The Korean Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 2-3 (May 2013), 149–161

Historical analysis of System of Equations—Focused on Resultant

연립방정식 풀이의 역사발생적 고찰—종결식을 중심으로

Choi Eun Mi 최은미

The history of finding solutions of linear equations went back to some thousand years ago, and has been steadily developed to solve systems of higher degree polynomials. The method to eliminate variables came into use around the 17th and 18th century. This technique has been extended to the resultant theory that was laid in the 19th century by outstanding mathematicians as Euler, Sylvester, and Bézout. In this paper we discuss the historical reflection about the development of solving system of polynomials. We add a special emphasis on E. Bézout who gave the first account on the resultant which is a generalization of discriminant and Gauss elimination method.

Keywords: resultant, nonlinear system of polynomials; 종결식, 연립비선형방정식.

MSC: 01A40, 01A45 ZDM: A30

1 서론

방정식과 연립방정식은 학교 수학과 교육과정의 중요한 주제 중 하나로서 중등과정 전체에 걸쳐 다루어진다. 중학교 과정에서는 가감법과 대입법을 사용한 연립일차방정식의 풀이가 소개되며, 고등학교 과정에서는 두 개의 미지수를 갖는 간단한 연립일차방정식, 고차방정식 그리고 연립이차방정식으로 확장된다. 연립방정식과 행렬이라는 단원에서 소거에 관련된 행렬의 기본 개념이 언급된다. 여러 개의 미지수를 갖는 연립일차방정식으로의 일반화는 대학 선형대수학의 주요 주제인데, 연립방정식이 근을 갖기 위한 조건으로 행렬식의 성질을 배우게 된다.

그러나 실생활에서는 연립일차방정식보다 연립비선형방정식을 풀어야 하는 많은 상황들이 있다. 기하적으로 볼 때 전자가 일차 직선들의 교점을 찾는 문제인데 비해 후자는 몇 개 곡면의 공통점을 찾는 과제이다. 연립방정식계에서 공통근을 찾기 위해 각 방정식을 따로 풀어서 그 모든 근들을 비교하면 되지만, 이것은 효과적인 방법이 아니며 특히

Receiveded on Apr. 27, 2013, revised on May 15, 2013, accepted on May 21, 2013.

근의 존재 여부만 판단해야 하는 경우에는 더욱 그렇다. 오일러의 소거이론은, 연립일차방정식계에서 가우스 소거법이 하는 역할처럼, 연립비선형방정식계의 여러 미지수들 중에서 몇 개를 소거하여 간단한 연립 체계를 만들어 근의 존재성을 확인할 수 있게 한다.

이 논문에서는 연립일차방정식으로부터 출발하여 임의의 다변수 연립고차방정식의 풀이 방법의 연구로 발전되는 역사발생적 과정을 고찰하면서 그 가운데서 행렬과 행렬식의 역할을 살펴보고자 한다. 오일러의 소거이론을 받아 베조의 종결식(resultant)이 고안되며 그것을 실제적으로 계산하기 위해 실베스터 행렬식이 정의되기까지의 발전과정을 조명하였다. 이러한 논의는 연립방정식 풀이에 대한 기초적인 사고가 어떻게 발전되어 다변수 연립고차방정식을 풀어낼 수 있게 되었는지를 보여주는 의미있는 분석이 될 것이다.

2 간단한 연립방정식 풀이

연립방정식의 풀이에 대한 기록은 기원전 200년경의 구장산술에서 나타난다. 두 방정식에서 하나의 변수를 소거하는 방법은 12세기경에 개발되었는데, 이러한 기술은 17세기가 되어 유럽으로 전해졌다. 18세기에 오일러(L. Euler)와 가우스(K.F. Gauss)는 행렬 개념에 근거한 소거법을 사용하여 연립방정식을 체계적으로 해결해 나갔으며, 19세기에 실베스터(J.J. Sylvester)와 케일리(A. Cayley)등이 행렬이론을 발전시킴으로서 방정식 풀이가 크게 진전되었다.

연립일차방정식 $\begin{cases} a_1x + a_0 = 0 \\ b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 은 행렬 방정식 $\begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 으로 표현되며, 2×2인 계수행렬의 행렬식 $a_1b_0 - a_0b_1$이 0일 때 연립방정식은 0이 아닌 근을 갖는다. 연립이차방정식 $\begin{cases} f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0 \end{cases}$ 도

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

으로 표현되기는 하지만, 계수행렬의 행렬식을 생각할 수 없다. 이를 해결하는 한가지 방법으로서, 만일 이 연립방정식이 근을 갖는다면 f와 g는 일차식 L을 공통으로 포함하여

$$f(x) = Lq_1(x), \quad g(x) = Lq_2(x)$$

로 표현된다. 이 때 $q_1(x)$와 $q_2(x)$도 일차식이므로

$$q_1(x) = \alpha_1 x + \alpha_0, \quad q_2(x) = -\beta_1 x - \beta_0, \quad (\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0 : \text{상수들})$$

로 나타낼 수 있다. 여기서 계산의 편리를 위해 $q_2(x)$에 음수부호를 사용하였다. 그러면 $L = f(x)/q_1(x) = g(x)/q_2(x)$이므로 $f(x)q_2(x) = g(x)q_1(x)$, 즉

$$(a_2x^2 + a_1x + a_0)(-\beta_1 x - \beta_0) = (b_2x^2 + b_1x + b_0)(\alpha_1 x + \alpha_0)$$

가 된다. 이를 전개하면 x에 관한 삼차 방정식

$$(a_2\beta_1 + b_2\alpha_1)x^3 + (a_1\beta_1 + a_2\beta_0 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0)x^2$$
$$+ (a_0\beta_1 + a_1\beta_0 + b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0)x + (a_0\beta_0 + b_0\alpha_0) = 0$$

이 나온다. 이로부터 각 계수들이 0이 되는 방정식계를 만들고 이를 다시 미지수 $\beta_1, \beta_0, \alpha_1, \alpha_0$에 대한 행렬방정식으로도 표현할 수 있다. 즉

$$\begin{array}{llllr} a_2\beta_1 & & +b_2\alpha_1 & & = 0 \\ a_1\beta_1 & +a_2\beta_0 & +b_1\alpha_1 & +b_2\alpha_0 & = 0 \\ a_0\beta_1 & +a_1\beta_0 & +b_0\alpha_1 & +b_1\alpha_0 & = 0 \\ & a_0\beta_0 & & +b_0\alpha_0 & = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{vmatrix} a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ 0 & a_0 & 0 & b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0$$

일 때 연립방정식은 근을 갖는다.

그러나 방정식의 차수가 높아지면 이러한 방법은 그다지 효과적이지 않다. 1700년도 중반에 베조(E. Bézout)는 이 문제에 접근하는 독특한 방법을 고안했다. 그는 두 방정식 f와 g를 성분 $x^2, x, 1$들의 일차결합으로 이해하여, 각 방정식에 x를 한 번씩 곱하여

$$a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x = 0, \quad b_2x^3 + b_1x^2 + b_0x = 0$$

두 개의 방정식을 더 만들었다. 그러면 성분 $x^3, x^2, x, 1$의 일차결합으로 표현되는 모두

네 개의 식을 갖게 되며, 행렬방정식으로 표현할 수 있게 되었다.

$$\begin{array}{llll} a_2x^3 & +a_1x^2 & +a_0x & =0 \\ & a_2x^2 & +a_1x & +a_0=0 \\ b_2x^3 & +b_1x^2 & +b_0x & =0 \\ & b_2x^2 & +b_1x & +b_0=0 \end{array} \Leftrightarrow AX = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

계수행렬 A는 위에서 만들어진 행렬과 동일한 것임을 쉽게 볼 수 있다. 이제 연립방정식이 0이 아닌 근을 갖기 위해서 A의 행렬식이 0, 즉

$$(a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

이어야 한다. 이 방정식의 각각의 항은 모두 4차인데, 베조는 행렬식으로 만들어진 4차 방정식을 f와 g의 종결식(resultant)이라고 불렀다.

베조의 이러한 방법은 차수가 다른 다항식들로 구성된 연립방정식에도 성공적으로 적용된다. m과 n $(m > n)$을 차수로 하는 다항식 f와 g의 연립방정식이 있을 때, 베조는 두 다항식을 $m+1$개 성분 $1, x, x^2, \cdots, x^m$의 일차결합으로 이해했다. $n < m$이므로 $g(x)$에 각각 $x, x^2, \cdots, x^{m-n}$ 을 곱해 $m-n$개의 방정식을 더 만들었다.

$$S = \{f(x), g(x), \quad \underbrace{xg(x), x^2g(x), \cdots, x^{m-n}g(x)}\}$$

그러면 $m+1$개 성분으로 표현되는 $2+m-n$개 식의 연립방정식이 되며, 이 때 계수행렬의 크기는 $(2+m-n)\times(m+1)$이다. 만일 $n=1$이면 계수행렬은 $(m+1)\times(m+1)$인 정방행렬이 되어, 소거법을 사용하여 방정식을 풀 수 있다. 그러나 $n>1$이라면 $m+1 \neq 2+m-n$이므로 계수행렬은 비정방행렬이다. 베조는 연립방정식을 더 크게 만들기 위해 차수 m인 두 방정식 $f(x)$와 $x^{m-n}g(x)$에 각각 $x, x^2, \cdots, x^k$ (임의의 $k>0$)를 곱하여 $2k$개의 방정식을 더 만들었다.

$$S \cup \{\underbrace{xf(x), x^2f(x) \cdots, x^kf(x)}, \underbrace{x(x^{m-n}g(x)), x^2(x^{m-n}g(x)), \cdots, x^k(x^{m-n}g(x))}\}$$

그러면 $m+1+k$개 성분들 $1, x, \cdots, x^m, \cdots, x^{m+k}$로 표현되는 $2+m-n+2k$개 식으로 구성된 연립방정식이 된다. 이 때 계수행렬의 크기는 $(2+m-n+2k)\times(m+1+k)$이다. 계수행렬이 정방행렬, 즉

$$(2+m-n+2k) = (m+1+k)$$

이 되려면 $k = n-1$이어야 한다. 그러므로 계수행렬은 $(m+n)\times(m+n)$인 정방행렬이 되어 소거법을 사용하여 방정식을 풀 수 있다. 가령 차수 $m=3$, $n=2$인 두 방정식

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \quad \text{와} \quad b_0 + b_1x + b_2x^2 = 0$$

을 생각하면, 행렬방정식 $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 으로 표현할 수 있다. 두 방정식이 공통근을 가지려면 5×5인 계수행렬의 행렬식, 즉 종결식이 0이어야 한다.

3 에띠엔 베조 (Étienne Bézout, 1730–1783)

에띠엔 베조는 프랑스에서 태어났다. 그의 할아버지와 아버지는 모두 고향 지역의 행정장관을 지냈으며 에띠엔이 그 자리를 계승해줄 것을 기대했다. 그러나 수학에 깊이 빠져있었던 에띠엔은 오일러가 부모의 기대를 거스르면서까지 수학을 선택했다는 글에 감명을 받아 자신도 수학에 몰입하기로 작정했다. 19세에 이미 왕립 과학 아카데미(Académie Royale des Sciences)로부터 능력을 인정받아 겸임(adjunct)회원으로 선출되었으며 29세에 정식회원이 되었다. 24세에 해군에서 교사로서의 직업을 시작했는데 학생들이 사용할 수학교재를 개발하는 임무를 받았다. 1764–1767년에 4권의 책(Cours de mathématiques àl'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine)을 저술했고, 그 후 1770–1782년에 6권 분량의 책(Cours complet de mathématiques àl'usage de la marine et de l'artillerie)을 또 출판했다. 당시 대부분의 수학교재에서 대수영역이 가장 먼저 다루어진 것과는 달리, 베조는 기하영역을 먼저 다루었다. 대수적 표현을 이해할 만한 충분한 수학적 논리를 갖추지는 못했지만, 기하분야의 증명을 좋아하는 초보자들을 위한 의도였다. 또한 전문 수학자가 아닌 사람이 쓴 수학책의 형태로서, 베조는 공리나 정리와 같은 난해한 수학 용어의 사용을 자제하면서 지나치게 엄밀한 설명도 피했다. 이 교재들은 상당히 성공적이었고 그는 큰 명성을 얻었다[5]. 내용의 정확성이 떨어진다는 비난을 간혹 받기는 했지만 그의 책들은 수학을 필요로 하는 일반 사람들에게 충분했으며 에콜 폴리테크의 진학을 준비하는 입문서로 아주 오랫동안 인기가 있었다. 19세기 초에 영어로 번역되었는데 번역을 했던 사람 중 한 명인 J. Farrar(1779–1853)는 그 책으로 하버드 대학교에서 미적분학을 강의했다. 미국에서도 상당히 인기를 누렸으며 이 교재의 형식과 내용은 19세기 미국의 수학교육에 큰 영향을 미쳤다. 그가 타개한 후에 그의 업적을 기리기 위해 고향에 동상이 세워졌다.

교사로서 강의와 저술에 집중한 나머지 베조는 연구에 전념할 시간을 거의 갖지 못했고 큰 업적을 내지 못했다. 그의 초기 연구는 적분에 관한 것이었으나 1762년 이후부터 대수 방정식 푸는 문제로 제한하여 집중했다. 베조는 자신의 수학 지식으로 일반적

인 경우의 문제를 해결할 수 없을 때, 자기가 쉽게 다룰 수 있는 특별한 경우들을 먼저 풀기 시작했다. 이런 과정이 천천히 발전하여 일반적인 상황을 더 잘 이해할 수 있게 되며 마침내 문제를 풀 수 있게 되기 때문이다. 베조는 이러한 연구 방법을 'method of simplifying assumptions' 라고 불렀는데 이는 오늘날에도 사용되는 좋은 방법이다. 방정식 이론에 관한 첫 번째 논문(Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique, 1762년)에서 이러한 방법은 잘 드러난다. 그는 하나의 일변수 방정식을 두 개의 이변수 방정식에서 변수 하나가 제거된 형태로 취급하고자 했다. 더욱 간단히 하기 위해 방정식 두 개 중 하나는 아주 단순한 형태, 예컨대 n차 항과 상수항의 단 두 개의 항을 갖는 경우로 제한시켰다. 그 후 자신의 특별한 기술인 '소거법' 을 사용하여 하나의 변수를 갖는 단 하나의 방정식인 '종결식' 으로 변형시켰다. 또한 방정식 풀이에서 행렬을 사용하는 중요한 연구를 했는데 이것이 1764년에 발표된 두 번째 논문(Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues)이다. 이 논문에서 연립방정식을 풀기 위해 사용된 아이디어로 인해, 1853년에 실베스터는 연립방정식의 계수 행렬식을 Bezoutiant라고 불렀다. 1779년에 저서 Théorie générale des équations algébriques를 출판하였다. 여기에 그의 가장 중요한 소거이론 연구가 포함되어 있는데, '베조 정리' 라고 불리는 것으로서 차수 m과 n인 두 대수적 곡선은 일반적으로 mn개의 점에서 만난다는 것이다. 이것은 오래 전에 뉴턴(Newton)이 프린키피아(Principia, 1687년) 제 1권의 보조정리 28에서 언급했던 것이었지만 베조가 처음으로 증명하였으며 대수기하의 다양체 교점 연구에서 아주 중요한 역할을 한다.

4 베조의 종결식과 실베스터 행렬식

18세기의 여러 대수학자들은 연립n차방정식을 풀기 위해 근과 계수와의 관계를 다루었다. 대표적으로 오일러(1748)와 베조(1764)가 있는데 특히 베조는 n변수 n개 연립방정식으로 부터 하나의 변수를 갖는 하나의 방정식을 찾아내는 연구를 했다. 종결식이라는 이름은 베조가 최초로 사용하였지만 오일러와 베조 모두는 종결식을 연립일차방정식의 행렬식으로 표현할 수 있는 아이디어를 가지고 있었다[7, p. 196] . 그 후 종결식은 실베스터에 의해 두 방정식의 계수들로 이루어진 행렬식으로 아름답게 표현되었다(1843). 그는 m과 n을 차수로 하는 임의의 두 방정식

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0, \quad g(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$$

으로부터 크기 $(m+n)\times(m+n)$ 인 실베스터 행렬을 정의하였다.

$$Syl(f,g)=\begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & b_n & b_{n-1} & \cdots & \cdots & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}$$

f와 g의 종결식을 $R(f,g)$라고 하면 베조의 결과로부터 $R(f,g)=|Syl(f,g)|$ 가 된다. 더 나아가 실베스터는 $R(f,g)$를 f와 g의 근들의 결합으로 표현해냈다.

정리 4.1: 두 다항식 f와 g의 근들을 각각 r_i와 s_j $(1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n)$라고 하면 종결식은 $R(f,g)=|Syl(f,g)|=a_m^n b_n^m\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(r_i-s_j)$ 이다.

그러므로 f와 g가 0이 아닌 공통근을 갖는다면 적당한 r_i와 s_j가 서로 일치하게 되어 결과적으로 종결식 $R(f,g)=0$이다. 이와 같이 종결식은 근을 찾는 대신 근의 존재성을 먼저 알고자 할 때 효과적으로 사용될 수 있다. 예를 들어 두 개의 연립방정식

$$\begin{cases} x^2+6x+9=0 \\ 2x^4+4x^3-x^2+5x-1=0 \end{cases} \quad \text{와} \quad \begin{cases} x^3-3x^2+5x-3=0 \\ 2x^2-7x+5=0 \end{cases}$$

에서 종결식이 각각

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 5 & -1 \end{vmatrix}=841, \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & 5 \end{vmatrix}=0$$

이므로 근의 유무를 판정할 수 있다. 그 뿐만 아니라 고차방정식 $f(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$의 판별식을 종결식으로도 표현할 수 있다.

정리 4.2: 임의의 고차 방정식 $f(x)$의 판별식 $\Delta(f)$는 f와 도함수 f'의 종결식에 최고차항의 계수의 역수와 부호를 곱한 것이다. 다시 말해서

$$\Delta(f)=(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}a_m^{-1}R(f,f').$$

따라서 고차방정식의 판별식은 실베스터의 표현에 따라 쉽게 계산할 수 있다. 실제로

이차방정식 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ 일 때 판별식은

$$\Delta(f)=(-1)a_2^{-1}\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 \\ 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}=a_1^2-4a_0a_2$$

이 되어 잘 알려진 판별식이 된다. 마찬가지로 임의의 삼차, 사차방정식을 각각

$$g(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0,\quad h(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

라고 할 때,

$\Delta(g)=a_1^2a_2^2-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3+18a_0a_1a_2a_3-27a_0^2a_3^2$

이며

$$\Delta(h)=a_4^{-1}\begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

이 된다.

이와 같이 f 와 g 의 종결식은 $R(f,g)=a_m^nb_n^m\prod_{i=1}^m\prod_{j=1}^n(r_i-s_j)$ 이며 f 의 판별식은 $\Delta(f)=\prod_{1\le i<j\le m}(r_i-r_j)^2$ 이다. 그러므로 종결식이 0일 동치조건은 두 방정식이 하나의 근을 공유하는 것이며, 판별식이 0일 동치조건은 방정식이 중근을 갖는 것이다.

5 다변수 연립고차방정식으로의 확장

5.1 다변수 연립방정식 풀이

연립일차방정식계에서 가우스 소거법이 하던 역할처럼, 오일러의 소거(elimination)이론은 여러 개의 미지수를 갖는 연립방정식계에서 미지수 몇 개를 소거하여 간단한 연립체계를 만들 때 효과적으로 사용된다. 연립일차방정식 $F:\begin{cases} f_1=a_0x+a_1y=0 \\ f_2=b_0x+b_1y=0 \end{cases}$ 가 0이 아닌 근을 가질 조건은 행렬식 $a_0b_1-a_1b_0=0$ 이다. 이 행렬식이 f_1 과 f_2 의 종결식이므로,

$$R(F)=R(f_1,f_2)=0$$

일 때 F 는 0이 아닌 근을 가진다.

이제 당연히 제기되는 질문은 비선형방정식인 이변수 연립이차방정식

$$G:\begin{cases} g_1 = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 = 0 \\ g_2 = b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2 = 0 \end{cases} \quad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

이 언제 0이 아닌 근을 가질 수 있을까하는 것이다. 19세기의 실베스터(1840)나 케일리(1848)는 선형방정식과 선형변환을 비선형영역으로 확장할 수 있다고 확신하면서, 베조가 선형방정식을 풀 때 사용했던 방법을 그대로 반복하기 시작했다. 다시말해서 만일 G가 근을 갖는다면 적당한 실수들 r_1, r_2, s_1, s_2에 의해

$$\begin{aligned} g_1 &= a_0(x - r_1y)(x - r_2y) = 0 \\ g_2 &= b_0(x - s_1y)(x - s_2y) = 0 \end{aligned}$$

으로 표현할 수 있다. 그러면

$$\begin{aligned} a_0(x^2 + \frac{a_1}{a_0}xy + \frac{a_2}{a_0}y^2) = &\quad a_0(x^2 - (r_1 + r_2)y + r_1r_2y^2) \\ b_0(x^2 + \frac{b_1}{b_0}xy + \frac{b_2}{b_0}y^2) = &\quad b_0(x^2 - (s_1 + s_2)y + s_1s_2y^2) \end{aligned}$$

를 비교하여 근과 계수와의 관계를 얻을 수 있다.

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_0}, \quad r_1r_2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad s_1 + s_2 = -\frac{b_1}{b_0}, \quad s_1s_2 = \frac{b_2}{b_0}$$

그런데 G가 0이 아닌 근을 가지려면 g_1과 g_2가 공통근을 가져야 하므로

$$(r_1 - s_1)(r_1 - s_2)(r_2 - s_1)(r_2 - s_2) = 0$$

이며, 여기에 근과 계수와의 관계를 사용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} 0 &= a_0^2b_0^2(r_1 - s_1)(r_1 - s_2)(r_2 - s_1)(r_2 - s_2) \\ &= a_0^2b_0^2(r_1^2 - r_1(s_1 + s_2) + s_1s_2)(r_2^2 - r_2(s_1 + s_2) + s_1s_2) \\ &= a_0^2(b_0r_1^2 + b_1r_1 + b_2)(b_0r_2^2 + b_1r_2 + b_2) \\ &= a_2^2b_0^2 - a_1a_2b_0b_1 + (a_1^2 - 2a_0a_2)b_0b_2 + a_0a_2b_1^2 - a_0a_1b_1b_2 + a_0^2b_2^2 \\ &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = R(g_1, g_2) = R(G) \end{aligned}$$

따라서 G가 0이 아닌 근을 가질 동치조건은 여전히 종결식이 $R(G) = R(g_1, g_2) = 0$ 이 됨을 알아냈다.

5.2 다변수 연립고차방정식 풀이

오일러의 소거이론을 사용하여 주어진 방정식들의 여러 변수들 중에서 하나를 제거하는 방법은 이차곡면 연립방정식의 교점을 구하는 데까지 확장되었다. 즉 여러 개의 미지수를 갖는 연립방정식계에서 미지수 중 하나만을 변수로 하는 방정식으로 간주하고 다른 변수들은 계수방정식으로 하는 것이다. 예를 들어 이변수 연립이차방정식

$$H:\begin{cases} 9x^2+4y^2-18x+16y-11=0 \\ x^2+y^2-9=0 \end{cases}$$

를 생각해보자. y를 변수로 하고 오히려 x는 계수방정식의 변수로 하는 방정식

$$\begin{aligned} &4y^2+16y+(9x^2-18x-11)=0 \\ &y^2+(x^2-9)=0 \end{aligned}$$

으로 변형시키면 일변수 연립이차방정식의 경우처럼 행렬식이 0일 때

$$\begin{vmatrix} 4 & 16 & 9x^2-18x-11 & 0 \\ 0 & 4 & 16 & 9x^2-18x-11 \\ 1 & 0 & x^2-9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x^2-9 \end{vmatrix}=0$$

H의 근이 존재한다. 다시 말해서 이변수 연립이차방정식 문제가 일변수 사차방정식

$$25x^4-180x^3+574x^2-900x+625=0$$

문제로 변형된 것이다. 4차 방정식을 푸는 것도 쉬운 일은 아니지만 적어도 수치근사방법으로 근삿값을 계산할 수 있다. 이 근이 연립방정식의 근의 x좌표이다. 실제로 방정식 H는

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1 \\ (x-0)^2+(y-0)^2=9 \end{aligned}$$

로 표현되므로 타원과 원의 교점, 즉 원뿔곡선의 교점을 찾는 문제가 된다.

6 종결식의 발전

기원전 200년경 중국에서 시작된 연립일차방정식의 풀이에 대한 연구는 12세기경에 행렬의 개념을 사용하여 두 방정식에서 하나의 변수를 소거하는 풀이 기법으로 발전되었다. 이러한 기술은 17세기에 유럽에 알려져 기하 곡선의 연구에 사용되었는데, 대수방정식과 공통근의 연구가 기하곡선과 교점에 관한 문제로 자연스럽게 연결된 것이다.

종결식 연구에는 18세기의 걸출한 수학자인 오일러와 베조 등이 있었다. 두 개의 이

변수 방정식으로부터 종결식을 생성해 낸 오일러의 방법을 기반으로, 1764년에 베조는 n개 미지수를 갖는 n개 방정식으로 구성된 연립방정식의 종결식으로 확장시켰다. 오일러는 종결식의 차수에 대해 연구하였지만 베조는 고차 방정식에서 종결식의 차수를 사용하는 것은 의미가 없음을 알아냈다. 베조는 계수들의 치환(permutation)으로 만들어진 표(Bézout 표라고 부름)를 사용하여 연립일차방정식을 풀 수 있고, 특별히 연립방정식의 가해성(solvability)을 판정할 수 있다고 설명했다. 그는 $n = 4$인 경우를 완전히 해결한 후 고차 방정식으로 확장하여 일반 규칙을 만들고자 했지만 자신의 형편에서 연구에 몰두할 시간이 부족한 것을 무척 아쉬워했다.

"나보다 연구할 시간을 충분히 갖고 있는 행운의 사람이 이 일을 해 주기를 기대한다." 라고 진술했다[10, p. 32].

종결식이라는 이름을 처음 사용하고 그 분야에서 가장 중요한 역할을 한 베조를 단지 교육자이며 저술가로 평가하는 사람들도 있다. 그러나 베조는 18세기의 국가적 산물이었다. 당시 프랑스의 수학자들은 대학과 학문적 관계를 갖는 것이 아니라 교회나 군대에서 실제적인 응용을 하도록 요구되었다. 명망 있는 가문의 출신이었던 베조는 군대에서 가르치는 직업을 택했다. 학자적 업적이 두드러진 것은 아니었지만 그의 영향력은 아주 대단했다. 그는 미분기하학의 아버지라고 불리는 몽주(G. Monge)와 기하학에서 큰 업적을 남긴 카르노(L. Carnot)등을 가르쳤으며 그가 만든 교재는 프랑스는 물론 미국의 수학 교육에 큰 영향을 미쳤다. 그는 프랑스 혁명이 일어나기 몇 년 전인 1783년에 사망했다.

종결식 이론은 19세기에 들어서면서 케일리와 실베스터를 포함하여 야코비(Jacobi), 헤세(Hesse) 그리고 코우시(Cauchy)등을 거쳐 발전되었다. 1843년에 헤세가 사용한 소거방법은 1840년에 실베스터가 이미 사용했던 방법으로서, m차와 n차인 두 방정식의 종결식을 행렬식으로 계산했다. 첫 방정식의 계수를 행렬의 처음 m개의 행에 놓고 두 번째 방정식의 계수들을 그 다음 n개의 행에 위치하도록 만든 것이었다. 1853년에 실베스터는 m개 연립일차방정식의 계수들로 행렬식을 만들어 베조의 이름을 기리며 Bézoutiant라고 불렀다.

한편 종결식과 거의 유사한 개념을 가진 대상물을 드모르간(A. DeMorgan)은 eliminant라고 불렀는데[6, p. 143], 이는 연립방정식에서 하나의 변수를 소거하여 공통근(교점)을 찾는데 중요하게 응용되기 때문이다[9, p. 26]. 라그랑주(J.L. Lagrange)와 푸아송(S. Poisson) 역시 미지수 소거문제를 다루었다. 라그랑주는 공통의 중근을 가질 조건을 설명했고 푸아송은 연립방정식의 공통근을 갖는 대칭함수를 결정하는 방법을 연구했다.

라그랑주는 1773년에 이차형식 $ax^2 + 2bxy + cy^2$의 판별식은 x대신 $x + tx$를 대입

하여도 동일하다는 것을 알아냈다. 이러한 연구는 1800년도에 들어가면서 더욱 발전하여 가우스는 이변수(binary)와 삼변수(ternary) 이차형식의 종결식이 선형변환에 의해 변하지 않는 불변성임을 1801년에 증명했으며, 1841년에 부울(G. Boole)은 일반적인 경우의 종결식 역시 선형변환에 의해 불변성임도 밝혀냈다. 부울의 연구를 토대로 하여, 1845년에 케일리는 선형변환에서 불변성을 가지고 있는 다른 함수가 여전히 존재함을 발견했다. 그것들을 '초행렬식(hyperdeterminant)'라고 지칭하면서 그 함수들을 어떻게 찾는지를 보였으며, 이러한 발견으로 인해 불변성이론의 중요성이 널리 알려졌다. 1851년부터 케일리와 실베스터는 여러 논문들을 연속적으로 발표했다. 오늘날 사용되는 많은 용어들을 만들어 낸 실베스터는 불변성(invariant)이라는 이름도 만들었다(1851). 연립이차방정식의 풀이 방법으로 부터 시작된 종결식의 연구는 초행렬식 이론과 함께 고차방정식의 종결식 이론으로 발전되었다[8].

7 결론

수학교육에 커다란 업적을 남긴 클라인(F. Klein)과 프로이덴탈(H. Freudenthal) 모두는 역사발생적 원리에 따른 수학 교수학습을 강력히 주장하였다. 여기서 말하는 역사발생적(histo-genetic) 원리란 수학의 역사에서 나타나는 역사적 도식화의 과정을 단축하여 수학 교수학습에서 재현하게 하는 교수원리이다[1]. 그러나 이러한 주장과는 달리 오히려 우리나라 중학교에서 배우는 연립방정식은 단순히 가감법이나 대입법을 사용하여 기계적으로 해를 구하는 연습에 많은 시간을 쓰기 때문에 그 과정이 왜 그렇게 되는지를 모른 상태로 문제 풀기만 한다는 지적이 있어 왔다[3]. 이런 상황이 중고등학교에서 뿐 만아니라 대학수학과정에서도 똑같이 재현되고 있음은 수없이 목격되고 있다. 연립방정식의 풀이는 행렬, 행렬식과 직결되며 이는 선형대수학의 핵심 주제 중 하나인데, 신경희[2]는 선형대수 학습에서 학생들이 겪는 어려움의 원인은 학문의 공리적 접근에 기인한 탓이라고 분석했다. 이러한 어려움을 극복하기위해 조성민[4]은 선형대수를 개념 발달의 역사적 관점에 따라 지도함으로써 수학적 이해를 뒷받침할 수 있는 구조와 수학적 정의가 활용되는 논리를 제공할 수 있다고 주장했다.

이 논문에서는 연립방정식의 풀이를 집중적으로 논의해왔던 17세기와 18세기의 수학활동들을 역사발생적 관점에서 조명하였다. 연립일차방정식 풀이로부터 비선형 연립고차방정식 풀이로 도약하는 전환점은 역사발생적으로 볼 때 선형대수적 기법에 직결되어 있음을 보았다. 선형대수의 행렬이론은 자연과학의 여러 분야에 긴밀히 관계되어 있는데 이는 현대 과학의 많은 문제들이 선형대수적 방법에 크게 의존되어 있기 때문이다. 그러나 비선형의 문제를 취급해야하는 경우에 선형대수적 아이디어가 항상 성공적으로 적용되는 것은 아니다. 선형적 문제에서 비선형적 문제로 전이되는 과정에서, 일변수 일

차방정식의 판별식은 이변수 고차방정식의 종결식의 개념으로 확장되어 비선형 문제를 해결하는 중요한 도구가 되었음을 고찰하였다. 그 과정에서 수학자이며 교육자이며 또한 저술가였던 베조가 비선형 연립방정식을 풀어내기위해 수행했던 종결식 연구의 점진적 사고 발전의 과정을 살펴보았다.

본 논문의 결과를 중등과정의 연립방정식이나 한걸음 더 나아가 대학 선형대수학에 적용하는 역사발생적 원리에 따른 교수 학습 지도방안을 고려할 수 있다. 이는 학생들로 하여금 연립방정식 풀이의 역사적 발전단계를 재현시킴으로써 수학적 사고를 경험하게 하는 교수법이 될 것으로 보인다.

참고 문헌

1. 김연식 외, "수학교육학 용어 해설(3)", 대한수학교육학회 수학교육학연구, 5(2) (1995), 227–239.
2. 신경희, "선형대수의 역사와 교육과정—벡터공간과 행렬을 중심으로", 교과교육학연구, 8(1) (2004), 65–82.
3. 심상길, "교과서 연립방정식 단원에 지시된 수학사의 소재 분석 및 교수학적 분석", 대한수학교육학회 학교수학, 11(3) (2009), 415–429.
4. 조성민, "역사발생적 관점에서 본 행렬 지도의 재음미", 한국학교수학회논문집, 12(1) (2009), 99–114.
5. J. O'Connor, E. Robertson and Etienne Bézout, "Mac Tutor history of mathematics archive", `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bezout.html`.
6. K. Fink, 「A brief history of mathematics」, Cosimo classics, NY, 2007.
7. J. Gathen and J. Gerhard,*Modern computer algebra*, Cambridge University Press, 2003.
8. A. Morozov and S. Shakirov, "New and old results in resultant theory", Theoretical and Mathematical Physics, 163(2) (2010), 587–617.
9. M. Trott, *The mathematica guide book for symbolics*, Springer-Verlag, NY., 2006, retrieve from `www.mathematicaguidebooks.org`.
10. H. Wimmer, "On the history of the Bezoutian and the resultant matrix", Linear Algebra Appl., 128(1990), 27–34.

Choi Eun Mi
Department of Mathematics, Hannam University
E-mail: emc@hnu.kr

Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 2-3 May 2013

ABSTRACTS

HONG Sung Sa, HONG Young Hee, LEE Seung On 홍성사, 홍영희, 이승온 Mathematical Structures and SuanXue QiMeng 『數學的 構造와 算學啓蒙』

朱世傑의 算學啓蒙은 조선 산학의 발전에 가장 중요한 역할을 한 산서이다. 천원술을 비롯한 算學啓蒙의 내용은 조선 산학의 중요한 연구 대상이 되었다. 이 논문의 목적은 朱世傑이 수학적 구조를 강조하면서 算學啓蒙을 저술한 것을 보여서 조선 산학자들에게 수학적 구조에 대한 이해를 크게 확장한 것을 드러내는 것이다. 이와 함께 朱世傑이전의 산서에 나타나는 구조적 접근과 算學啓蒙의 접근을 비교하여 朱世傑의 접근이 뛰어나고 또 현대에 사용되는 구조적 접근과 일치하는 것을 보인다.

SONG Min Ho 송민호 A Study on Learning Environments for Euler's formula with activities 『'오일러 공식과 오일러 표수' 탐구 활동을 위한 학습 환경 연구』

오일러 공식과 오일러 표수는 다면체를 탐구하는 지표의 역할을 하기 때문에 위상적 불변량이라는 관점에서 중요한 수학적 개념이다. 우리나라는 3차부터 7차 교육과정까지 오일러 공식에 관한 내용이 교과서에 언급되었으나 이후 교육과정에서 제외되었다. 본 연구에서는 영재교육이나 방과후교실과 같은 비형식적(informal) 교육과정의 소재로 오일러 공식과 오일러 표수에 주목하였다. 본 연구에서는 먼저 오일러 공식과 오일러 표수가 가지는 의미를 수학사와 그 응용 분야, 교육과정에서 찾아본다. 이를 위해 오일러 공식과 오일러 표수의 역사, 다양한 수학 분야에 기여한 내용, 그리고 교육과정에 도입된 오일러 공식에 관한 내용을 살펴본다. 나아가 공식 암기가 아닌 탐구 활동의 대상으로 오일러 공식을 새롭게 조명할 수 있는 학습 환경을 제안하고 이를 이용한 활동을 예를 들어 살펴본다.

CHOI Eun Mi 최은미 Historical analysis of System of Equations—Focused on Resultant 『연립방정식 풀이의 역사발생적 고찰—종결식을 중심으로』

본 논문에서 연립일차방정식의 풀이법 연구로부터 시작하여 연립고차방정식의 해법 연구로 발전되어가는 과정을 역사발생적 관점에서 고찰한다. 연립일차방정식을 푸는데 중요한 역할을 하는 가우스 소거법과 비교하여 상대적으로 덜 알려져 있지만, 연립고차방정식에는 오일러의 소거이론과 베조의 종결식이 있다. 이러한 발전의 역사적 과정을 알아보고 특별히 종결식을 처음으로 정의한 베조의 연구 방법을 조명해 본다.

LEE Jung Oh 이정오 A Brief Study on Stanojevic's Works on the $\mathscr{L}^1$-Convergence 『Stanojevic의 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구의 소 계보 고찰』

본 논문은 저자의 선행 연구 결과에 따른 부가적인 연구로 '푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성'에 관한 많은 업적을 남긴 세계적인 수학자인 스타노제빅(Caslav V. Stanojevic)[1]을 중심으로 20세기 후반부터 21세기 초까지(1973–2002) 30년간 그의 연구결과를 순차적으로 고찰하여 푸리에 급수의 $\mathscr{L}^1$-수렴성 연구자들의 2012년까지 소 계보를 조사한다.

---

1) 스타노제빅(1928–2008) ; 세르비아 (구 유고슬라비아) 출신의 세계적인 수학자.