게 되는데, 본 논문의 분석 결과는 이때 해당 부품뿐 아니라 공통 부품으로 연관된 다른 부품들의 생산량 및 재제조량도 함께 조정해야 한다는 것을 알려준다. 이러한 부품 간의 민감도는 같은 재생품에 포함된 부품들 사이에서 더 크게 나타나고 분해 및 재제조 비용이 높을 때 강해진다는 사실 또한 알 수 있었다.

연구의 한계점으로서 본 연구에서는 2개의 재생품과 3개의 부품이 존재하는 형태의 DTO 시스템을 가정하고 있는데, 실제 재제조 현장에서는 3개 이상의 재생품과 다양한 단계의 공통 부품이 존재하는 복잡한 형태의 DTO 시스템도 존재할 수 있을 것이다. 이러한 복잡한 시스템을 분석하기 위해서는 추가적인 연구가 필요하다. 또한 본 논문은 한 재생품을 분해하면 항상 2개의 재제조 부품을 생산할 수 있다고 가정하지만 부품의 품질이 서로 달라 어느 한 부품만 재제조가 가능한 경우도 있을 수 있으므로 이를 반영하기 위해 공급 불확실성을 재생품 단위가 아닌 부품단위로 처리하는 모형을 개발하는 것 또한 추후 연구 과제이다.

## 참 고 문 헌

- [1] 박상욱, “공급업자의 공급불확실성이 재고관리 비용에 미치는 효과에 관한 연구”, 『한국경영과학회지』, 제26권, 제3호(2001), pp.105-117.
- [2] 박찬우, 이효성, “주문-조립시스템의 설계 및 성능평가”, 『한국경영과학회지』, 제27권, 제4호(2002), pp.41-65.
- [3] Doğru, M.K., M.I. Reiman, and Q. Wang, “A stochastic programming based inventory policy for assemble-to-order systems with applica-

- tion to the w model," *Operations Research*, Vol.58, No.4(2010), pp.849-864.
- [4] Fine, C.H. and R.M. Freund, "Optimal investment in product-flexible manufacturing capacity," *Management Science*, Vol.36, No.4(1990), pp.449-466.
- [5] Fleischmann, M, R. Kuik, and R. Dekker, "Controlling inventories with stochastic item returns : A basic model," *European Journal of Operational Research*, Vol.138, No.1(2002), pp.63-75.
- [6] Golany, B., J. Yang, and G. Yu, "Economic lot-sizing with remanufacturing options," *IIE Transactions*, Vol.33, No.11(2001), pp.995-1003.
- [7] Guide Jr., V.D.R, "Production planning and control for remanufacturing : Industry practice and research needs," *Journal of Operations Management*, Vol.18, No.4(2000), pp.467-483.
- [8] Guide Jr., V.D.R. and L.N. Wassenhove, "Managing product returns for remanufacturing," *Production and Operations Management*, Vol.10, No.2(2001), pp.142-155.
- [9] Harrison, J.M. and J.A. Van Mieghem, "Multi-resource investment strategies : Operational hedging under demand uncertainty," *European Journal of Operational Research*, Vol.113, No.1 (1999), pp.17-29.
- [10] Henig, M. and Y. Gerchak, "The structure of periodic review policies in the presence of random yield," *Operations Research*, Vol.38, No.4(1990), pp.634-643.
- [11] Inderfurth, K., "Simple optimal replenishment and disposal policies for a product recovery system with leadtimes," *OR Spectrum*, Vol.19, No.2(1997), pp.111-122.
- [12] Inderfurth, K. and I.M. Langella, "Heuristics for solving disassemble-to-order problems with stochastic yields," *OR Spectrum*, Vol.28, No.1 (2006), pp.73-99.
- [13] Inderfurth, K. and E. Van Der Laan, "Leadtime effects and policy improvement for stochastic inventory control with remanufacturing," *International Journal of Production Economics*, Vol. 71, No.1(2001), pp.381-390.
- [14] Kang, C.M. and Y.S. Hong, "Dynamic disassembly planning for remanufacturing of multiple types of products," *International Journal of Production Research*, Vol.50, No.22(2012), pp.6236-6248.
- [15] Kiesmüller, G.P., "A new approach for controlling a hybrid stochastic manufacturing/remanufacturing system with inventories and different lead-times," *European Journal of Operational Research*, Vol.147, No.1(2003), pp.62-71.
- [16] Kim, H.J. and P. Xirouchakis, "Capacitated disassembly scheduling with random demand," *International Journal of Production Research*, Vol.48, No.23(2010), pp.7177-7194.
- [17] Kim, K., I. Song, J. Kim, and B. Jeong, "Supply planning model for remanufacturing system in reverse logistics environment," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.51, No.2(2006), pp. 279-287.
- [18] Kongar, E. and S.M. Gupta, "A multi-criteria decision making approach for disassembly-to-order systems," *Journal of Electronics Manufacturing*, Vol.11, No.2(2002), pp.171-183.
- [19] Kwak, M., S. Behdad, Y. Zhao, H. Kim, and D. Thurston, "E-waste stream analysis and design implications," *Journal of Mechanical Design*, Vol.133, No.10(2011), pp.1010031-8
- [20] Langella, I.M., "Heuristics for demand-driven disassembly planning," *Computers and Operations Research*, Vol.34, No.2(2007), pp.552-577.
- [21] Lund, R., "Remanufacturing," *Technology Review*, Vol.87, No.2(1984), pp.18-23.
- [22] Madansky, A., "Inequalities for stochastic linear

- programming problems," *Management Science*, Vol.6, No.2(1960), pp.197-204.
- [23] Mangun, D. and D.L. Thurston, "Incorporating component reuse, remanufacture, and recycle into product portfolio design," *IEEE Transactions on Engineering Management*, Vol.49, No. 4(2002), pp.479-490.
- [24] Schulz, T. and I. Ferretti, "On the alignment of lot sizing decisions in a remanufacturing system in the presence of random yield," *Journal of Remanufacturing*, Vol.1, No.1(2011), pp. 1-11.
- [25] Schulz, T. and I. Langella, "Examining the performance of heuristics for the disassemble-to-order problem under rolling planning using actual product structures," *Available at SSRN 1341108*, (2009).
- [26] Taleb, K.N. and S.M. Gupta, "Disassembly of multiple product structures," *Computers and Industrial Engineering*, Vol.32, No.4(1997), pp. 949-961.
- [27] Teunter, R.H., Z.P. Bayindir, and W. Van Den Heuvel, "Dynamic lot sizing with product returns and remanufacturing," *International Journal of Production Research*, Vol.44, No.20(2006), pp.4377-4400.
- [28] Thierry, M.C., M. Salomon, J. Nunen, and L.N. Wassenhove, "Strategic issues in product recovery management," *California Management Review*, Vol.37, No.2(1995), pp.114-135.
- [29] Van der Laan, E., M. Salomon, R. Dekker, and L. Van Wassenhove, "Inventory control in hybrid systems with remanufacturing," *Management Science*, Vol.45, No.5(1999), pp.733-747.
- [30] Van Mieghem, J.A., "Investment strategies for flexible resources," *Management Science*, Vol.44, No.8(1998), pp.1071-1078.
- [31] Yang, J., B. Golany, and G. Yu, "A concave-cost production planning problem with remanufacturing options," *Naval Research Logistics*, Vol. 52, No.5(2005), pp.443-458.

<부 록>

[보조정리 1]의 증명 :

식 (2)~식 (8) LP 문제의 제약식을 여유변수(slack variable)  $z$ 를 포함하여 다시 쓰면 다음과 같은 행렬의 곱으로 표현할 수 있다.

$$A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_1 \\ \vdots \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}$$

이 때 최적해를  $(x_B, y_B)$ 라 하고 이에 해당하는 기저행렬을  $B$ 라 하면 최적쌍대해  $\lambda$ 는 심플렉스 알고리즘에 따라 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda = (c_B, p_B)B^{-1}$$

여기서  $(c_B, p_B)$ 는  $(x_B, y_B)$ 에 해당하는 비용 계수  $c_j$ 와  $p_i$ 로 이루어진 행벡터(row vector)이다.  $S$ 의 각 영역에 대한 최적해는 앞서 설명한 바와 같이 직관적으로 얻어질 수 있는데, [그림 2]에서 점선 안쪽에 위치한 영역에서는 그대로 모든  $x = (S_1, S_2)'$ 가 되고 점선 바깥에서는  $x$ 가 점선 위에 위치하도록 수직 혹은 수평으로 내려온 점이 최적해가 된다.  $\Omega_9$ 와  $\Omega_{12}$ 에서는 점선의 꼭지점에 위치하는 것이 최적이다. 따라서 각 영역에서의 최적해 및 기저행렬, 최적 쌍대해는 다음과 같다.

$S \in \Omega_1,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, p_2, p_3),$	$B = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_5],$	$\lambda_1 = (p_1, p_2, p_3)^T$
$S \in \Omega_2,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, p_2, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_4, A_5, A_6],$	$\lambda_2 = (0, p_2, p_3)^T$
$S \in \Omega_3,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, 0, p_3),$	$B = [A_1, A_2, A_3, A_5, A_7],$	$\lambda_3 = (p_1, 0, p_3)^T$
$S \in \Omega_4,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, p_2, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_3, A_4, A_8],$	$\lambda_4 = (p_1, p_2, 0)^T$
$S \in \Omega_5,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_3, A_7, A_{10}],$	$\lambda_5 = (p_1, 0, c_2)^T$
$S \in \Omega_6,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_2, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_4, A_6, A_9],$	$\lambda_6 = (0, p_2, c_1)^T$
$S \in \Omega_7,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_1, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_3, A_8, A_{10}],$	$\lambda_7 = (p_1, c_2, 0)^T$
$S \in \Omega_8,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_2, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_4, A_8, A_9],$	$\lambda_8 = (c_1, p_2, 0)^T$
$S \in \Omega_9,$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (0, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_8, A_9, A_{10}],$	$\lambda_9 = (c_1, c_2, 0)^T$
$S \in \Omega_{10},$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (p_3, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_5, A_6, A_7],$	$\lambda_{10} = (0, 0, p_3)^T$
$S \in \Omega_{11},$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (0, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_6, A_7, A_{10}],$	$\lambda_{11} = (0, 0, c_2)^T$
$S \in \Omega_{12},$	$c_B = (c_1, c_2),$	$p_B = (0, 0, 0),$	$B = [A_1, A_2, A_6, A_9, A_{10}],$	$\lambda_{12} = (0, c_2 - c_1, c_1)^T$

이로부터 식 (10)이 성립한다. ■

[정리 1]의 증명 :

최적  $Q_i^*$ 의 필요충분조건은 식 (1)에 대한 쿤터커 조건이다. 먼저 식 (2)~식 (8)의 LP 모형을 살펴보면 모든  $Q_i \leq 0$ 인  $Q_i$ 에 대해  $C(\cdot, S)$ 의 값이 동일하다. 이 경우  $V(\cdot)$ 의 값은  $Q_i = 0$ 에서 최소화되므로  $Q_i^*$ 는 0보다 작아

질 수 없다. 따라서 식 (1)에서  $Q_i$ 의 최소값 제약  $0 \leq Q_i$ 는 제외하더라도 최적  $Q_i^*$ 는 양의 값으로만 얻어진다. 식 (11)을 이용하면  $0 \leq Q_i$ 를 제외한 식 (1)의 쿤터커 조건은 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}\nabla E_S[C(Q, S)] &= E_S \lambda(Q, S) = r - \mu, \\ \mu_i(D_i - Q_i) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad Q \leq D_i, \quad i = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

쌍대해  $\lambda$ 는 [보조정리 1]과 같이 각  $Q$ 와  $S$ 의 영역에 대해 구할 수 있고, 이에 대한 평균은  $S$ 가 각 영역에 들어갈 확률이 된다. 따라서 다음의 등식이 성립한다.

$$\sum_{k=1}^{12} \lambda_k P\{S \in \Omega_k(Q^*)\} = r - \mu.$$

이를 정리하면 식 (12)~식 (14)가 얻어진다. ■

[따름정리 1] 증명 :

(a)  $Q_1^\alpha, Q_2^\alpha, Q_3^\alpha$ 가  $Q_3^\alpha < \min\{Q_1^\alpha, Q_2^\alpha\}$ 를 만족한다면 [그림 2](a)와 같이  $S$ 가 영역  $\Omega_2, \Omega_3, \Omega_5, \Omega_6$  및  $\Omega_{10}, \Omega_{11}, \Omega_{12}$ 에 위치할 수 없다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}P\{S \in \Omega_{2,3,5,6,10,11,12}(Q^\alpha)\} &= 0, \\ P\{S \in \Omega_{1,4,7}(Q^\alpha)\} &= P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\}, \quad P\{S \in \Omega_{8,9}(Q^\alpha)\} = P\{S_1 > Q_1^\alpha\}, \\ P\{S \in \Omega_{1,4,8}(Q^\alpha)\} &= P\{S_2 \leq Q_2^\alpha\}, \quad P\{S \in \Omega_{7,9}(Q^\alpha)\} = P\{S_2 > Q_2^\alpha\}, \\ P\{S \in \Omega_1(Q^\alpha)\} &= P\{S_1 + S_2 \leq Q_3^\alpha\}, \quad P\{S \in \Omega_{4,7,8,9}(Q^\alpha)\} = P\{S_1 + S_2 > Q_3^\alpha\}\end{aligned}$$

$Q_i^\alpha < D_i$ 라면 식 (15)에 의해  $\mu$ 는 0이 되어야 한다. 따라서 식 (12)로부터 식 (16)이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}p_1 P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\} + c_1 P\{S_1 > Q_1^\alpha\} &= r_1, \quad p_1 P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\} + c_1 (1 - P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\}) r_1, \\ (p_1 - c_1) P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\} &= r_1 - c_1, \quad P\{S_1 \leq Q_1^\alpha\} = \frac{r_1 - c_1}{p_1 - c_1}.\end{aligned}$$

같은 방식으로 식 (13)과 식 (14)를 정리하면 식 (17)과 식 (18)이 유도된다.

(b)  $Q_1^B, Q_2^B, Q_3^B$ 가  $Q_1^B + Q_2^B < Q_3^B$ 를 만족한다면 [그림 2](c)와 같이  $S$ 가 영역  $\Omega_4, \Omega_7, \Omega_8, \Omega_9$ 에 위치할 수 없다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}P\{S \in \Omega_{4,7,8,9}(Q^B)\} &= 0, \\ P\{S \in \Omega_{1,3,5}(Q^B)\} &= P\{S_1 \leq Q_1^B\}, \quad P\{S \in \Omega_{2,6,10,11,12}(Q^B)\} = P\{S_1 > Q_1^B\}, \\ P\{S \in \Omega_{1,2,6}(Q^B)\} &= P\{S_2 \leq Q_2^B\}, \quad P\{S \in \Omega_{3,5,10,11,12}(Q^B)\} = P\{S_2 > Q_2^B\}, \\ P\{S \in \Omega_{1,2,3,10}(Q^B)\} &= P\{S_1 + S_2 \leq Q_3^B\}, \quad P\{S \in \Omega_{5,6,11,12}(Q^B)\} = P\{S_1 + S_2 > Q_3^B\}. \\ P\{S \in \Omega_{5,11}(Q^B)\} &= P\{S_1 + S_2 > Q_3^B, S_1 < Q_1^B\}, \quad P\{S \in \Omega_{6,12}(Q^B)\} = P\{S_1 + S_2 > Q_3^B, S_1 > Q_1^B\}.\end{aligned}$$

따라서 (a)에서와 같이 모든  $\mu_i$ 는 0일 때 식 (12)~식 (14)를 정리하면 각각 식 (19)~식 (21)이 유도된다. ■



[정리 2]의 증명 :

[정리 1]에 의해  $Q = Q^*$ 에서  $r = E_S \lambda(Q, S)$ 가 성립한다. 양변에서  $r$ 에 대한 기울기 함수(gradient)를 구하면 다음이 얻어진다.

$$\nabla_Q E_S \lambda(Q, S) (\nabla_r Q)^T = \nabla_r (r_1, r_2, r_3),$$

$$H(\nabla_r Q)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\nabla_r Q)^T = H^{-1}.$$

여기서  $E_S \lambda(Q, S)$ 의  $Q$ 에 대한 기울기 함수  $H$ 는 원  $C(Q, S)$ 함수에 대해서는 헤시안(Hessian) 행렬에 해당한다. [보조정리 1]에서 보는 바와 같이  $\lambda$ 의 값들은  $Q, S$ 와 무관한 상수들로 이루어져 있으므로  $E_S \lambda(Q, S)$ 에 대한 미분은  $S$ 가 각 영역에 들어갈 확률의 변화량으로 계산될 수 있다. 식 (12)~식 (14)의 좌변에 나타난  $E_S \lambda(Q, S)$ 를 각  $Q_i$ 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Q_1} [p_1 (P\{S \in \Omega_{1,3,4,5,7}(Q^*)\}) + c_1 (P\{S \in \Omega_{8,9}(Q^*)\})] \\ &= p_1 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_1} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_{Q_1}^\infty \int_{Q_3-Q_1}^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\ &= p_1 \int_0^\infty f(Q_1, S_2) dS_2 + c_1 \int_{Q_1}^\infty f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1 - c_1 \int_{Q_3-Q_1}^\infty f(Q_1, S_2) dS_2, \\ &= (p_1 - c_1) \int_{Q_3-Q_1}^\infty f(Q_1, S_2) dS_2 + p_1 \int_0^{Q_3-Q_1} f(Q_1, S_2) dS_2 + c_1 \int_{Q_1}^\infty f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Q_2} [p_1 (P\{S \in \Omega_{1,3,4,5,7}(Q^*)\}) + c_1 (P\{S \in \Omega_{8,9}(Q^*)\})] \\ &= p_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_0^{Q_1} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_{Q_1}^\infty \int_{Q_3-Q_1}^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Q_3} [p_1 (P\{S \in \Omega_{1,3,4,5,7}(Q^*)\}) + c_1 (P\{S \in \Omega_{8,9}(Q^*)\})] \\ &= p_1 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_0^{Q_1} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_{Q_1}^\infty \int_{Q_3-Q_1}^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\ &= -c_1 \int_{Q_1}^\infty f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial Q_1} [p_2(P\{S \in \Omega_{1,2,4,6,8}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{7,9}(Q^*)\})] \\
&= p_1 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_2} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_{Q_2}^\infty \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \\
&= 0, \\
& \frac{\partial}{\partial Q_2} [p_2(P\{S \in \Omega_{1,2,4,6,8}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{7,9}(Q^*)\})] \\
&= p_2 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_0^{Q_2} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 + c_2 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_{Q_2}^\infty \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \\
&= p_2 \int_0^\infty f(S_1, Q_2) dS_1 + c_2 \int_{Q_2}^\infty f(Q_3 - Q_2, S_2) dS_2 - c_2 \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, Q_2) dS_1 \\
&= (p_2 - c_2) \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, Q_2) dS_1 + p_2 \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, Q_2) dS_1 + c_2 \int_{Q_2}^\infty f(Q_3 - Q_2, S_2) dS_2, \\
& \frac{\partial}{\partial Q_3} [p_2(P\{S \in \Omega_{1,2,4,6,8}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{7,9}(Q^*)\})] \\
&= p_2 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_0^{Q_2} \int_0^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 + c_2 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_{Q_2}^\infty \int_{Q_3-Q_2}^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \\
&= -c_2 \int_{Q_2}^\infty f(Q_3 - Q_2, S_2) dS_2, \\
& \frac{\partial}{\partial Q_1} [p_3(P\{S \in \Omega_{1,2,3,10}(Q^*)\}) + c_1(P\{S \in \Omega_{6,12}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{5,11}(Q^*)\})] \\
&= p_3 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_3} \int_0^{Q_3-S_1} f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_3-Q_1} \int_{Q_3-S_2}^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \\
&+ c_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} \int_0^{Q_3-Q_2} \int_{Q_3-S_1}^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\
&= -c_1 \int_{Q_1}^\infty f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1, \\
& \frac{\partial}{\partial Q_2} [p_3(P\{S \in \Omega_{1,2,3,10}(Q^*)\}) + c_1(P\{S \in \Omega_{6,12}(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_{5,11}(Q^*)\})] \\
&= p_3 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_0^{Q_3} \int_0^{Q_3-S_1} f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_0^{Q_3-Q_1} \int_{Q_3-S_2}^\infty f(S_1, S_2) dS_1 dS_2 \\
&+ c_2 \frac{\partial}{\partial Q_2} \int_0^{Q_3-Q_2} \int_{Q_3-S_1}^\infty f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\
&= -c_2 \int_{Q_2}^\infty f(Q_3 - Q_2, S_2) dS_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial Q_2} [p_3(P\{S \in \Omega_{1,2,3}(Q^*)\}) + c_1(P\{S \in \Omega_6(Q^*)\}) + c_2(P\{S \in \Omega_5(Q^*)\})] \\
 &= p_3 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_0^{Q_3} \int_0^{Q_3-S_1} f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 + c_1 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_{Q_1}^{\infty} \int_{Q_3-S_1}^{Q_3-Q_1} f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\
 &+ c_2 \frac{\partial}{\partial Q_3} \int_0^{Q_3-Q_2} \int_{Q_3-S_1}^{\infty} f(S_1, S_2) dS_2 dS_1 \\
 &= p_3 \int_0^{Q_3} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 + c_1 \left[ \int_{Q_1}^{\infty} f(S_1, Q_3-Q_1) dS_1 - \int_{Q_1}^{Q_3} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 \right] \\
 &+ c_2 \left[ \int_{Q_2}^{\infty} f(Q_3-Q_2, S_2) dS_2 - \int_0^{Q_3-Q_2} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 \right] \\
 &= (p_3 - c_1) \int_{Q_1}^{Q_3} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 + (p_3 - c_2) \int_0^{Q_3-Q_2} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 + \int_{Q_3-Q_2}^{Q_1} f(S_1, Q_3-S_1) dS_1 \\
 &+ c_1 \int_{Q_1}^{\infty} f(S_1, Q_3-Q_1) dS_1 + c_2 \int_{Q_2}^{\infty} f(Q_3-Q_2, S_2) dS_2.
 \end{aligned}$$

단,  $f(S_1, S_2)$ 는  $S_1$ 과  $S_2$ 의 결합확률분포(joint probability distribution) 함수이다. 이상의 항들을 Van Mieghem [30]에서와 같이 영역의 경계선에서의 선적분(line integration) 항들로 정리하면  $H$ 는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$H = \begin{bmatrix} C+A & 0 & -A \\ 0 & D+B & -B \\ -A & -B & E+A+B \end{bmatrix},$$

$$\text{단, } A = c_1 \int_{Q_1}^{\infty} f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1,$$

$$B = c_2 \int_{Q_2}^{\infty} f(Q_3 - Q_2, S_2) dS_2,$$

$$C = (p_1 - c_1) \int_{Q_3-Q_1}^{\infty} f(Q_1, S_2) dS_2 + p_1 \int_{Q_1}^{\infty} f(S_1, Q_3 - Q_1) dS_1,$$

$$D = (p_2 - c_2) \int_{Q_3-Q_2}^{\infty} f(S_1, Q_2) dS_1 + p_2 \int_{Q_3-Q_2}^{\infty} f(S_1, Q_2) dS_1,$$

$$E = (p_3 - c_1) \int_{Q_1}^{Q_3} f(S_1, Q_3 - S_1) dS_1 + (p_3 - c_2) \int_0^{Q_3-Q_2} f(S_1, Q_3 - S_1) dS_1 + p_3 \int_{Q_3-Q_2}^{Q_1} f(S_1, Q_3 - S_1) dS_1,$$

조건  $\min\{p_i\} > \max\{c_j\}$ 를 만족한다고 가정하였으므로 각  $A, B, C, D, E$  항들은 모두 0보다 크거나 같다. 따라서  $H^{-1}$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_5 & a_1 & a_1 + a_2 \\ a_1 & a_1 + a_3 + a_6 & a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 & a_1 + a_3 & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{단, } a_1 &= |H|^{-1}AB, \quad a_2 = |H|^{-1}AD, \quad a_3 = |H|^{-1}BC, \quad a_4 = |H|^{-1}CD, \\ a_5 &= |H|^{-1}(BD+BE+DE), \quad a_6 = |H|^{-1}(AC+AE+CE), \\ |H| &= ABC+ABD+ABE+ACD+BCD+ADE+BCE+CDE. \end{aligned}$$

따라서 모든  $H^{-1}$ 의 모든 항들은 0보다 크거나 같다.  $M^* = D - Q^*$ 이므로  $M^*$ 에 대해서는 부호가 바뀐다. 이로부터 식 (22)가 성립한다. ■

[정리 3] 증명 :

식 (1)의 FOC에 의해  $Q = Q^*$ 에서  $r = E_S \lambda(Q(c, p), S)$ 가 성립한다. 이를 음함수 미분(implicit differentiation)하면 다음이 얻어진다.

$$\frac{\partial Q}{\partial c_j} = -[\nabla_Q E_S \lambda(Q, S)]^{-1} \frac{\partial}{\partial c_j} E_S \lambda(Q, S); \quad \frac{\partial Q}{\partial p_i} = -[\nabla_Q E_S \lambda(Q, S)]^{-1} \frac{\partial}{\partial p_i} E_S \lambda(Q, S).$$

따라서 각  $c_j$  및  $p_i$ 의 변화에 대한  $Q$ 의 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial c_1} &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1, \dots, P_9)' \\ &= -H^{-1} \begin{bmatrix} P_8 + P_9 \\ 0 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2)(P_6 + P_8 + P_9) - a_5(P_8 + P_9) \\ -a_1(P_6 + P_8 + P_9) - a_3 P_6 \\ -(a_1 + a_2)(P_6 + P_8 + P_9) - (a_3 + a_4)P_6 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial Q}{\partial c_2} &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1, \dots, P_9)' \\ &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_7 + P_9 \\ P_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(P_5 + P_7 + P_9) - a_2 P_5 \\ -(a_1 + a_3)(P_5 + P_7 + P_9) - a_6(P_7 + P_9) \\ -(a_1 + a_3)(P_5 + P_7 + P_9) - (a_2 + a_4)P_5 \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial Q}{\partial c_1} &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1, \dots, P_9)' \\ &= -H^{-1} \begin{bmatrix} P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2 + a_5)(P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_7) \\ -a_1(P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_7) \\ -(a_1 + a_2)(P_1 + P_3 + P_4 + P_5 + P_7) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial c_1} &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1, \dots, P_9)' \\
 &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ P_1 + P_2 + P_4 + P_6 + P_8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1(P_1 + P_2 + P_4 + P_6 + P_8) \\ -(a_1 + a_3 + a_6)(P_1 + P_2 + P_4 + P_5 + P_8) \\ -(a_1 + a_3)(P_1 + P_2 + P_4 + P_6 + P_8) \end{bmatrix}, \\
 \frac{\partial Q}{\partial p_1} &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (P_1, \dots, P_9)' \\
 &= -H^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 + P_2 + P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_1 + a_2)(P_1 + P_2 + P_3) \\ -(a_1 + a_3)(P_1 + P_2 + P_3) \\ -(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(P_1 + P_2 + P_3) \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$M^* = D-Q^*$ 이므로  $M^*$ 에 대해서는 부호가 바뀐다. 이로부터 식 (23)~식 (24)가 성립한다. ■