韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2013. 05. 제 52권, 제 2호, 217-230.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2013, Vol. 52, No. 2, 217-230.

문제 상황과 연결된 분수 나눗셈의 교과서 내용 구성 방안

신준식(춘천교육대학교)

Ⅰ. 서론

자연수 또는 분수의 나눗셈에 대한 연구가 많이 이루어진 것으로 미루어 초등학생들이 이 주제를 학습하는 데 어려움이 많이 있다는 것을 짐작할 수 있고, 그 어려움은 결국 교사의 교수 방법에서 초래된다고 할 수 있다. Hasemann, Streefland, Freudenthal, Hiebert & Behr, Kieren, Armstrong & Bezuk 등도 분수에 대한 학습에서 개념 자체의 어려움보다는 적절치 못한 수업 방법으로 인하여 학습을 더 어렵게 만들고 있음을 지적하고 있다(박정임, 2001). 특히, Kieren(1993), Kamii (1999)는 이해가 수반되지 않은 절차적인 지식의 반복 학습으로 인하여 수와 연산에 대한 감각을 발달시킬 수 있는 기회를 놓치고 있다고 하였으며, 분수의 나눗셈은 뒤집어 곱하기(역수의 곱셈)로 해결한다는 최종 목표에 도달하기 급급하여 많은 학생들은 왜 그런지 이해하지 못하는 경우도 있고(백선수, 2004; 박혜경, 2003, Siebert, 2002), 2007개정 교육과정의 수학 교과서(교육과학기술부, 2011a, 2011b)에 전개된 분수의 나눗셈을 보면 탈상황적인 기호 조작에 의하여 분수의 나눗셈을 역수의 곱셈으로 귀결시키고 있다. 이로 인하여 많은 학생들이 개념적인 이해를 바탕으로 한 학습보다는 기계적인 절차적 지식을 획득할 가능성이 높다(전평국, 박혜경, 2003). 따라서 현행 교과서처럼 '분수의 나눗셈을 역수의 곱셈'으로 해결하는 나눗셈의 알고리즘은 재고되어야 한다.

또, 많은 초등학생들은 '굵기가 같은 철근 $\frac{3}{4}$m의 무게가 $2\frac{3}{5}$kg이다. 이 철근 1m의 무게는 얼마인가?' 또는 '가진 돈의 $\frac{3}{4}$이 6000원이다. 가진 돈은 얼마인가?' 등의 문제를 해결하는 데 어려움을 가지고 있으며, 이 문제를 $2\frac{3}{5} \div \frac{3}{4}$, $6000 \div \frac{3}{4}$의 식으로 해결하면 그 이유를 모를 뿐만 아니라 대부분의 교사 또는 예비교사들도 $\frac{3}{4} : 2\frac{3}{5} = 1 : x$ 라는 비례식이나 그림을 그려서 해결하고 있다. 이런 유형의 문제는 단위의 크기를 묻는 문제이므로 나눗셈으로 해결할 수 있음을 알아야 할 것이다.

따라서 본 연구에서는 분수 나눗셈의 문제 상황과 그에 적절한 알고리즘을 연결시켜 학습함으로써 분수 나눗셈을 개념적으로 이해할 수 있도록 교과서 내용의 구성 방안에 대하여 알아보고자 한다.

* 접수일(2013년 04월 25일), 수정일(2013년 05월 12일), 게재확정일(2013년 05월 18일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 분수 나눗셈, 포함제, 등분제, 나머지

Ⅱ. 이론적 배경

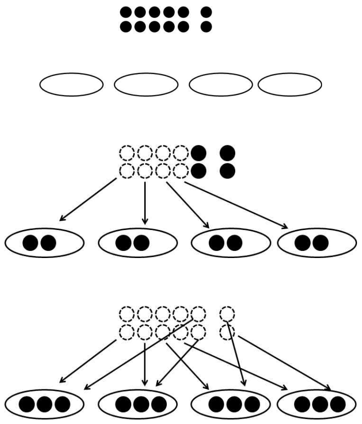
나눗셈은 기본적으로 자연수 상황에서 이루어지고, 유리수(분수)의 상황으로 확장되지만 나눗셈의 개념은 동일하다. 따라서 자연수 범위에서 나눗셈의 개념에 대하여 알아보고 이를 분수로 확장하고자 한다.

덧셈이 이루어지는 상황은 첨가와 합병이고, 뺄셈이 이루어지는 상황은 구잔과 구차(비교)이다. 곱셈이 이루어지는 상황은 동수누가(묶음), 배열, 비율, 조합, 넓이 등이고, 나눗셈이 이루어지는 상황은 등분 상황과 측정(포함)상황이다(Baroody, 1998).

1. 자연수 나눗셈의 등분 상황

등분 상황은 전체의 양을 몇 개의 집단으로 똑같이 나누어주는 것을 의미하는데 시행착오를 거쳐서 모델화한다. 예를 들어, '빵 12개를 4명에게 똑같이 나누어주면 1사람이 몇 개씩 가지게 되는가?'의 문제를 해결하려면 바둑돌 12개를 놓고, 4개의 집단을 만든 다음, 각 집단에 1개씩 주거나 2개씩 놓는다. 그래도 바둑돌이 남아 있으

므로 다시 1개나 2개씩 놓는다. 그러면 한 집단에 3개씩 놓이게 되므로 답은 3개이다. 따라서 등분 상황은 시행착오를 거쳐서 해결할 수 있다.



[그림 1] 등분상황의 나눗셈
[Fig. 1] Partitive division

2. 분수 나눗셈의 등분 상황

자연수 나눗셈은 등분 상황으로 도입할 만큼 일상생활에서 흔히 경험할 수 있지만 분수의 나눗셈에서는 그렇지 못하다. 2등분, 3등분 등 자연수에서는 등분이라는 용어가 적절하지만 $\frac{1}{2}$등분, $\frac{4}{5}$등분 등 분수에서는 적절하지 않다. 이런 의미에서 박교식 등(2004)은 분수에서는 (분수)÷(자연수)일 경우에만 등분 상황이 적절하고, (분수)÷(분수)인 경우에는 등분 상황이라기보다는 단위비율의 결정 상황이라고 하는 것이 적절하다고 하였다. 예를 들면, '길이가 $2\frac{3}{4}$m인 끈을 5명에게 똑같이 나누어주면 1사람이 몇 m를 가지게 되는가?'의 문제는 등분 상황으로서 적절하지만 '굵기가 같은 철근 $\frac{3}{4}$m의 무게가 $2\frac{3}{5}$kg이다. 이 철근 1m의 무게는 얼마인가?'의 문제는 등분 상황이라고 일컫기에 적절하지 않다는 것이다.

그러나 자연수 나눗셈의 등분 상황에서 계산 결과는 몫을 나타내지만 단위의 크기 또는 비율을 나타내기도 한다는 점에서 등분 상황의 특수한 경우 또는 등분 상황의 확장이라고 할 수 있다. 예를 들면, '사과 30개를 6봉지에 똑같이 나누어담으면 1봉지에 몇 개씩 들어가는가?'의 문제는 1봉지의 크기를 묻고 있으며, 5개는 1봉지라는 단위의 크기를 의미한다. 또, '40km의 거리를 2시간에 가려면 1시간에 얼마나 가야하는가?'의 문제 상황에서 몫인 20(km/시)는 비율 즉, 속력을 의미한다.

김명운, 장경윤(2009)은 분수 나눗셈에 적절한 등분 상황을 다음과 같이 제시하였다.

> 떡을 만들려고 쌀 $\frac{4}{5}$kg을 떡시루에 넣었더니 떡시루의 $\frac{2}{3}$만큼 채워졌다. 떡시루에 쌀을 가득 채우면 쌀의 무게는 몇 kg인가?

위의 문제는 떡시루에 들어가는 쌀의 무게, 즉 단위의 크기를 구하는 상황이다.

'굵기가 같은 철근 $\frac{3}{4}$m의 무게가 $2\frac{3}{5}$kg이다. 이 철근 1m의 무게는 얼마인가?'의 등분 상황 문제를 해결하는 방법에 대하여 알아보자.

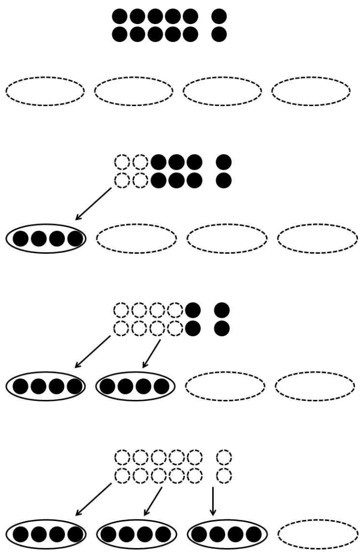
1m의 무게, 즉 단위의 크기를 묻고 있으므로 이 문제를 해결하기 위해서는 $2\frac{3}{5}\div\frac{3}{4}$의 식을 세울 수 있어야 한다. 이를 직접 계산하기 어려우므로 쉽게 계산할 수 있는 방법을 생각해야 한다. 즉, 소수의 나눗셈 4.35÷0.4를 직접 계산하기 어려우므로 나누어지는 수와 나누는 수에 각각 10을 곱하여 43.5÷4로 계산하였다. 같은 방법으로 분수의 나눗셈에서 나누는 수가 1이면 계산하기 편리하다는 생각에서 나누어지는 수와 나누는 수에 각각 $\frac{4}{3}$를 곱한다. 즉,

$$\begin{aligned} 2\frac{3}{5}\div\frac{3}{4} &= \frac{13}{5}\times\frac{4}{3}\div\frac{3}{4}\times\frac{4}{3} \\ &= \frac{13}{5}\times\frac{4}{3}\div 1 \\ &= \frac{13}{5}\times\frac{4}{3} \end{aligned}$$

수학과 교육과정으로 인하여 학생들에게 역수라는 용어를 사용하지 않지만 '분수의 나눗셈은 역수의 곱셈'이라는 절차적인 지식 중심, 기호 조작 중심의 학습보다는 문제 상황과 기호(알고리즘)가 의미 있게 연결되어 분수의 나눗셈을 개념적으로 이해할 수 있을 것이다.

3. 측정 상황

측정 상황은 주어진 단위로 대상의 양을 측정하는 활동이며, 이를 포함 상황이라고도 한다. 이 상황은 전체의 양을 한 집단에 지정된 양만큼 나누어주거나 주어진 단위로 대상을 측정하는 것을 의미하는데 할당이나 동수누감으로 모델화한다. 예를 들어, ‘빵 12개를 1사람에게 4개씩 주면 몇 사람에게 줄 수 있는가?’의 문제를 해결하려면 첫째 사람에게 4개를 주고, 둘째 사람에게 4개를 주고, 셋째 사람에게 4개를 주면 남은 것이 없으며, 답은 3사람이다.



[그림 2] 측정상황의 나눗셈
[Fig. 2] Measurement division

또, 주어진 단위로 측정하였을 때 단위의 수를 묻거나 대상이 주어진 단위의 몇 배인가를 묻는 것이다. 예를 들어, ‘40km의 거리를 시속 20km로 달리면 얼마나 걸리는가?’ 또는 ‘철수는 사탕을 27개, 영희는 9개 가지고 있다. 철수가 가지고 있는 사탕의 수는 영희의 몇 배인가?’ 등의 상황은 40km를 20km의 단위로 측정하면 몇 단위나 되는가 또는 9개를 기준으로 하였을 때 27개를 비교하는 상황이다.

4. 분수 나눗셈의 측정 상황

일상생활에서 분수 나눗셈의 측정 상황은 등분 상황보다 자연스럽게 받아들여진다. 즉, ‘길이가 $1\frac{3}{4}$m인 끈을 $\frac{1}{2}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?’ 또는 ‘철수는 끈을 $1\frac{3}{4}$m가지고 있고, 영희는 $\frac{1}{2}$m가지고 있다. 철수가 가진 끈의 길이는 영희의 몇 배인가?’ 등의 문제 상황은 포함제로서 적절하다. 특히, ‘몇 배인가?’의 물음은 결과가 자연수이거나 분수이거나 상관없지만 ‘몇 도막인가?’라는 물음에는 결과가 $3\frac{1}{2}$도막, $1\frac{3}{4}$도막처럼 자연수가 아닐 경우에는 부자연스럽다.

‘길이가 $1\frac{4}{8}$m인 끈을 $\frac{3}{4}$m씩 자르면 몇 도막이 되는가?’의 측정 상황의 문제를 해결하는 방법에 대하여 알아보자.

측정하는 상황이므로 측정 단위가 같아야 한다. 즉, $1\frac{4}{8}$을 $\frac{3}{4}$으로 재려면 단위를 같게 만들어야 한다. 따라서 분모를 같게 하여 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} 1\frac{4}{8} \div \frac{3}{4} &= \frac{12}{8} \div \frac{6}{8} \\ &= \frac{12 \div 6}{8 \div 8} \\ &= 12 \div 6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

또, 분모가 다른 분수의 나눗셈 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$의 계산 방법은 분수의 곱셈 방법에서 유추할 수 있다. 즉, 분수의 곱셈은 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱하였듯이 분수의 나눗셈도 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 계산하면 된다. 이를 직접 계산하면 번분수가 나타나므로 초등학교 수준을 벗어나고, 계산을 편리하게 하기 위하여 분모를 같게 하면 분모끼리 계산에서 분모는 1이 되어 결국은 분자끼리의 나눗셈이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} &= \frac{3\times3}{4\times3} \div \frac{5\times2}{6\times2} \\ &= \frac{9}{12} \div \frac{10}{12} \\ &= 9 \div 10 \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

이제까지의 내용을 요약하면 분수 나눗셈이 이루어지는 것은 자연수의 나눗셈과 마찬가지로 등분 상황과 측정 상황이다. 등분 상황에 적절한 알고리즘은 역수의 곱셈이고, 측정 상황에서는 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 계산하는 것이다.

현행 교과서에서는 문제 상황과 상관없이 '분수의 나눗셈은 역수의 곱셈'이라는 알고리즘으로 귀결시킴으로써 학생들이 그 의미를 충분히 이해하지 못하였을 뿐만 아니라 학습에 흥미를 잃고 어려워한다(전평국, 2003).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 분수 나눗셈에 대한 학습이 이루어지는 5학년 2학기, 6학년 1학기 교과서(교육과학기술부, 2011a; 2011b)와 교사용지도서(교육과학기술부, 2011c; 2011d)이다.

분수의 나눗셈은 5학년 2학기 '2. 분수의 나눗셈'과 6학년 1학기 '1. 분수의 나눗셈' 단원에서 학습하도록 구성되어 있다.

2. 자료 분석 방법

분수 나눗셈에 대한 교과서의 분석 관점은 문제 상황과 알고리즘의 연결성, 교과서 내용 전개 방법이며, 이를 교사용 지도서의 내용 및 선행 연구 결과에 근거하여 분석한다.

1) 문제 상황과 알고리즘의 연결성

학생들이 수학을 어려워하는 이유 중의 하나는 수학의 언어를 이해하기 못하기 때문이다(Baroody, 1998). 수학의 언어는 고도의 추상성을 지니고 있기 때문에 많은 노력을 기울여야 하는데 조작 활동은 추상화를 통한 이미지 형성에 기여한다. 교사용지도서(교육과학기술부, 2011c; 2011d)의 초등학교 수학교육의 방법에 의하면 구체적인 조작 활동을 토대로 학습이 이루어져야 하고, 학생이 이해할 수 있는 상황에서 개념이나 문제를 찾아 학습하도록 해야 하고, 시각적, 운동적, 언어적 표현 등 다양한 표현을 이용하여 수학을 지도해야 하고, 추론을 통하여 수학적 원리를 발견하게 하는 것이 중요하다고 하였다.

2) 교과서 내용 전개 방법

수학교과서의 편찬 방향은 생활 주변 현상이나 학생들에게 친숙한 상황을 소재를 활용하고, 학생들의 발달 수준을 고려하여 내용을 이해하기 쉽게 구성하고, 수학적 추론 능력과 문제 해결 능력을 신장시키는 데 적합하도록 구성하는 것이다(교육과학기술부, 2011c; 2011d). 교과서 구성 체제와 내용 선정에서는 불필요하게 중복되거나 비약되지 않도록 하며, 생활 주변 현상을 포함한 여러 가지 상황을 학습 소재로 활용하도록 하였다.

단원별 내용 전개는 대체로 주제, 생각열기, 활동, 약속, 확인하고 다지기, 문제를 풀어보시오 등의 과정을 거쳤다. 생각열기에서는 학습 주제에 맞는 상황을 제시하고, 상황을 중심으로 생각하게 하고, 생각한 것을 서로 토론하도록 하고 있으며, 단원의 1차시에 배정되었다. 활동은 학습 주제를 실현하기 위하여 구체적인 물건으로 조작하는 활동, 직관적으로 해결하는 활동, 추상적인 활동 등이 제시되었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

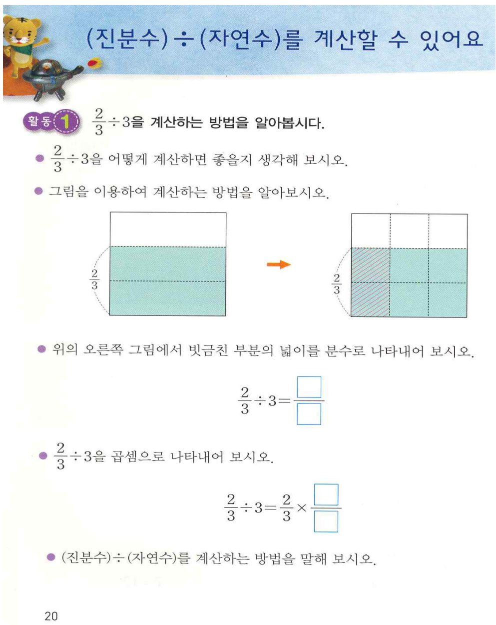
1. 교과서의 내용 구성 분석

분수의 나눗셈은 5-2(교육과학기술부, 2011a)에서 등분 상황을 통하여 처음 도입하고 6-1(교육과학기술부, 2011b)의 대분수 나눗셈으로 끝을 맺고 있다. 5-2에서는 (분수)÷(자연수), 6-1에서는 (분수)÷(분수)를 학습하도록 내용이 전개되어 있다. 이를 자세히 살펴보면 다음과 같다.

[표 1] 분수 나눗셈에 대한 교과서 내용 구성
[Table 1] Sequence of textbook of fraction division

단원	차시	내용
5-2 2. 분수의 나눗셈	1	1÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기
	2	(자연수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기
	3	(진분수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기
	4	(가분수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기

	5	(대분수)÷(자연수)를 곱셈으로 나타내기
	6	분수와 자연수의 혼합계산
	7	단원평가
	8	탐구활동
6-1 1. 분수의 나눗셈	1	(자연수)÷(단위분수)의 계산 방법
	2	동분모 진분수끼리 나눗셈 계산 방법
	3	이분모 진분수의 나눗셈 계산 방법
	4	(자연수)÷(진분수)의 계산 방법
	5	대분수 나눗셈의 계산 방법
	6	분수의 나눗셈 활용
	7	단원평가
	8	탐구활동
	9	문제해결, 놀이마당


(진분수)÷(자연수)를 계산할 수 있어요

활동 1 $\frac{2}{3}\div 3$을 계산하는 방법을 알아봅시다.

• $\frac{2}{3}\div 3$을 어떻게 계산하면 좋을지 생각해 보시오.

• 그림을 이용하여 계산하는 방법을 알아보시오.

• 위의 오른쪽 그림에서 빗금친 부분의 넓이를 분수로 나타내어 보시오.

$\frac{2}{3}\div 3=\frac{\square}{\square}$

• $\frac{2}{3}\div 3$을 곱셈으로 나타내어 보시오.

$\frac{2}{3}\div 3=\frac{2}{3}\times\frac{\square}{\square}$

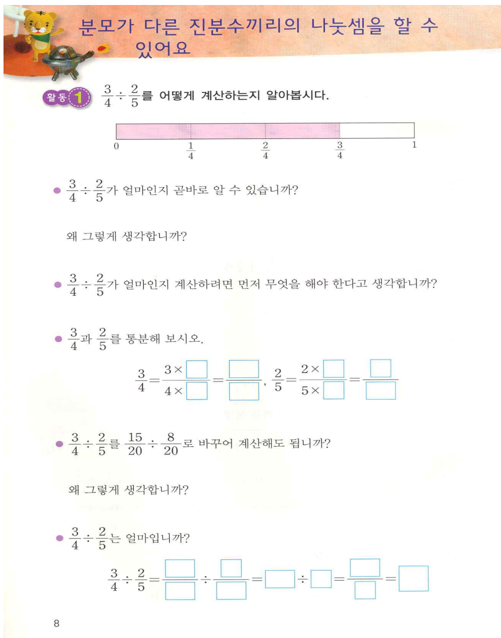
• (진분수)÷(자연수)를 계산하는 방법을 말해 보시오.

20

[그림 3] 수학 5-2(교육과학기술부, 2011a)

[Fig. 3] Mathematics 5-2(Ministry of Education, 2011a)

5-2의 2단원 1차시에서는 1m의 색 테이프를 똑같이 4개로 나누었을 때 1개의 길이를 알아보는 등분상황으로 분수의 나눗셈을 도입하고 $1\div4=1\times\frac{1}{4}$로 해결할 수 있음을 학습하도록 하였고, 2차시에서도 등분 상황을 제시하면서 $2\div3=2\times\frac{1}{3}$로 해결할 수 있도록 내용을 구성하였으며, 3차시와 4차시에서는 문제 상황도 제시하지 않고 $\frac{2}{3}\div3=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$이라는 절차적 지식에 의한 학습을 강조하고 있다(그림 3). 5차시에서는 실험을 위하여 소금 $1\frac{1}{2}$kg을 6모둠이 똑같이 나누는 등분 상황을 제시하면서 (대분수)÷(자연수)를 도입하였다.


분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 할 수 있어요

활동 1 $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 어떻게 계산하는지 알아봅시다.

0 $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ 1

• $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$가 얼마인지 곧바로 알 수 있습니까?

왜 그렇게 생각합니까?

• $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$가 얼마인지 계산하려면 먼저 무엇을 해야 한다고 생각합니까?

• $\frac{3}{4}$과 $\frac{2}{5}$를 통분해 보시오.

$\frac{3}{4}=\frac{3\times\square}{4\times\square}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{2}{5}=\frac{2\times\square}{5\times\square}=\frac{\square}{\square}$

• $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$를 $\frac{15}{20}\div\frac{8}{20}$로 바꾸어 계산해도 됩니까?

왜 그렇게 생각합니까?

• $\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}$는 얼마입니까?

$\frac{3}{4}\div\frac{2}{5}=\frac{\square}{\square}\div\frac{\square}{\square}=\square\div\square=\frac{\square}{\square}=\square$

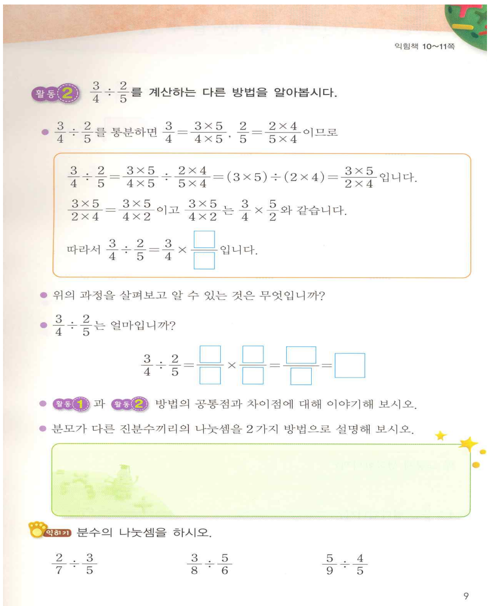
8

[그림 4] 수학 5-2(교육과학기술부, 2011b, p.8)

[Fig. 4] Mathematics 5-2(Ministry of Education, 2011b, p.8)

5학년 2학기에서는 등분 상황에서만 분수 나눗셈을 학습하도록 하였다.

6-2의 1단원 1차시에서는 3m의 철사를 $\frac{1}{2}$m씩 나누어주면 몇 사람에게 줄 수 있는지를 알아보는 측정 상황으로 분수 나눗셈을 도입하였다.


익힘책 10~11쪽

활동 2 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$를 계산하는 다른 방법을 알아봅시다.

- $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$를 통분하면 $\frac{3}{4} = \frac{3\times5}{4\times5}$, $\frac{2}{5} = \frac{2\times4}{5\times4}$이므로

$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3\times5}{4\times5} \div \frac{2\times4}{5\times4} = (3\times5)\div(2\times4) = \frac{3\times5}{2\times4}$입니다.

$\frac{3\times5}{2\times4} = \frac{3\times5}{4\times2}$이고 $\frac{3\times5}{4\times2}$는 $\frac{3}{4}\times\frac{5}{2}$와 같습니다.

따라서 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{\square}{\square}$입니다.

- 위의 과정을 살펴보고 알 수 있는 것은 무엇입니까?
- $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$는 얼마입니까?

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

- 활동 1 과 활동 2 방법의 공통점과 차이점에 대해 이야기해 보시오.
- 분모가 다른 진분수끼리의 나눗셈을 2가지 방법으로 설명해 보시오.

익히기 분수의 나눗셈을 하시오.

$\frac{2}{7} \div \frac{3}{5}$ $\frac{3}{8} \div \frac{5}{6}$ $\frac{5}{9} \div \frac{4}{5}$

9

[그림 5] 수학 5-2(교육과학기술부, 2011b, p.9)
[Fig. 5] Mathematics 5-2(Ministry of Education, 2011b, p.9)

그러나 2차시부터 5차시까지는 문제 상황도 없이 분수의 나눗셈을 제시하고 이를 해결하기 위하여 기호 조작을 중심으로 한 알고리즘을 제시하였다. 2차시에서는 동분모 분수끼리의 나눗셈 방법은 분자끼리 나눗셈으로 해결한다는 것을 제시하였다(교육과학기술부. 2011d). 이것은 측정 상황은 동수누감으로 해결할 수 있으므로 분모를 같게 한 다음에 분자의 나눗셈으로 해결하는 방법이다. 3차시에서도 문제 상황 없이 분모가 다른 분수의 나눗셈은 통분하여 분자의 나눗셈으로 해결하는 것을 제시하고(그림 4), 곧이어 기호 조작을 통한 역수의 곱셈을 유도하고 있다(그림 5). 4차시와 5차시 역시 문제 상황도 없이 분수 나눗셈을 제시하고 기호 조작을 통한 역수의 곱셈으로 해결할 것을 유도하고 있다.

2. 교과서 내용 구성의 문제점

이해가 수반되지 않으면서 절차적인 지식에 의존하여 문제를 해결하는 가장 대표적인 것이 분수의 나눗셈이라고 할 수 있다. Hiebert 등은 어떤 것을 이해한다는 것은 그것이 다른 것들과 어떻게 관련되고 연결되는지를 아는 것이라고 하였듯이(김경미, 황우형, 2012), 학생들의 이해를 돕기 위해서는 학습하고자 하는 새로운 지식이 기존의 지식과 연결될 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다. 따라서 분수의 나눗셈은 자연수의 나눗셈과 연결지을 수 있을 때 의미있는 학습이 될 것이며, Baroody (1998)도 분수 연산을 학습할 때 자연수의 연산을 의미있게 유추할 것을 권장하고 있다. 특히, Graeber & Tanehaus(1993)는 요즘의 교과서는 분수의 나눗셈과 곱셈의 알고리즘에 치중하고 있으며, 자연수의 연산 의미가 분수가 포함된 상황에 어떻게 적용되는가에 대해서는 거의 관심이 없음을 지적하고 있다. 이런 관점에서 분수 나눗셈에 대한 교과서 내용 구성의 문제점을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 나눗셈에 대한 학습 내용이 너무 세분화 되어 있다. [표 1]에서 보는 바와 같이 5-2의 1차시와 2차시를 구별한 것은 의미가 없을 뿐만 아니라 학습에 대한 흥미를 잃게 하고 수업이 지루하게 전개될 수밖에 없다. 또, 3~5차시는 2차시로 축소하여 내용을 전개하는 것이 바람직하겠다. 교사용 지도서에 제시된 교과서의 편찬 방향에서 불필요한 내용의 중복을 피한다(교육과학기술부, 2011c)는 점에서 재고해야 할 것이다.

둘째, 분수의 나눗셈은 역수의 곱셈이라는 알고리즘을 강조하고 있다. 5-2의 분수 나눗셈 1차시부터 5차시까지 나눗셈을 역수의 곱셈으로 나타낼 것을 강조하고 있으며, 6-1에서도 동분모 분수의 나눗셈 알고리즘은 짧은 시간동안만 제시하고 바로 역수의 곱셈으로 유도하고 있다. [그림 4]의 활동 1에서는 상황도 없는 그림을 제시하면서 분모를 같게 하여 측정 상황에 적절한 알고리즘을 제시하였으며, 곧이어 활동 2에서는 역수의 곱셈에 의한 나눗셈 알고리즘을 제시하고 있다.

셋째, 문제 상황과 연결되지 않은 채 기호 조작을 통한 문제해결을 강조하고 있다. [그림 3], [그림 4]처럼 문제 상황도 없는 분수 나눗셈을 제시하고 기호 조작을 통하여 해결하게 함으로써 문제 상황-활동-기호를 연결짓

지 못하고 있다. 측정 상황의 알고리즘과 등분상황의 알고리즘이 다름에도 불구하고 모두 역수의 곱셈으로 귀결시키고 있어서 측정 상황의 나눗셈을 등분 상황의 역수의 곱셈으로 해결하는 모순을 낳고 있다. 따라서 풍부한 문제 상황을 제시하고 그에 적절한 알고리즘에 의하여 해결할 수 있도록 교과서 내용이 구성되어야 한다.

넷째, 문제 상황 제시가 매우 부족하다. 5-2의 분수 나눗셈에서는 3문제, 6-1의 분수 나눗셈에서는 7문제 등 모두 10문제만 제시되어 있다(문제를 풀어봅시다는 제외). 6-2의 경우, 6차시 분수 나눗셈의 활용에 제시된 문장제 6문제를 제외하면 문장제는 단 1문제이다. 이것은 기호 조작을 통한 알고리즘을 익히는 데 초점이 맞추어져 있음을 알 수 있다. 5-2에 제시된 3문제는 모두 등분상황이고, 6-1에 제시된 6문제는 포함 상황이다(1문항은 넓이 관련 문제임). 특히, 6-2에 제시된 문제는 포함 상황임에도 불구하고 역수의 곱셈으로 해결하고 있어 알고리즘의 의미를 상실하고 있다.

다섯째, 분수 나눗셈이 이루어지는 등분 상황과 측정 상황을 좁게 해석하고 있다. 등분은 똑같이 나누는 상황만을, 측정 상황은 측정한 횟수만을 강조하고 있어서 다양한 문제 상황을 이끌어내지 못하고 있다. 등분 상황이 똑같이 나누는 상황임은 분명하지만 그 결과가 무엇을 의미하는 지에도 유의해야 한다. 즉, 등분 상황의 나눗셈 결과는 단위의 크기뿐만 아니라 비율을 의미하므로 비율을 구하는 문제(예, 40km인 거리를 2시간에 가려면 1시간에 얼마나 가야하는가?)는 나눗셈 상황임을 이해할 수 있도록 해야 한다. 또, 측정 상황의 나눗셈 결과는 단위의 수뿐만 아니라 단위의 몇 배를 의미하므로 기준량에 대한 비교하는 양의 크기를 구하는 문제(예, 우유를 영희는 2L, 철수는 6L가지고 있다. 철수가 가지고 있는 우유는 영희의 몇 배인가?)는 나눗셈 상황임을 이해할 수 있도록 해야 한다. 6학년 1학기의 교사용지도서(교육과학기술부, 2011d)에서는 나누는 수가 분수인 등분제는 생각할 수 없다고 설명한 것은 나눗셈의 결과를 좁게 해석하고 있다는 증거이다.

3. 교과서 내용 구성 방안

현행 교과서를 바탕으로 앞에서 언급한 분수 나눗셈의 문제점을 해결할 수 있는 5학년과 6학년의 학습 내용을 다음과 같이 구성하고자 한다.

1) 단원(차시) 구성

분수의 나눗셈이 단계별로 세분화 되어 있기 때문에 학습에 대한 흥미를 잃기 쉽고, 지루해지기 쉽다. 따라서 지나친 세분화를 피하고 문제 상황 중심으로 구성하며, 5학년에서는 분수 나눗셈의 개념과 알고리즘을 익히는 데 초점을 맞추고 6학년에서는 대분수나 가분수의 나눗셈에 초점을 맞추었다. 차시의 순서와 학습 내용은 고정적이지 않으며 상황과 난이도에 따라 재배열할 수 있다.

현행 교과서의 5학년 2학기에서는 등분제 상황, 6학년 1학기에서는 포함제 상황의 나눗셈을 학습하였지만 본 연구에서는 동시에 학습하게 하여 분수 나눗셈의 개념을 통합시킬 수 있도록 하였다.

[표 2] 분수 나눗셈에 대한 교과서 내용 구성(안)
[Table 2] An Idea for sequence of textbook of fraction division

단원	차시	내용
5-2 2. 분수의 나눗셈	1	측정 상황의 동분모 분수끼리 나눗셈
	2	측정 상황의 이분모 분수끼리 나눗셈
	3	등분 상황의 (진분수)÷(자연수)
	4	등분 상황의 진분수끼리 나눗셈
	5	분수 나눗셈의 활용
	6	단원평가
	7	탐구활동
6-1 1. 분수의 나눗셈	1	측정 상황의 (가분수, 또는 대분수)÷(자연수)
	2	측정 상황의 (가분수 또는 대분수)÷(가분수 또는 대분수)
	3	측정 상황에서 나머지가 있는 나눗셈
	4	등분 상황의 (가분수 또는 대분수)÷(자연수)
	5	등분 상황의 (가분수, 또는 대분수)÷(가분수 또는 대분수)
	6	단원평가
	7	탐구활동

2) 내용 구성

상황과 기호가 의미 있게 연결되었을 때 학생들은 추상적인 수학의 언어를 이해하고 사용할 수 있을 것이다.

따라서 자연수의 나눗셈이 이루어지는 상황에 맞추어 분수 나눗셈을 도입하고, 상황과 기호가 의미 있게 연결될 수 있도록 내용을 구성한다.

내용 구성의 예를 몇 가지 제시하면 다음과 같다.

<5-2-1차시> 측정 상황의 동분모 분수끼리 나눗셈

$\frac{4}{6}$m의 끈을 1사람에게 $\frac{1}{6}$m씩 나누어주면 몇 사람에게 줄 수 있는가?

측정 상황은 일정한 단위로 측정하여 단위의 수를 알아보는 것이므로 측정을 하려면 우선 단위가 같아야 함을 알고 있어야 한다. 또, 분수의 곱셈 방법을 유추하여 나눗셈의 해결 방법을 찾을 수 있다.

이 문제는 $\frac{4}{6}$m의 끈을 $\frac{1}{6}$m의 단위로 재었을 때 단위의 수를 묻는 측정(포함) 상황이다. 따라서 $\frac{4}{6} \div \frac{1}{6}$이라는 식을 세울 수 있고, 계산 방법은 $4 \div 1 = 4$임을 직관적으로 알 수 있다.

또, 분수의 곱셈 방법을 유추하여 나눗셈 방법을 생각할 수 있다. 즉, 분수 곱셈에서 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 곱하였으므로 나눗셈에서도 분자끼리, 분모끼리 나누면 되겠다는 유추가 가능하다.

$$\frac{4}{6} \div \frac{1}{6} = \frac{4 \div 1}{6 \div 6} = 4 \div 1 = 4$$

분모가 같을 경우에는 분모는 1이 되므로 결국은 분자끼리의 나눗셈으로 귀결된다.

<5-2-2차시> 측정 상황의 이분모 분수끼리 나눗셈

영희는 주스 $\frac{2}{5}$L를 가지고 있고, 철수는 $\frac{4}{6}$L를 가지고 있다. 영희가 가지고 있는 주스는 철수가 가지고 있는 주스의 얼마인가?

철수가 가지고 있는 주스를 기준 1로 하였을 때, 영희의 주스는 얼마인지를 묻는 측정 상황의 문제이다. 단위를 같게 만들어야 측정이 가능하다는 것을 알고, 분모를 같게 만든 다음, 위와 같은 방법으로 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 나눗셈을 한다.

$$\begin{aligned}\frac{4}{6} \div \frac{2}{5} &= \frac{4\times5}{6\times5} \div \frac{2\times6}{5\times6} \\ &= \frac{20}{30} \div \frac{12}{30} \\ &= 20 \div 12 \\ &= \frac{20}{12}\end{aligned}$$

답은 $\frac{20}{12} = \frac{5}{3} = 1\frac{1}{3}$이다.

또, 분자와 분모끼리 직접 계산하면 분모가 서로 다르고, 나누어떨어지지 않으므로 계산이 어렵게 된다. <6-1-1차시>의 해결에서 알 수 있듯이 분모를 같게 하면 분모는 1이 되므로 분자끼리의 나눗셈이 되어 편리하게 계산할 수 있다.

한편, 이 문제를 '철수가 가지고 있는 주스는 영희가 가지고 있는 주스의 얼마인가?'라고 바꾸면 영희가 가지고 있는 주스가 기준이 되므로 $\frac{2}{5} \div \frac{4}{6}$로 해결하며, 그 결과는 $\frac{3}{5}$이 된다.

<5-2-3차시>: 등분 상황의 (진분수)÷(자연수)

물 $\frac{3}{5}$L를 2통에 똑같이 나누어담았다. 1통에는 물 몇 L가 들어갔는가?

이 문제는 자연수의 나눗셈 상황인 '물 6L를 3통에 똑같이 나누어 담으면 1통에 몇 L가 들어가는가?'와 같은 등분 상황이므로 $\frac{3}{5} \div 2$의 식을 세워 해결한다.

$\frac{3}{5} \div 3$인 경우에는 $\frac{3 \div 3}{5} = \frac{1}{5}$로 해결할 수 있지만 $\frac{3}{5} \div 2$인 경우에는 다른 방법을 사용해야 한다. 즉, 나누는 수를 1로 만들어 계산한다. 나누어지는 수와 나누는 수에 각각 $\frac{1}{2}$를 곱한다.

$$\begin{aligned}\frac{3}{5} \div 2 &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \div 2 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \div 1 \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

계산 결과인 $\frac{3}{10}$L는 단위의 크기를 나타낸다. 즉, 나누는 수가 2(통)이므로 결과는 1통(단위)의 크기를 나낸다.

<5-2-4차시> 등분 상황의 진분수끼리 나눗셈

어느 통에 물 $\frac{3}{5}$L를 넣었더니 $\frac{2}{3}$통이 되었다. 이 통에 물을 가득 채우면 몇 L가 되겠는가?

교사용 지도서에서는 나누는 수가 분수인 등분 상황은 있을 수 없다(교육과학기술부, 2011d)고 하였지만 등분 상황의 결과가 단위의 크기 또는 비율을 나타냄을 이해한다면 일상생활의 소재를 많이 활용할 수 있다.

이 문제 상황은 '…을 똑같이 나누면…'이라는 전형적인 등분 상황과 차이는 있지만 단위의 크기를 묻고 있으므로 나눗셈으로 해결한다.

이 문제를 해결하기 위하여 $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3}$의 식을 세우고, 해결 방법을 모색해야 한다. 측정 상황에서 학습한 분모를 같게 만들어 해결하는 알고리즘은 등분 상황에 적절하지 않다. 따라서 단위의 크기를 구하는 상황에 적절한 알고리즘을 고안해야 한다.

문제에서 요구하는 것은 단위의 크기이므로 나누는 수가 1이면 편리할 것이라는 아이디어에서 $\frac{2}{3}$를 1로 만드는 방법을 찾는다. 결국, $\frac{2}{3}$에 $\frac{3}{2}$을 곱하면 1이 됨을 알게 되고, 나누어지는 수와 나누는 수에 각각 $\frac{3}{2}$을 곱하면 결과는 같다는 것을 이해할 수 있다. 따라서,

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{2} \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{2},\quad \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} \div 1 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2},\quad \text{답: } \frac{9}{10}\text{L}$$

$\frac{2}{3}$통으로 나누었으므로 결과는 1통의 크기 즉, 단위의 크기를 나타내고, 단위를 정확하게 표현하자면 'L/통'이다.

만약에 나누어지는 수와 나누는 수를 바꾸면 문제 상황이 어떻게 변화되는지 알아보자.

어느 통에 $\frac{2}{3}$만큼 물을 넣었더니 $\frac{3}{5}$L가 되었다. 1L를 넣으면 이 통의 얼마만큼 들어가는가?

이 문제를 해결하기 위하여 식을 만들면 $\frac{2}{3}$(통) $\div$ $\frac{3}{5}$$(L)$이 되는데 계산 결과는 1L에 해당하는 크기를 나타낸다.

같은 맥락에서 (자연수)÷(분수)인 등분 상황도 매우 자연스럽게 도입할 수 있다. 현행 교과서 6학년 2학기 4차시에서는 문제 상황도 없이 $4 \div \frac{3}{5}$의 계산 방법을 제시하였지만 이를 '가지고 있는 철사의 $\frac{3}{5}$이 4m였다. 가지고 있는 철사는 얼마인가?'라는 문제 상황을 제시할 수 있다. 이 문제는 가지고 있는 철사를 1로 보았을 때 $\frac{3}{5}$이 4m인데 1의 크기 즉, 단위의 크기를 구하고 문제이므로 $4 \div \frac{3}{5}$의 나눗셈으로 해결할 수 있다.

<6-1-1차시> 측정 상황의 (대분수)÷(자연수)

물 $1\frac{3}{5}$L를 3L들이 주전자에 부으면 주전자의 얼마나 차지하겠는가?

나누는 수가 자연수일 경우에는 한 집단에 얼마씩 할당하는 측정 상황보다는 기준량(단위)의 몇 배인가를 묻는 측정 상황이 적절하다. 위의 문제에서 $1\frac{3}{5}$L의 물을 3L를 기준으로 측정하였을 때 얼마인지를 묻는 것으로 계산은 자연수라서 쉽게 느껴질 수 있지만 문제 상황은 약간 어렵다.

대상이 기준량(단위)의 몇 배인가를 알아보는 측정 상황이므로 단위를 같게 만들어야 한다. 따라서 이 문제는 다음과 같이 해결한다.

$$\begin{aligned} 1\frac{3}{5} \div 3 &= \frac{8}{5} \div \frac{15}{5} \\ &= \frac{8 \div 15}{5 \div 5} \\ &= 8 \div 15 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

<6-1-2차시> 측정 상황의 (가분수 또는 대분수)÷(가분수 또는 대분수)

제품 1개를 만드는 데 원료가 $2\frac{1}{15}$kg 필요하다. 원료 $10\frac{1}{3}$kg으로는 같은 제품을 몇 개를 만들 수 있겠는가?

분수 나눗셈에서 한 집단에 얼마씩 할당하는 측정 상황의 문제를 만들기 위해서는 주의를 기울여야 한다. 예를 들어, '$1\frac{3}{5}$L의 물을 1사람에서 2L씩 주면 몇 명에게 줄 수 있는가?'의 답은 $\frac{8}{10}$명인데 실제로 존재할 수 없는 답이다. 따라서 계산 결과가 문제에서 요구하는 답과 부합되도록 문제를 제시해야 한다. 위의 문제에서는 제품을 몇 개 만들 수 있는가를 물었으므로 계산 결과는 자연수가 되어야 할 것이다.

측정 상황이므로 분모를 같게 하여 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 계산한다.

$$\begin{aligned} 10\frac{1}{3} \div 2\frac{1}{15} &= \frac{31}{3} \div \frac{31}{15} \\ &= \frac{153}{15} \div \frac{31}{15} \\ &= 153 \div 31 \\ &= 5 \end{aligned}$$

따라서 같은 제품 5개를 만들 수 있다.

<6-1-3차시> 측정 상황에서 나머지가 있는 나눗셈

제품 1개를 만드는 데 원료가 $2\frac{1}{15}$kg 필요하다. 원료 $10\frac{1}{3}$kg으로는 같은 제품을 몇 개를 만들 수 있겠는가?

유리수 범위에서 나눗셈은 닫혀있기 있기 때문에 나머지가 있을 수 없지만 실제 상황에서는 나머지가 존재할 수 있다. 분수 나눗셈에서 나머지를 구하는 것은 나머지가 없는 경우보다 복잡한 사고 과정을 거쳐야 하므로 6학년에서 학습하도록 하였다.

첫째, 등분 상황에서 나머지의 처리 문제이다. '사과 27개를 한 봉지에 5개씩 담으면'이라는 측정 상황에서는 나머지가 있는 것이 자연스럽지만, '사과 27개를 5명이 똑같이 나누어주면'이라는 등분 상황은 좀 더 생각해보아야 한다. 즉, 1사람에게 5개씩 주면 2개가 남게 되는데 문제에서는 똑같이 나누어주라고 하였으므로 남은 2개를 어떻게 처리해야 할지 궁금하다.

자연수 범위에서 나눗셈을 학습하는 3학년 학생들에게 $\frac{2}{5}$를 수로 나타내게 하는 것은 무리한 요구이므로 이들에게는 '몇 개씩 주고, 몇 개가 남는가?'처럼 나머지를 분명하게 나타내도록 문제를 진술해야 한다. 분수 범위까지 학습한 5, 6학년의 학생들은 나머지 2개로 등분하여 5명에게 똑같이 나누어주어야 할 것이며, 몫은 $5\frac{2}{5}$가 된다. 그러나 '금붕어 27마리를 어항 5개에 똑같이 나누어 담으면'처럼 나누는 대상이 사과가 아니라 쪼갤 수 없는 대상이라면 어떻게 해야 하는가? $5\frac{2}{5}$마리의 대답은 분수 개념적으로는 옳지만 실제 상황에서는 타당하지 않다. Polya의 문제 해결의 반성 단계에서는 자신의 답이 타당한가를 검토하기를 요구하고 있다. 따라서 답의 타당성을 검토했는지를 알아보려는 목적 외에는 이런 유형의 문제를 만들면 안 된다.

둘째, 측정 상황에서 나머지 처리의 문제이다. 측정상황에서는 등분 상황보다 나머지가 존재하는 것이 자연스럽지만 학생들이 어떻게 대답해야 하는지를 알 수 있도록 문제의 진술에 유의해야 한다. 예를 들면, '우유 28L가 있다. 그릇에 3L씩 나누어 담으려고 한다. 그릇은 몇 개가 필요한가?'의 문제에서 답을 어떻게 써야 하는지 당황스럽다. 3L씩 나누어 담는다고 하였으므로 그릇은 9개만 필요하다고 대답해야 옳은지 아니면 남은 1L도 담아야 하므로 그릇이 10개 필요하다고 대답해야 옳은지 3학년 학생으로선 판단하기 어려울 것이다. 따라서 '그릇 몇 개가 필요하고, 나머지는 얼마인가?'라고 분명하게 물어야 할 것이다.

특히, 유리수(분수) 범위의 계산에서는 나머지를 요구하는 상황과 그렇지 않은 상황이 있으므로 문제에서 이를 분명하게 밝혀야 한다.

우유 $\frac{9}{10}$L가 있다. 컵에 $\frac{2}{5}$L씩 나누어 담으면 몇 컵이 되고 우유는 얼마나 남는가?

이 문제에서는 나머지를 묻고 있으므로 다음과 같이 계산한다.

풀이: $\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = 2\frac{1}{4}$, $\frac{9}{10} - \frac{2}{5} \times 2 = \frac{1}{10}$,

답: 2컵이 되고, $\frac{1}{10}$L 남는다.

이런 유형의 문제와 관련하여 계산 결과가 $2\frac{1}{4}$이므로 2컵이 되고 $\frac{1}{4}$L가 남는다고 대답하기도 한다(강영란 등, 2012).

분수 나눗셈에서 나머지를 구하는 방법을 김명운, 장경윤(2009)은 다음과 같이 제시하였다.

제품 1개를 만드는 데 $\frac{2}{5}$kg의 원료가 쓰인다. 현재 $\frac{7}{8}$kg의 원료가 있다면 제품 몇 개를 만들 수 있고, 나머지는 얼마인가?

측정 상황이므로 분모와 분자를 같게 한 다음, 분자의 나눗셈으로 35÷16을 계산하였더니 몫이 2이고, 나머지가 3이 나왔다.

$$\frac{7}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{7\times5}{8\times5} \div \frac{2\times8}{5\times8}$$
$$= 35 \div 16$$
$$= 2 \ldots 3$$

이 때, 35÷6은 ($\frac{1}{40}$이 35인 수)÷($\frac{1}{40}$이 16인 수) 를 의미하며, 나머지 3은 $\frac{1}{40}$인 수가 3이라는 뜻이므로 나머지는 $\frac{3}{40}$이다.

측정 상황이지만 나머지가 필요 없는 상황은 다음과 같다.

영희는 우유 $\frac{9}{10}$L 가지고 있고, 철수는 $\frac{2}{5}$L 가지고 있다. 영희가 가지고 있는 우유는 철수가 가지고 있는 우유의 얼마인가?

이 문제는 측정의 상황으로서 철수가 가지고 있는 우유를 기준(단위)으로 하여 영희의 우유를 측정하면 얼마나 되는가를 묻고 있다. 따라서 분모를 같게 만들어 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{9}{10} \div \frac{2}{5} = \frac{9}{10} \div \frac{2\times2}{5\times2}$$
$$= \frac{9}{10} \div \frac{4}{10}$$
$$= 9 \div 4$$
$$= 2\frac{1}{4}$$

영희가 가지고 있는 우유는 철수가 가지고 있는 우유의 $2\frac{1}{4}$배이다. 이를 강영란 등(2012)은 해의 분수 표현과 실제 상황의 답이 일치하는 경우라고 하였는데 '~은 ~의 몇 배인가?'의 물음 형태를 지녀야 한다.

자연수도 마찬가지이지만 분수 나눗셈에서 나머지의 처리는 문제의 유형(등분제, 포함제)에 따라서 획일적으로 처리할 사항이 아니라 문제의 상황에 따라 처리해야 하고(강문봉, 2011), 학생들에게 요구하는 답이 무엇인지를 문제에서 명확하게 제시해야 할 것이다.

<6-1-4차시> 등분 상황의 (가분수 또는 대분수)÷(자연수)

물 $1\frac{3}{5}$L를 컵 3개에 똑같이 나누어 담으면 1컵에 얼마씩 들어가는가?

1컵에 들어가는 물의 양 즉, 단위의 크기를 묻고 있으므로 $1\frac{3}{5}$÷3으로 계산하며, 나누는 수를 1로 하면 계산하기 편할 것이라는 생각을 하도록 한다.

$$1\frac{3}{5} \div 3 = \frac{8}{5} \times \frac{1}{3} \div 3 \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{8}{5} \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{8}{15}$$

따라서 1컵에 $\frac{8}{15}$L씩 들어간다.

<6-1-5차시> 등분 상황의 (가분수 또는 대분수)÷(가분수 또는 대분수)

꽃밭의 $20\frac{2}{5}m^2$를 일구는 데 $2\frac{3}{4}$시간 걸렸다. 1시간이면 밭을 얼마나 일구겠는가?

단위를 크기를 묻고 있으므로 나눗셈으로 해결하고, 1시간의 크기를 묻고 있으므로 나누는 수가 시간이어야

한다. 따라서 $20\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4}$ 와 같은 식을 만들 수 있다.

$$20\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4} = \frac{102}{5} \times \frac{4}{11} \div \frac{11}{4} \times \frac{4}{11}$$
$$= 7\frac{23}{55}$$

1시간에 $= 7\frac{23}{55}\,\mathrm{m}^2$를 일군다.

또, $2\frac{3}{4} \div 20\frac{2}{5}$ 와 같이 나누는 수와 나누어지는 수를 바꾸면 계산 결과는 $1\mathrm{m}^2$를 일구는 데 걸리는 시간을 나타내고, 단위는 시/m^2이다.

V. 결론 및 제언

본 연구는 분수의 나눗셈을 역수의 곱셈으로 고쳐서 계산하는지를 이해하기 어렵게 만드는 교과서의 내용 구성에서 출발하였으며, 자연수 범위에서 나눗셈의 개념을 명확하게 하고, 이를 분수의 나눗셈으로 확장하였다.

현행 교과서에서는 문제 상황과 알고리즘의 의미있는 연결보다는 기호 조작에 의한 '분수의 나눗셈은 역수의 곱셈'이라는 알고리즘을 익히는 데 초점을 맞추고 있어서 학생들이 학습을 어려워하고, 분수 나눗셈의 단계를 지나치게 세분화 하여 흥미를 잃고 있다.

본 연구에서는 분수 나눗셈에 대한 교과서 구성 방안을 제시함에 있어서 알고리즘의 학습 단계를 간소화하였으며, 학습의 순서를 다루어지는 수보다는 문제 상황의 어려움을 기준으로 재배열하였다. 또, 학생들의 이해를 발달시키기 위하여 문제 상황-조작 활동-기호가 의미있게 연결될 수 있도록 충분한 기회를 제공하였다.

특히, 분수 나눗셈의 상황에 따른 계산 방법을 제시하였다. 현행 교과서처럼 모든 분수 나눗셈을 역수의 곱셈으로 해결하게 하는 것이 아니라 상황에 적절한 계산 방법을 제시하였다. 즉, 측정 상황의 경우에는 나누어지는 수와 나누는 수의 분모를 같게 하여 분자의 나눗셈으로 해결하도록 하였고, 등분 상황의 경우에는 단위의 크기를 구하기 위하여 나누는 수를 1로 만들 수 있는 수를 나누어지는 수와 나누는 수에 각각 곱하여 역수의 곱셈으로 계산하도록 하였다.

아울러, 분수 나눗셈에서 등분 상황에서 나머지의 처리 방법과 측정 상황에서 나머지를 요구하는 상황과 나머지가 필요 없는 상황으로 구분하여 제시하였다.

본 연구의 결과가 교과서의 구성과 교수 학습 방법의 개선에 도움이 될 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

강문봉 (2011). 자연수의 나눗셈 지도에 대한 고찰, 수학교육학연구 21(1), p.10.

Kang, M. B. (2011). Review teaching division of whole numbers, *Journal of Educational Research in Mathematics 21*(1), p.10.

강영란, 조정수, 김진환 (2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등교사들의 전문화된 내용지식 분석, 수학교육논문집 26(3), 301-316.

Kang, Y. R., Cho, C. S. & Kim, J. H. (2012). Analysis of elementary teachers' specialized content knowledge (SCK) for the word problems of fraction division, *Communications of Mathematical Education 26*(3), 301-316.

교육과학기술부 (2011a). 수학 5-2, 서울: 두산동아, 16-30.

Ministry of Education (2011a). *Mathematics 5-2*, Seoul: Doosandonga, 16-30.

교육과학기술부(2011b). 수학 6-1, 서울: 두산동아(주), 4-13.

Ministry of Education (2011b). *Mathematics 6-1*, Seoul: Doosandonga, 4-13.

교육과학기술부 (2011c). 수학 5-2 지도서, 서울: 두산동아, 113-144.

Ministry of Education (2011c). *Mathematics 5-2 guidebook for teachers*, Seoul: Doosandonga, 113-144.

교육과학기술부 (2011d). 수학 6-1 지도서, 서울: 두산동아, 87-118.

Ministry of Education (2011d). *Mathematics 6-1 guidebook for teachers*, Seoul: Doosandonga, 87-118.

김경미, 황우형 (2012). 자연수와 분수 연산에 대한 학생들의 이해 분석, 수학교육 51(1), 21-45.

Kim, K. & Whang, W. H. (2012). An analysis of students' understanding of operations with whole numbers and fractions, *The Mathematical*

Education 51(1), 21-45.

김명운, 장경윤 (2009). 맥락화를 통한 분수의 곱셈과 나눗셈의 지도, 학교수학 11(4), pp. 685~706.

Kim, M. & Chang, L.Y. (2009). Teaching multiplication & division of fractions through contextualization, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics 11*(4), 685-706.

박교식, 송상헌, 임재훈 (2004). 우리나라 예비초등교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구, 학교수학 5(2), 235-248.

Park, K.S., Song, S. H. & Yim, J. H. (2004). A study on understanding of the elementary teachers in pre-service with respect to fractional division, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics 5*(2), 235-248.

박정임 (2001). 분수의 나눗셈 개념에 관한 연구. 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

Park, J. (2001). *A Study on concept of fractional division*, Master's dissertation, KNUE.

박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석, 석사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

Park, H. K. (2003). *An analysis on connections with related knowledge for conceptual understanding about division of fractional numbers*, Master's dissertation, KNUE.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발, 박사학위 논문, 한국교원대학교 대학원.

Baek, S. S. (2004). *A development of instructional method for the formalized algorithm through informal knowledge in teaching multiplication and division of fraction,* Doctoral dissertation, KNUE.

임재훈, 김수미, 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학교과서 내용 비교를 중심으로, 대한수학교육학회지 학교수학 7(2). 103-121.

Yim, J. H., Kim, S. M & Park, K. S. (2005). Different approaches of introducing the division algorithm of fractions: comparison of mathematics textbooks of North Korea, South Korea, China, and Japan, *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics School Mathematics 7*(2), 103-121.

전평국, 박혜경 (2003). 분수 나눗셈의 개념적 이해를 위한 관련 지식의 연결 관계 분석, 수학교육논문집 15, p. 71.

Baroody, A. J. (1998). *Fostering children's mathematical power*, Lawrence Erlbaum Associates.

Graeber, A. O., Tanehaus, E. (1993). Multiplication and division : From whole numbers to rational numbers, In D.T. Owens(Ed.), *Reseach ideas for the classroom,* (97-117). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Kamii, C. (1999). Teaching fractions: Fostering children's own reasoning, In Stiff, L. V.(ed.), *Developing mathematical reasoning in grade K-12,* (82-92). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Kieren, T. A. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient field to recursive understanding, In Carpenter T. P., Fennema, E.& Romberg, T. A.(Eds), *Rational number: An integration of research,* (49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division of fractions. In Litwiller, B. & Bright, G.(Eds.) *Making sense of fraction, ratios, and proportions* (247-256). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

A proposal to the construction of textbook contents of fraction division connected to problem context

Shin Joonsik
Department of Mathematics, Chuncheon National University of Education, Chunchoen, Korea 200-703
E-mail : joonsik@cnue.ac.kr

This study attempts to propose the construction of textbook contents of fraction division and to suggest a method to strengthen the connection among problem context, manipulation activities and symbols by proposing an algorithm of dividing fractions based on problem contexts.

As showing the suitable algorithm to problem context, it is able to understand meaningfully that the algorithm of fractions division is that of multiplication of a reciprocal.

It also shows how to deal with remainder in the division of fractions.

The results of this study are expected to make a meaningful contribution to textbook development for primary students.

* ZDM Classification : D43
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key words : fractions division, partitive type, quotitive or measurement type, remainder of fractions division