The Korean Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 2-3 (May 2013), 163–176

A Brief Study on Stanojevic's Works on the $\mathscr{L}^1$-Convergence

Stanojevic의 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구의 소 계보 고찰

LEE Jung Oh 이정오

This study concerns Stanojevic's academic works on the $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series from 1973 to 2002. We review his academic works. Also, we briefly investigate a simple academic lineage for the researchers of $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series until 2012. First, we introduce the classical lineage of the researchers for $\mathscr{L}^1$-convergence Fourier series in section 2. Second, we investigate the backgrounds of Stanojevic's study at Belgrade University and University of Missouri-Rolla respectively. Finally, we compare and consider the $\mathscr{L}^1$-convergence theorems of Stanojevic's results from 1973 to 2002 successively. In addition, we compose a the simple lineage of $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series from 1973 to 2012.

Keywords: Fourier series, $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series, Fourier coefficients; 푸리에 급수, 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성, 푸리에 계수.

MSC: 42A20, 42A32 ZDM: A3, I3

1 서론

일본 도쿄도(東京都) 주오구(中央區) 니혼바시에 대형 선박제조회사인 미쓰이 조선(Mitsui Zosen)이 있다. 이 선박회사의 아키시마(Akishima) 연구소는 파도가 항해선박에 미치는 파도의 영향을 줄이는 방법을 연구해 오고 있다. 푸리에 급수 이론을 이용하여 적절한 파동으로 파도를 상쇄시킬 수 있는 방법을 찾는 연구과정에서 2006년 파동을 만드는 아메바라는 기계장치를 고안해 냈다.

아메바(AMOEBA; advanced multiple organized experimental basin)는 파동 발생장치가 되어 있는 원통형 물탱크로, 파동의 보강간섭과 상쇄간섭을 이용하여 물 위에 여러 개의 파동을 중첩시켜 합성파를 만든다. 이 장치는 아래의 사진처럼 합성파로 간단한 알파벳, 한자, 무늬 등을 수면에 나타나게 할 수 있다. 이 기계장치는 배에서 파동을 발생시켜 파도 파형과 중첩시켜 항해속도를 높이고자하는 연구 목적으로 고안된 기계

Receiveded on Jau. 20, 2013, revised on Mar. 19, 2013, accepted on Mar. 25, 2013.

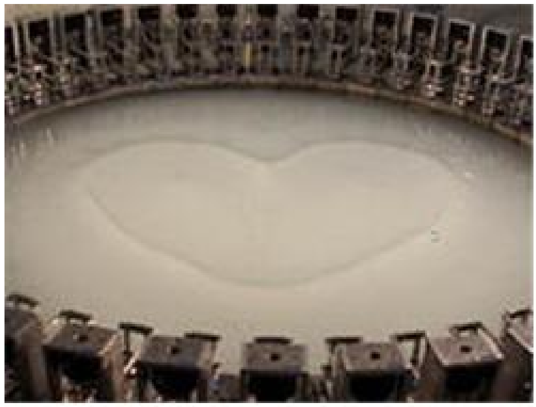

그림 1: 아메바로 만든 하트 모양[1)]

장치이다. [3, 4]

이 기계장치에 사용된 원리는 '아무리 복잡한 파동도 간단한 파동의 합으로 나타낼 수 있다' 는 '푸리에 급수 이론' 을 적용한 것인데 푸리에 급수가 우리 일상생활에 얼마나 다양하게 응용되고 있는지를 단적으로 보여준 사례이다.

본 논문은 1913년 영국의 수학자 영[2)]을 선두로 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 고전적인 연구계보와 세계적인 수학자 스타노제빅의 학문적 배경 및 일생에 대하여 각각 2장과 3장에서 고찰한다. 결론으로 스타노제빅의 연구 [6, 7, 9–15, 20–25, 27]를 중심으로 그가 연구한 30년간의 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 신 · 고전적인 결과들의 특징을 4장에서 고찰하고 2012년까지의 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구자 소 계보를 작성한다.

2 $\mathscr{L}^1$-수렴성의 고전적인 연구계보

$\mathscr{L}^2$-의미에서 푸리에 급수의 부분합 S_n 은 여러 항을 더할수록(즉 $n \to \infty$) 점점 더 원함수에 가까워진다. 예를 들면 그림 2 함수그래프는 그림 3 함수그래프에서 구간$(-\pi, \pi)$만을 확대한 것이다. $\mathscr{L}^2$-의미에서 $f(\theta) = \theta + \pi$ 로 정의된 함수에 대한 푸리에 급수의 부분합 S_1, S_2, S_3 이 대하여 점차 수렴하게 되는 과정을 보여주고 있다.

하지만 $\mathscr{L}^1$-의미에서는 적분 가능한 복소함수가 일반적으로 노름에 대하여 수렴성을 보장하지 못하기 때문에 1913년 윌리엄 헨리 영을 시작으로 바나흐 공간인 $\mathscr{L}^1$-공간에서 푸리에 급수의 부분 합이 주어진 본래 함수에 수렴하는 문제와 동치관계인 푸리에 계수의 특징을 이용하여 수렴을 밝히는 고전적인 연구결과를 발표하기 시작했다. $\mathscr{L}^1$-의미에서

1) 사진출처 : `http://www.msr.co.jp/Mitsui` Zosen(三井造船昭島研究所).

2) W. H. Young, "On the Fourier series of bounded functions", *Proc. London Math. Soc.* 12(3) 1913, 41–70.

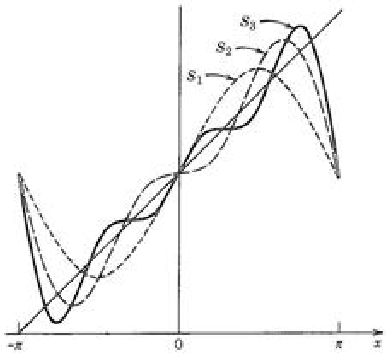

그림 2 : $f(\theta) = \theta + \pi$ 와
푸리에 급수의 부분합[3)]

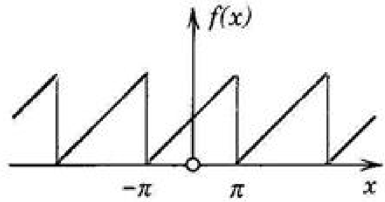

그림 3 : $f(\theta) = \theta + \pi$

푸리에 급수의 수렴성 연구는 일반적으로 두가지 접근 방법이 있다. 공액함수를 이용하는 방법과 $\mathscr{L}^1$-수렴족을 이용하는 방법이다. 전자는 $\mathscr{L}^1$-수렴성 문제의 어려움을 바나흐공간 특성으로 바꾼 것이고 후자는 푸리에 계수 족을 특성화하는 것이다. 결국, $\mathscr{L}^1$-의미에서 푸리에 급수의 수렴성 문제는 푸리에 계수들의 성질들을 찾는 연구로 귀결된다. 다시 말하면 식 (1)과 동치관계인 (2)를 이용하여 $\mathscr{L}^1$-수렴성 여부를 규명하는 많은 연구가 진행되어 왔다.

$$||S_n(f) - f||_{\mathscr{L}^1} = o(1), \quad n \to \infty \tag{1}$$

$$\hat{f}(n) \log |n| = o(1), \quad |n| \to \infty \tag{2}$$

William Henry Young 1913
Andrei Nikolayevich Kolmoforov 1923
Simon Sidon 1939
Sergei Aleksandrovich Telyakovskii 1973
Formin, Telyakovskii 1975
Formin, Grigorii Alekseevich 1978

표 1: $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 고전적 연구계보 [2]

3) 그림출처 : Erwin Kreysz ig, *advanced engineering mathematics*, p. 583.

3 스타노제빅의 학문적 배경

먼저, 이 절에서는 2008년 11월에 타계한 스타노제빅을 추모하기 위한 논문[4)]이 그의 제자들에 의해 발표된 것을 계기로 세계적 수학자이며 위대한 과학자인 스타노제빅의 학문적 배경을 고찰한다.

3.1 벨그라드 대학에서의 연구

그림 4: 벨그라드 대학(Belgrade University)[5)]

유럽 동남부 발칸반도 중앙에 위치한 세르비아(Serbia)[6)] 수도 베오그라드[7)]에는 세워진 벨그라드(Belgrade) 대학이 있다. 1808년에 설립된 벨그라드 대학은 약 9만 명의 학생과 4천 명의 교수진이 있는 발칸반도에서 최대 규모를 자랑하고 가장 오래된 대학이다. 스타노제빅은 24살 되던 해인 1952년에 학사학위를 취득하고 스승 니콜라숄티코브(Nikola Saltikov)의 제자로 3년만인 1955년 박사학위를 마친다. 학위논문은 "The strict law of large numbers(strogom zakonu velikih brojeva)"이었다. 박사학위 전부터 그는 기술 과학 문헌센터의 책임 관리자와 벨그라드 대학 내에 있었던 통계 국가연구소에서 강사로 일했다. 박사학위 후 그는 1961까지 벨그라드 대학에서 부교수로 근무하다 미국으로 이주하였다.

4) Filiz Dik, Mehmet Dik, and Mališa Žižović, "In Memory of Časlav V. Stanojević (1928–2008)", Mathematica Moravica 13(2) (2009) 1–6.

5) www.bg.ac.rs/UniverzitetuBeogradu/ .

6) 구 유고슬라비아 해체 후 2006년 몬테네그로와 분리 탄생된 국가.

7) 벨그라드(Belgrade)라고도 함.

3.2 학문적 전성기 미주리-롤라 대학

그림 5: 미주리 과학기술대학 Stonehenge[8)]

스타노제빅은 1962년부터 1966년까지 디트로이트 대학의 수학과에서 조교수를 거쳐 정교수로 근무하다가 남부 루이지에나 주 뉴올리언즈 루이지에나 주립대학을 거쳐 1968년 가을학기에 미주리 롤라대학(현재 과학기술 미주리 대학)으로 자리를 옮기게 된다. 그는 이곳에서 강의와 연구에 몰두하여 1998년 은퇴할 때까지 8명의 박사학위 제자들을 배출하며 은퇴 후에는 2002년까지 박사학위 논문지도만을 하였다. 그의 첫 제자였던 가렛(John W. Garrett)은 "특정 코사인 합의 $\mathscr{L}^1$-수렴성과 적분가능성에 관하여"라는 논문으로 1976년에 박사학위를 수여받는다 [9]. 1976년 그와 가렛은 "특정 코사인 합의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관하여" [10]를 공동연구 하고 뒤이어 그는 바나흐 $\mathscr{L}^1$-공간에서 푸리에 급수의 부분 합이 주어진 본래 함수에 수렴하는 문제와 동치관계인 푸리에 계수의 특징을 이용하여 (1)과 (2)가 필요충분조건임을 활용한 연구를 진행하였다.[9)] 제자 가렛이 루이지애나 주 뉴올리언스 대학으로 자리를 옮긴 이후에도 계속 공동연구를 진행 "삼각계급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 필요충분조건" [12]을 1976년 미국수학회지에 발표하게 된다.

스타노제빅은 가렛과 뉴올리언스대학 동료교수이던 리스(Charles Sparks Rees)를 참여시킨 세 사람의 공동연구를 통해 1978년에 "준단조 계수를 가진 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관하여" [13]라는 연구결과를 내놓는다. 이후 그는 뉴저지 주에 있는 벨연구소로 자리를 옮긴 가렛과 리스와 더욱 활발한 연구를 통해 1980년 "유계변동 계수를 가진 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성" [14]이라는 결과를 얻게 된다. 그 이듬해인 1981년에는 "푸리에-스탈츠 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 족" [20]에 관한 연구를 1982년에는 "푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 Tauberian 조건들" [21]을 연이어 발표하게 된다. 한편 1981년 "삼각급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성과

8) 사진출처 : Missouri University of Science and Technology 홈페이지.

9) Stanojevic, V. B. "$\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series with complex quasi-monotone coefficients", *Proc. Amer. Math. Soc.* 86(2) (1982), 241–247.

적분가능성에 관하여"라는 논문으로 스타노제빅에게 박사학위를 받은 메인 주 오랜드메인 대학의 브레이(William Oliver Bray) 교수와 1983년 공동연구를 통해 "푸리에 급수의 Tauberian $\mathscr{L}^1$-수렴성 족 I" [6]과 1984년 "푸리에 급수의 Tauberian $\mathscr{L}^1$-수렴성 족 II" [7]를 각각 발표하게 된다.

그림 6: Časlav V. Stanojević[10)]

그 후 스타노제빅은 3년간의 연구를 통해 1987년 "푸리에와 푸리에-스탈츠 급수의 O-정칙적으로 변화하는 수렴 절댓값" [22]과 1988년 "완만하게 변화하는 수렴 절댓값을 가진 푸리에와 푸리에-스탈츠 계수의 구조" [23]를 각각 단독 발표하게 된다. 또한 그는 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 이 두 결과를 계기로 푸리에 특성에 대한 새로운 접근을 시도한 연구결과인 "완만하게 변화하는 수렴절댓값을 가진 푸리에 급수의 특성" [24]을 1990년 학회지에 게재한다. 이 논문은 계수 $c(n)$이 점근적 짝수인 복소 영열(零列) 조건을 만족할 때 급수의 수렴성을 보인 경우이다. 한편, 나브라스카-린콘 대학에서 1981년에 박사학위를 받고 미국 미주리 과학기술대학에서 교수로 있던 그로우(David E. Grow) 동료교수와 함께 1995년 "완만하게 변화하는 수렴 절댓값을 가진 삼각계의 변환의 수렴성과 푸리에 급수 특성" [15]에 관한 공동 연구 결과를 발표한다. 그는 1998년 은퇴할 때까지 12명의 공동저자와 협력연구를 진행했고 총 50여 편의 논문을 발표하였는데 약45명의 저자들이 그의 논문을 100여 차례 인용한 것으로 집계되고 있다. 저서로는 1999년 개정판을 펴낸 "발산의 해석: 제어 및 발산 프로세스의 관리"[11)]를 비롯하여 총 5권의 책을 집필하였다. 은퇴 후 그는 그의 아내(Vera B.Stanojević)와 2002년 발표한 "터보조건 검색이론" [25]과 2003년 조나단

10) 사진출처 : Filiz Dik, Mehmet Dik, and Mališa Žižović, In Memory of Časlav V. Stanojević (1928–2008), Mathematica Moravica, 13(2) (2009), p. 3.

11) W.O. Bray, Stanojević Č.V., *Analysis of Divergence: Control and Management of Divergent Processes* 1999.

(Hatch Jonathan) 과의 공동결과물[12])을 발표를 끝으로 더 이상의 연구는 없었다.

4 결론: 1973년부터 2002년까지 Stanojevic 중심 $\mathscr{L}^1$-수렴성 결과들의 고찰과 2012년까지의 연구자 소 계보

푸리에급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성은 주로 푸리에 계수로 이루어진 수열에 대한 부가적인 가정을 통해 수렴성을 보이고 있다. 다시 말하면, 조건 (1)과 필요충분조건인 (3)를 이용하여 푸리에급수의 수렴성을 규명하는 연구가 진행되어왔다. 실수 수열 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 이 영 수열이고 볼록수열을 만족하면 (1)과 다음 식

$$a_n \log n = o(1), \quad n \to \infty \tag{3}$$

은 서로 동치이다.

20세기 중반 이후 특히 스타노제빅을 중심으로 1973년부터 2002년까지 약30간의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 주요결과들을 순차적으로 고찰하고 또한, 그를 중심으로 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 연구자들의 소 계보를 조사한다.

먼저, 스타노제빅은 루이지에나 주립대학에서 리스 (Charles Sparks Rees) 교수와 함께 1973년 "특정 코사인 합의 적분가능성에 대한 필요충분조건" [27]을 발표한다. 이 논문은 스타노제빅이 벨그라드 대학에서 1955년 박사학위를 받고난 후 1957년 발표한 "특정 삼각급수의 적분가능성에 관하여"의 충분조건을 이용하여 증명한 것으로 논문의 주 정리에서 「

$$b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq \cdots > 0, \quad a_k = \frac{b_k}{k} \to 0$$

라 하자. 그러면 $x \in (0, \pi]$ 에 대하여

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a_k}{2} + \left(\sum_{j=k}^{n} a_j \right) \cos kx \right]$$

가 존재하고

$$f \in \mathscr{L}^1[0, \pi]$$

와 필요충분조건이

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \tag{4}$$

이다.」를 이용하였다. 즉 $\mathscr{L}^1[0, \pi]$ 적분가능성에 대한 필요충분조건을 발표한 것이다. 또한, 이 논문은 2002년 [16], 2005년 [17] 쿨윈더 카어 (Kulwinder Kaur) 등에 의해 재해석

12) Hatch Jonathan, Stanojević Časlav V., "Monotone images of W-sets and hereditarily weakly confluent images of continua", *Publications de l'Institut Mathematique*, 74(88) (2003), 111–114.

되어 의미 있는 논문 중 하나로 평가되고 있다. 이후 스타노제빅은 미주리 과학기술대학에서 그의 제자인 가렛(J. W. Garrett)과 공동 연구를 통해 "특정한 코사인급수 합의 적분가능성과 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관하여" [9]라는 논문을 1975년에 발표하게 된다. 1973년 리스와 스타노제빅 [27]이 코사인급수의 적분가능성에 대한 고전적인 충분조건 (4)에 대한 새로운 형태의 코사인급수 합을 소개하여 결국 (4)가 필요조건임을 보인 결과에 대해 가렛과 스타노제빅 [9]은 다시 코사인급수 합을 일반화하고 코사인급수의 합이 $\mathscr{L}^1$-노름에서 수렴함을 보인다. 그리고 이들은 이듬해인 1976년 한 해 3편의 논문 [10–12]을 거듭 발표하는 활발한 공동연구를 진행한다. 그는 특히, 이들 논문 중 루이지애나 주 뉴올리언스대학의 가렛과 공동연구를 통해 1973년 리스와 스타노제빅 [27]의 연구결과에 부가된 결과 [10]를 내놓았다. 즉

$$f_n(x) = \frac{a(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a(k)\cos kx, \quad \lim_{n\to\infty} a(n) = 0 \quad \text{이고} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a(k)| < \infty$$

일때

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

이고

$$g_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \Delta a(k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \Delta a(j)\cos kx$$

라 하자. 그러면 특정 코사인 급수 f에 대하여 리스와 스타노제빅 [27]의 코사인급수 합 g_n이 f에 점별 수렴하는 것과 f에 대한 g_n의 $\mathscr{L}^1$-수렴성이 필요충분조건임을 보인 "특정 코사인 합의 $\mathscr{L}^1$ 수렴성에 관하여"라는 연구결과 발표하였다. 그들은 또한 같은 해인 1976년 "삼각계급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 필요충분조건" [12]를 미수학회지에 발표하게 된다. 당시 발표된 논문은

$$a(n)\log n = o(1), \quad \Delta a_n \geq 0$$

조건을 만족하는 코사인 족에 대한 적분가능성과 $\mathscr{L}^1$-수렴성」이었고 1978년 스타노제빅은 가렛의 뉴올리언스대학 동료교수이던 리스도 참여시켜 세 사람은 공동연구를 통해 "준단조 계수를 가진 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관하여" [13]라는 연구 결과를 내놓는다. 이 논문은 「준단조 계수를 가진 푸리에 급수 족에 대하여

$$||S_n(f) - \sigma_n(f)||_{\mathscr{L}^1} = o(1), \quad n\to\infty, \tag{5}$$

과 조건 (3)은 필요충분조건」임을 보인 연구결과이다. 이 결과는 단조계수들에 대한 일반화한 정리 중 하나로 포민과 테라코브스키의 결과[13)]를 새롭게 증명한 측면도 있다.

13) Fomin, G. A. and Telyakovskii, S. A. "On the convergence in L metric of Fourier series with quasi-monotone coefficients", *Trudy Math. Inst. Steklov.*, 134 (1975), 310–313.

1980년 스타노제빅은 벨연구소로 자리를 옮긴 가렛과 리스와 함께 "유계변동 계수를 가진 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성" [14]이라는 결과를 얻게 된다. 이 논문의 정리 1은
「$\{a_k\} \in S^2$ 라 하자. 그러면 $f \in \mathscr{L}^1(0,\pi)$ 이고 조건 (1)와 (3)은 필요충분조건이다.」
이었고 BV 를 유계변동의 영열(零列) 인 인족이라 표현하여 S족, C족, S^2 그리고 $(BV)^m$ 을 정의한 후 이들의 관계성을 이 논문 [14]에서 함께 언급하였다. 그 이듬해인 1981년에는 스타노제빅은 "푸리에-스탈츠 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 족" [20]에 관한 자신의 연구 결과를 발표하게 된다. 이 논문의 정리 3.1은「$\{a_k\} \in BV$ 이고 $n\Delta a_n = o(1), \quad n \to \infty$ 이라 하자. 그러면 푸리에 급수

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

와 $\{a_k\} \in C$ 는 필요충분조건이다.」이었는데 그는 F_p, C_p, C_p^* 그리고 P족을 각각 정의하고 이들 관계의 몇 가지 성질을 보였다. 한편, 스타노제빅은 1982년부터 1984년까지 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 토버(Tauberian)의 조건을 고려한 연구결과인 3편의 논문을 발표하였다. 1982년 그가 독자적으로 발표한 "푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 토버의 조건들" [21] 논문의 주 정리를 보면

「점근적인 짝수 계수를 가진 함수 $f \in \mathscr{L}^1(T)$ 의 푸리에 급수를

$$S[f] \sim \sum_{|n|<\infty} \hat{f}(n)e^{int}$$

이라고 하자. 만약 $1 < p \leq 2$ 에 대하여

$$\lim_{\lambda \to 1} \lim_{n \to \infty} \sup \sum_{j=n}^{[\lambda n]} j^{p-1} |\Delta \hat{f}(j)|^p = 0$$

이면 조건 (1)과

$$||\hat{f}(n)E_n + \hat{f}(-n)E_{-n}|| = o(1), \quad n \to \infty$$

은 필요충분조건이다. 단, $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt}$」이다.

1983년에는 그의 제자였고 1981년에 "삼각급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성과 적분가능성에 관하여" 라는 논문으로 박사학위를 받았던 메인주 오랜드 메인대학 브레이교수와 공동 연구를 통해 "푸리에 급수의 토버의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 족 I" [6]과 1984년에 "푸리에 급수 토버의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 족 II" [7]를 각각 발표하게 된다. 1987년 그의 단독연구인 "푸리에 급수와 푸리에 스탈츠 급수의 O-규칙적인 변동 수렴률" [22]을 통해 Tauberian 방법의 다양한 ~~응용~~을 통해 폭넓은 $\mathscr{L}^1$-수렴 족들을 얻은 [6, 7, 21]에 대하여 이러한 수렴 족들은 본질적으로 발산의 속도를 제한하여 정의되고 얻어진 결과이고 정리 A

「만약 $f \in \mathscr{L}^1(T)$ 이고 $1 < p \leq 2$ 일 때

$$\lim_{\lambda \to 1+0} \overline{\lim_{n}} \left(K^p_{[\lambda n]}(f) - K^p_n(f) \right) = 0 \tag{6}$$

가 성립한다고 가정하면 (1)과 (2)는 서로 동치이다.」
에 대하여 2가지 점, 즉 첫째, 조건 (6)은 $\mathscr{L}^1$-수렴률 $K^p_n(f)$ 의 차수 크기에 대한 설명이 분명하지 않고, 둘째, 정리 A의 증명이 다소 어색하다고 언급하였다. 그리고 그는 비감소수열인 O-규칙적인 변동에 대한 $\mathscr{L}^1$-수렴율 $K^p_n(f)$, $C^m_n(f)$ 그리고 $\Delta\hat{\mu}(n)$ 를 다시 표현하는 연구 [22]를 제시하였고 새로운 토버의 (Tauberian) 정리들과 간단한 증명을 보여주었다. 이 논문의 정리 2-1과 정리 2-3을 다시 개선하고 새로운 정리로 통합하여 1988년 "완만하게 변하는 수렴율을 가진 푸리에와 푸리에 스탈츠 계수의 구조" [23]로 제시하였다. 토버의 $\mathscr{L}^p$-방법을 이용하여 다양한 $\mathscr{L}^1$-수렴 족 연구결과들 [6, 7, 20–23]에는 순전히 단조성 규칙성질을 가진 푸리에 계수 수열에 대한 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구결과가 없는 점에 주목하여 그는 1990년 "완만하게 변하는 수렴율을 가진 푸리에 급수의 특성" [24]을 발표하였다. 이 논문의 결론정리로

「$\{a_n\}$ 이 강한 O-규칙적인 변동 준단조 수열이고 $f \in \mathscr{L}^1(0,\pi)$ 의 푸리에 급수가

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

이라고 하면 (3)와 (5)는 동치이다. 」를 보였다.

미주리-롤라대학 동료교수였던 그로우(David E. Grow) 교수와 공동연구를 통해 1995년 그가 당시 발표했던 논문 [6, 7, 21–23]들의 정리를 간단명료하게 표현하여 재 언급하면서 약 40페이지에 달하는 "완만하게 변하는 수렴률을 가진 삼각계 변환의 푸리에 특성과 수렴성" [15] 논문을 발표하였다. 이 논문에서는 부가적인 조건을 두어 일반적인 경우가 아니라 특별한 경우에 성립하는 성질을 보이고 있다. 수열공간 S_p 와 Σ_q 의 여러 성질을 논하여 푸리에 특성 족의 수렴성을 효과적으로 보이고 정리 1.3과 1.4의 준 수렴 족과 푸리에 수렴 구조를 논하였다.

결론적으로 그의 연구들 [6, 7, 9–15, 20–24, 27]이 가장 주목받은 점은 만약 $p \in (1,\infty)$ 일 때, $K^{-1}_n(\hat{f}) = \sum_{0<|k|\leq n} \log(|k|)|\Delta \hat{f}(k)|$ 에 의하여

$$K^p_n(\hat{f}) = \sum_{|k|\leq n} |k|^{p-1}|\Delta \hat{f}(k)|^p$$

를 정의하였다. 또한 조건 $k \geq 0$ 이면 $\text{sgn}(k) = 1$ 이고, $k < 0$ 이면 $\text{sgn}(k) = -1$ 로 정의할 때

$$\Delta \hat{f}(k) = \hat{f}(k) - \hat{f}(k + \text{sgn}(k))$$

을 표현하였다. 아울러 양수인 비 감소수열 $(R(n))$ 에 대하여, O-규칙적인 변동과 $*$-규칙

적인 변동을 이용하여 수렴성을 보였는데 즉 「모든 $\lambda > 1$ 에 대하여, 만약

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{R([\lambda n])}{R(n)}$$

을 만족하고 유한이면, O-규칙적인 변동」이고, 「만약

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \left(\lim_{n\to\infty} \sup \frac{R([\lambda n])}{R(n)} \right) = 1$$

을 만족하면 $*$-규칙적인 변동」이라고 각각 정의하고, $p \in (1, \infty)$ 에 대하여 간단하게

$$F_p = \{\hat{f} : \{\exp(K_n^p(\hat{f}))\} \mid O\text{-규칙적인 변동}\}$$

와 같은 표현을 사용하여 푸리에 계수 $\hat{f}$ 의 수렴율 증가를 제안하는 토우버의 조건을 사용하여 폭넓은 $\mathscr{L}^1$-수렴성 족을 얻는 결과를 보였다는 점이다.

이 논문을 끝으로 그는 미주리-롤라대학에서 1998년 은퇴하였으나 2002년까지 그의 남아있던 2명의 박사학위 제자 딕 (Mehmet Dik)과 딕 (Filiz Dic)의 논문지도를 하여 학위를 마치게 하는 열정을 보여주기도 했다. 또한, 2002년 남서부 미주리 주립대학 수학과 교수인 아내(Stanojevic, Vera B)와 함께 "토버의 검색이론" [25]을 마지막으로 발표하게 된다. 그리고 80세의 나이로 2008년 타계하게 된다. 그는 약 50편의 논문과 5권의 책을 출판하였고 그의 논문이 많이 인용되는 등 세계적인 수학자로 인정받고 있다.

마지막으로, 스타노제빅 (Caslav V. Stanojevic) 중심으로 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 대한 연구자들의 소계보를 2012년까지 조사해보면 2000년 이후 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 여러 연구자들 중 특히 최근 츄샹핑, 토모브스키와 카어가 주목받고 있다.

참고 문헌

1. 이정오, "푸리에 일생, 푸리에 후학의 소계보와 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 테라코브스키의 정리", 한국수학사학회지, 22(1) (2009), 25–40.
2. 이정오, "푸리에 급수의 부분합, 푸리에 계수를 이용한 $\mathscr{L}^1$-수렴성 결과들의 재해석과 그 소계보", 한국수학사학회지, 23(1) (2010), 53–66.
3. 최원석 `www.seoprise.com/board/` 서프라이즈 과학칼럼, 2007. 9. 27.

14) Moricz, F., "$\mathscr{L}^1$-Convergence of Double Fourier Series", *Journal of mathematical analysis and applications*, 186(1), 1994.

15) Fridli, S, "Coefficient Condition for $\mathscr{L}^1$-Convergence of Walsh-Fourier Series", *Journal of mathematical analysis and applications*, 210(2) (1997).

16) Necessary and sufficient condition for $\mathscr{L}^1$-convergence of cosine trigonometric series with δ-quasimonotone coefficients Mathematical Communications 4(1999), 219–224.

17) Zaderei, P. V.; Smal, B. A., "On the Convergence of Fourier Series in the Space $\mathscr{L}^2$", *Ukrainian Mathematical Journal*, 54(5) (2002).

18) Zhou, Songping, "A remark on a condition raised by Tikhonov: An example in $\mathscr{L}^2$-convergence of fourier series", *Acta mathematica Hungarica*, 127(1–2) (2010).

Caslav V. Stanojevic [27]

1973

John W. Garrett [9]

1976

Charles S. Ree [13]

1980

Vera B. Stanojevic [26]

1982

William O. Bray [6]

1984

Chang-Pao Chen [5]

1991

Moricz, Ferenc[14)]

1994

David E. Grow [15]

1995

Fridli, S[15)]

1997

Zivorad Tomovski[16)]

1999

Zaderei, P. V.[17)]

2002

Kulwinder Kaur [17]

2005

Karanvir Singh [19]

2009

Zhou Songping[18)]

2010

Feng, F. J. [8]

2011

László Leindler [18]

2012

표 2: 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성에 관한 연구자 스타노제빅 중심 소 계보

4. 한국과학기술정보연구원, "푸리에 급수", 사이언스, 21(119) (2006).
5. William O. Bray and Caslav V. Stanojevic, "Tauberian $\mathscr{L}^1$-convergence classes of Fourier series I", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 275(1) (1983), 59–69.
6. William O. Bray and Caslav V. Stanojevic, "Tauberian $\mathscr{L}^1$-convergence classes of Fourier series II", *Math. Ann.*, 269(1984), 469–486.
7. Chang-Pao Chen and Yeu-Wen Chuang, "$\mathscr{L}^1$-Convergence of Double Fourier Series", *Taiwanese journal of mathematics*, 19(4) (1991).
8. F. J. Feng and S. P. Zhou, "On $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series of complex valued functions under the GM7 condition", *Acta mathematica Hungarica*, 133(1-2) (2011).
9. John. W. Garrett and Caslav. V. Stanojevic, "On integrability and $\mathscr{L}^1$-convergence of certain cosine sums", *Notices Amer. Math. Soc.*, 7(8) (1975), 873–879.
10. John. W. Garrett and Caslav. V. Stanojevic, "On $\mathscr{L}^1$-convergence of certain cosine sums", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(1) (1976), 129–130.
11. John. W. Garrett and Caslav. V. Stanojevic, "On $\mathscr{L}^1$-convergence of certain cosine sums", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 54(1976), 101–105.
12. John. W. Garrett and Caslav. V. Stanojevic, "Necessary and sufficient conditions for $\mathscr{L}^1$-convergence of trigonometric series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 60(1976), 68–74.
13. John W. Garrett, C.S. Rees and Caslav V. Stanojevic, "On $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series with quasi-monotone coefficients", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 72(1978), 535–538.
14. John W. Garrett, C. S. Rees and Caslav V. Stanojevic "$\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series with coefficients of bounded variation", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 80(3) (1980), 423–430.
15. David E. Grow and Caslav V. Stanojevic, "Convergence and the Fourier character of trigonometric transforms with slowly varying convergence moduli", *Math. Ann.*, 302(1995), 433–472.
16. Kulwinder Kaur and S.S. Bhatia, "Integrability and $\mathscr{L}^1$-convergence of Rees-Stanojevic sums with generalized semi-convex coefficients", *IJMMS*, 30(11) (2002), 645–650.
17. Kulwinder Kaur, "Integrability and $\mathscr{L}^1$-convergence of Rees-Stanojevic sums with generalized semi-convex coefficients of non-integral orders", *Archivum Mathematicum (brno) Tomus*, 41(2005) 423–437.
18. László Leindler, "On $\mathscr{L}^1$-convergence of sine series", *Analysis Mathematica*, 38(2) (2012), 123–133.
19. Karanvir Singh and Kulwinder Kaur, "On the $\mathscr{L}^1$-convergence of certain generalized modified trigonometric sums", *Matematiqki Vesik*, 61(3) (2009), 219–226.
20. Caslav V. Stanojevic, "Classes of $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier-Stieltjes series", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82(2) (1981), 209–215.
21. Caslav V. Stanojevic, "Tauberian conditions for $\mathscr{L}^1$-convergence of Fourier series", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 271(1) (1982), 237–244.
22. Caslav V. Stanojevic, "O-regularly varying convergence moduli of Fourier and Fourier-Stieltjes series", *Math. Ann.*, 279(1987), 103–115.
23. Caslav V. Stanojevic, "Structure of Fourier and Fourier-Stieltjes coefficients of series with slowly varying convergence moduli", *Bull. Amer. Math. Soc.*,19(1) (1988).
24. Caslav V. Stanojevic, "The Fourier character of series with slowly varying convergence

moduli", *Publications de L'institut Mathematique*, 48(62) (1990), 91–95.

25. Caslav V. Stanojevic and Vera B. Stanojevic, "Tauberian retrieval theory", *Publications de l'Institut Mathematique*, 71(85) (2002), 105–111.
26. Vera B. Stanojevic, "$\mathscr{L}^1$-Convergence of Fourier Series with Complex Quasimonotone Coefficients", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 86(2) (1982), 241–247.
27. Charles S. Rees and Caslav V. Stanojevic, "Necessary and sufficient conditions for integrability of certain cosine sums", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 43(1973), 579–586.

Lee Jung Oh
Department of Mathematics, ChoSun University
E-mail: jolee@chosun.ac.kr

Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 2-3 May 2013

ABSTRACTS

HONG Sung Sa, HONG Young Hee, LEE Seung On 홍성사, 홍영희, 이승온 Mathematical Structures and SuanXue QiMeng『數學的 構造와 算學啓蒙』

朱世傑의 算學啓蒙은 조선 산학의 발전에 가장 중요한 역할을 한 산서이다. 천원술을 비롯한 算學啓蒙의 내용은 조선 산학의 중요한 연구 대상이 되었다. 이 논문의 목적은 朱世傑이 수학적 구조를 강조하면서 算學啓蒙을 저술한 것을 보여서 조선 산학자들에게 수학적 구조에 대한 이해를 크게 확장한 것을 드러내는 것이다. 이와 함께 朱世傑이전의 산서에 나타나는 구조적 접근과 算學啓蒙의 접근을 비교하여 朱世傑의 접근이 뛰어나고 또 현대에 사용되는 구조적 접근과 일치하는 것을 보인다.

SONG Min Ho 송민호 A Study on Learning Environments for Euler's formula with activities『'오일러 공식과 오일러 표수' 탐구 활동을 위한 학습 환경 연구』

오일러 공식과 오일러 표수는 다면체를 탐구하는 지표의 역할을 하기 때문에 위상적 불변량이라는 관점에서 중요한 수학적 개념이다. 우리나라는 3차부터 7차 교육과정까지 오일러 공식에 관한 내용이 교과서에 언급되었으나 이후 교육과정에서 제외되었다. 본 연구에서는 영재교육이나 방과후교실과 같은 비형식적(informal) 교육과정의 소재로 오일러 공식과 오일러 표수에 주목하였다. 본 연구에서는 먼저 오일러 공식과 오일러 표수가 가지는 의미를 수학사와 그 응용 분야, 교육과정에서 찾아본다. 이를 위해 오일러 공식과 오일러 표수의 역사, 다양한 수학 분야에 기여한 내용, 그리고 교육과정에 도입된 오일러 공식에 관한 내용을 살펴본다. 나아가 공식 암기가 아닌 탐구 활동의 대상으로 오일러 공식을 새롭게 조명할 수 있는 학습 환경을 제안하고 이를 이용한 활동을 예를 들어 살펴본다.

CHOI Eun Mi 최은미 Historical analysis of System of Equations—Focused on Resultant『연립방정식 풀이의 역사발생적 고찰—종결식을 중심으로』

본 논문에서 연립일차방정식의 풀이법 연구로부터 시작하여 연립고차방정식의 해법 연구로 발전되어가는 과정을 역사발생적 관점에서 고찰한다. 연립일차방정식을 푸는데 중요한 역할을 하는 가우스 소거법과 비교하여 상대적으로 덜 알려져 있지만, 연립고차방정식에는 오일러의 소거이론과 베조의 종결식이 있다. 이러한 발전의 역사적 과정을 알아보고 특별히 종결식을 처음으로 정의한 베조의 연구 방법을 조명해 본다.

LEE Jung Oh 이정오 A Brief Study on Stanojevic's Works on the $\mathscr{L}^1$-Convergence『Stanojevic의 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구의 소 계보 고찰』

본 논문은 저자의 선행 연구 결과에 따른 부가적인 연구로 '푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성' 에 관한 많은 업적을 남긴 세계적인 수학자인 스타노제빅(Caslav V. Stanojevic)[1]을 중심으로 20세기 후반부터 21세기 초까지(1973–2002) 30년간 그의 연구결과를 순차적으로 고찰하여 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구자들의 2012년까지 소 계보를 조사한다.

1) 스타노제빅(1928–2008) ; 세르비아 (구 유고슬라비아) 출신의 세계적인 수학자.