신뢰성응용연구
제13권, 제2호. pp.77 - 86, 2013

최소수리 보증을 갖는 시스템에 대한 연장된 보증 이후의 최적의 교체정책

정기문

경성대학교 정보통계학과

Optimal replacement policy after extended warranty for a system with minimal repair warranty

Ki Mun Jung

Department of Informational Statistics, Kyungsung University

Abstract

Recently, an extended warranty of a system following the expiration of the basic warranty is becoming increasingly popular to the user. In this respect, we suggest a replacement model following the expiration of extended warranty with minimal repair warranty from the user's point of view in this paper. Under extended warranty, the failed system is minimally repaired by the manufacturer at no cost to the user during the original extended warranty period. As a criterion of the optimality, we utilize the expected cost rate per unit time during the life cycle from the user's perspective and suggest the optimal replacement period after extended warranty. Finally, a few numerical examples are given for illustrative purpose.

Keywords : Expected total cost, extended warranty, minimal repair warranty, replacement model

---

이 논문은 2013학년도 경성대학교 학술연구비지원에 의하여 연구되었음.
논문접수일 : 2013년 04월 25일 논문수정일 : 2013년 05월 02일 게재확정일 : 2013년 06월 08일

1. 서론

보증기간이 주어진 수리가 가능한 시스템 (repairable system)에 대한 이론적인 연구는 신뢰성 이론 및 응용분야에서 많은 연구가들이 관심을 갖는 분야 중의 하나이며, 최근까지 활발하게 연구가 진행되고 있다. 보증정책은 일반적으로 보증기간의 재생여부에 따라 재생보증 (renewing warranty)과 비재생보증 (non-renewing warranty)으로 구분할 수 있으며, 사용자의 보증비용 부담 여부에 따라서는 무료보증 (free warranty)과 비례보증 (pro-rata warranty)으로 구분할 수 있다. 그리고 보증기간 동안에 발생된 시스템의 고장에 대하여 교체 또는 수리를 수행하느냐에 따라 교체보증 (replacement warranty)과 수리보증 (repair warranty)으로 구분할 수 있다. 한편, 수리가 가능한 시스템에 대한 예방보전 (preventive maintenance)이란 사용자가 시스템을 원하는 수준으로 유지 또는 향상시키기 위하여 시스템에 고장이 발생하기 전에 취하는 일련의 활동이다.

우선, 교체보증이 주어진 시스템에 대한 교체 및 예방보전 정책과 관련된 연구로는 Sahin과 Polatoglu (1996), Jung과 Park (2003), Chien (2008a, 2008b), 그리고 Jung 등 (2010) 등이 있다. 특히, Sahin과 Polatoglu (1996)는 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 시스템을 새것으로 교체해 주고, 보증기간도 재생되는 재생무료보증 (renewing free replacement warranty)과 재생비례보증 (renewing pro-rata replacement warranty), 그리고 시스템은 새것으로 교체되지만 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료보증 (non-renewing free replacement warranty)과 비재생비례보증 (non-renewing pro-rata replacement warranty)이 제공되는 수리 가능한 시스템에 대하여 사용자 측면의 교체정책 (replacement policy)을 제안하였다. 그리고 최소수리보증이 주어진 시스템에 관한 교체정책과 관련된 연구로는 Yeh 등 (2007)과 Jung (2011)의 연구가 있는데, Yeh 등 (2007)은 보증기간에서 시스템에 고장이 발생되면 최소수리 (minimal repair)가 수행되고, 보증기간은 재생되지 않는 비재생무료최소수리보증 (non-renewing free minimal repair warranty)이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체정책을 제안하였다.

그러나 위에서 언급한 연구들은 시스템을 구입할 때 처음에 기본적으로 제공되는 보증기간만을 고려하였는데, 최근에는 기본적으로 제공되는 보증기간과 더불어 일정한 비용을 지불하고 추가적으로 보증기간을 선택할 수 있는 연장된 보증 (extended warranty)에 대한 관심이 증가되고 있다. 최근에 Wu와 Longhurst (2011)은 두 종류의 고장을 갖는 연장된 보증 하에서의 최적의 보증 및 교체정책을 제안하였으며, Bouguerra 등 (2012)은 다양한 형태의 교체 및 예방보전 정책 하에서 연장된 보증을 구입하기 위한 기준을 제시하였다. 만약 L을 연장되는 보증의 기본단위이고, k를 연장되는 단위보증의 횟수라고 가정한다면, 추가적으로 연장되는 보증기간은 kL이 된다. 그런데 이러한 연구에서는 연장되는 보증을 구입하기 위한 단위길이 당 비용이 일정하다고 가정하였는데, 이 보다는 연장되는 보증의 단위길이 당 구입비용이 연장되는 단위보증 횟수의 증가함수로 가정하는 것이 좀 더 일반적이고 현실적이라고 할 수 있다. 이는 시스템의 고장률이 증가함수인 경우에 시스템의 단위보증 기간 당 기대고장 횟수가 증가하기 때문이라고 할 수 있다.

따라서 본 논문에서는 연장된 보증의 구입비용을 연장되는 단위보증 횟수의 증가함수인 경

우에 연장된 보증이 주어진 수리가 가능한 시스템에 대한 교체모형을 제시하고자 하는데, 이때 시스템에는 최소수리보증이 기본적으로 제공된다고 가정한다. 그리고 제안된 교체모형에 대하여 사용자 측면에서의 단위시간당 기대비용 (expected cost rate per unit time)을 구하고 이를 최소화하는 최적의 교체정책을 제안하고자 한다. 특히, 수리보증이 있는 교체모형에 있어서 연장된 보증에 대한 사용자와 판매자의 관심에 비해서 이론적인 연구결과가 매우 부족하기 때문에 시스템의 수리비용, 교체비용, 연장되는 보증의 구입비용 등이 다양하게 변화함에 따라 연장된 보증 이후의 최적의 교체주기가 어떻게 변화하는지를 수치 예를 통해서 자세히 살펴보고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 본 논문에서 제안되는 연장된 보증이 주어진 시스템에 대한 교체모형을 다루고자 한다. 그리고 3절에서는 2절에서 제안된 연장된 보증이 있는 교체모형에 대하여 단위시간당 기대비용을 유도하고, 이를 최소화하는 최적의 교체정책을 결정하고자 한다. 마지막으로 유도된 단위시간당 기대비용과 최적의 교체정책을 설명하기 위해서 시스템의 고장시간이 와이블 분포를 따를 때 수치적 예를 4절에서 다루었다.

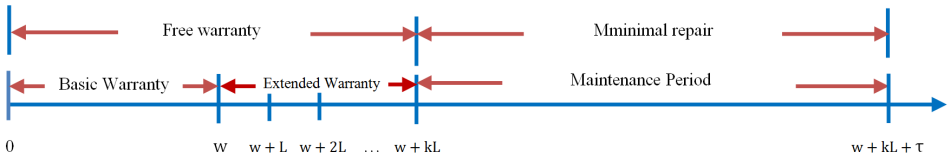
2. 연장된 보증 하에서의 보전모형

연장된 보증이란 시스템을 구입할 때 처음에 기본적으로 제공되는 보증기간이 아니고, 일정한 비용을 지불하고 추가적으로 보증기간을 선택할 수 있는 보증을 의미하며, 최근에 이러한 연장된 보증에 대한 관심이 증가되고 있는 실정이다. 이러한 연장된 보증기간과 관련된 주된 관심사항은 연장된 보증기간의 길이와 구입비용 그리고 연장된 보증기간이 제공되는 경우에 대한 사용자 측면의 최적의 보전정책 등이다. 그런데, 이러한 문제는 제공되는 보증정책의 종류와 시스템의 고장분포 그리고 수반되는 비용과 관련이 있다고 할 수 있다.

본 논문에서 고려하고자 하는 보증은 최소수리보증이 있는 연장된 보증 이다. 즉, 처음에는 기본적으로 무료최소수리보증이 제공되고, 일정비용을 지불하고 추가적으로 연장된 보증기간을 선택할 수 있는 보증이다. 최소수리보증이 있는 연장된 보증에서는 기본 보증기간과 연장된 보증기간 동안에 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 이루어지고, 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. <그림 1>은 이러한 최소수리보증이 있는 연장된 보증의 전형적인 형태를 보여주고 있다. 즉, 기본적으로 제공되는 최소수리보증기간 $(0,w)$에서는 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 진행된다. 그리고 추가적으로 제공되는 연장된 보증기간 $(w,w+kL)$에서도 시스템에 고장이 발생되면 무료로 최소수리가 진행된다. 물론, 전제 보증기간 $(0,w+kL)$에서 시스템에 고장이 발생되어도 주어진 보증기간은 재생되지 않고 잔여 보증기간만이 유효하게 된다. 여기서 L은 연장되는 보증의 기본단위이고, k는 연장되는 단위보증의 횟수이다. 따라서 추가적으로 연장되는 보증기간은 kL이 된다. 이러한 특성을 갖는 기본보증과 연장된 보증 하에서의 교체모형이 본 연구에서 제시하는 보전모형이 되는데, 다음과 같은 기본 가정을 통해서 쉽게 설명된다.

모형

ⅰ) 시스템에는 기본적으로 최소수리보증기간 w가 제공된다.
ⅱ) 기본적으로 제공되는 보증기간과 더불어 연장되는 보증기간 kL이 제공된다.
ⅲ) 사용자는 연장된 보증기간이 종료된 이후에 시점 τ에서 새로운 시스템으로 교체한다.
ⅳ) 연장된 보증기간이 종료된 이후의 보전기간에는 최소수리가 수행된다.
ⅴ) 최소수리 및 교체를 수행하기 위한 시간은 고려하지 않는다.
ⅵ) 연장되는 보증의 단위길이 당 구입비용은 연장되는 단위보증 횟수의 증가함수이다.
ⅶ) 기본보증 및 연장된 보증 기간에서의 최소수리비용은 무료이고, 보증기간이 종료된 이후의 최소수리비용은 c_m이며 교체비용은 c_r이다.



<그림 1> 연장된 보증 하에서의 교체모형

3. 연장된 보증 이후의 최적의 교체정책

3.1 단위시간당 기대비용

본 논문에서 고려하고 있는 연장된 보증기간이 제공되는 교체모형에서 사용자 측면에서의 관심사항은 일정한 비용을 지불하고 연장된 보증기간을 구입할 것인지 아니면 기본적으로 제공되는 보증기간만을 사용할 것인지를 선택하는 것과 보증기간이 종료된 이후에 언제 새로운 시스템으로 교체할 것인가이다. 이를 위해서 본 연구에서는 사용자 측면의 단위시간당 기대비용을 사용하고자 하는데, 이는 총기대비용 (expected total cost)과 기대순환길이 (expected cycle length)로 부터 구해질 수 있다. 먼저 기대순환길이는 기본 보증기간, 연장된 보증기간 그리고 보전기간에서 모두 최소수리가 진행되기 때문에 다음과 같이 구해진다.

$$ECL(k,\tau) = w + kL + \tau. \tag{1}$$

한편, 연장되는 보증 하에서의 보전모형에 대하여 사용자 측면의 총기대비용 $ETC(k,\tau)$은 연장된 보증의 구입비용 $E(C_E)$, 보증기간 동안에 발생하는 기대비용 $E(C_W)$, 보증기간이 종료된 이후의 보전기간 동안에 발생하는 기대비용 $E(C_M)$ 그리고 보전기간이 종료되는 시점에서 시스템을 교체하기 위한 기대비용 $E(C_R)$의 합으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$$ETC(k,\tau) = E(C_E) + E(C_W) + E(C_M) + E(C_R). \tag{2}$$

위의 식 (2)에 주어진 각 기대비용을 구하면 다음과 같이 구해진다.

$$E(C_E) = C(c_e, k),$$
$$E(C_W) = c_{fw}\int_0^{w+kL} h(t)dt,$$
$$E(C_M) = (c_{fm} + c_m)\int_{w+kL}^{w+kL+\tau} h(t)dt,$$
$$E(C_R) = c_r.$$

위의 식에서 $h(t)$는 시스템의 고장률 함수 (hazard rate function)이고, $C(c_e,k)$는 추가적으로 보증기간을 구입하기 위한 비용으로서 연장되는 단위보증의 횟수 k의 증가함수이다. 그리고 c_r은 시스템의 교체비용, c_{fw}는 보증기간에서 발생되는 고장으로 유발되는 비용, c_{fm}은 보전기간에서 발생되는 고장으로 유발되는 비용, c_m은 보전기간에서 발생되는 고장에 대한 수리비용, c_e는 연장되는 보증기간을 구입하기 위한 기본 단위비용이다.
따라서 식 (2)에 주어진 사용자 측면의 총기대비용 $ETC(k,\tau)$는 다음과 같이 구해진다.

$$ETC(k,\tau) = C(c_e,k) + c_{fw}\int_0^{w+kL} h(t)dt + (c_{fm} + c_m)\int_{w+kL}^{w+kL+\tau} h(t)dt + c_r, \tag{3}$$

이제, 식 (1)의 기대순환길이와 식 (3)의 총기대비용으로부터 연장된 보증 하에서의 교체정책에 대한 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$C(k,\tau) = \frac{C(c_e,k) + c_{fw}\int_0^{w+kL} h(t)dt + (c_{fm} + c_m)\int_{w+kL}^{w+kL+\tau} h(t)dt + c_r}{w + kL + \tau}. \tag{4}$$

3.2 최적의 교체정책

이제, 사용자 측면에서의 관심사항인 연장된 보증기간이 종료된 이후의 교체시점을 결정하는 문제를 다루어 보고자 한다. 즉, 식 (4)의 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체주기를 찾아보고자 한다. 우선 최적의 교체주기 τ*를 찾기 위해서 식 (4)의 단위시간당 기대비용을 τ에 관해서 1차 미분한 다음 0으로 놓고 풀면 다음을 얻을 수 있다.

$$(w + kL + \tau)h(w + kL + \tau) - \int_{w+kL}^{w+kL+\tau} h(t)dt = \frac{c_0}{(c_{fm} + c_m)} \tag{5}$$

여기서,

$$c_0 = C(c_e, k) + c_{fw}\int_0^{w+kL} h(t)dt + c_r.$$

식 (5)에서 시스템의 고장률함수 $h(t)$가 증가함수이면, 주어진 k의 값에 대해서 식 (5)를 만족하는 최적의 주기 τ^*의 값이 항상 유일하게 존재함을 알 수 있다. 따라서 연장된 보증이 종료된 이후에 식 (5)를 만족하는 τ^* 시점에서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자 측면에서 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책이 된다.

4. 수치적 예

이 절에서는 시스템의 고장시간이 와이블 분포 (Weibull distribution)를 따를 때 연장된 보증이 종료된 이후의 사용자 측면에서 최적의 교체주기를 결정하는 문제에 대하여 자세히 다루고자 한다. 우선, 시스템의 고장분포가 와이블 분포를 따른다고 가정하였기 때문에 시스템의 고장률함수는 $h(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$이 되는데, 여기서 α는 척도모수(scale parameter)이고 β는 형태모수(shape parameter)가 된다. 그리고 연장된 보증의 구입비용 $C(c_e, k)$은 시스템의 고장률이 증가함수인 경우에 시스템의 단위보증 기간 당 기대 고장횟수가 증가하기 때문에 이를 반영하는 함수이어야 하는데, Ja 등 (2001)이 고장시간에 의존하는 최소수리보증을 제안하였으므로 이를 반영하여 다음과 같은 연장되는 단위보증의 횟수 k의 비선형 증가함수를 고려하고자 한다.

$$C(c_e, k) = kc_e + \gamma(kc_e)^2$$

이러한 고장률함수와 연장되는 보증비용으로부터 식 (4)에 주어져 있는 단위시간당 기대비용은 다음과 같이 구해짐을 알 수 있다.

$$C(k,\tau) = \frac{kc_e + \gamma(kc_e)^2 + c_{fw}\alpha(w+kL)^\beta + (c_{fm}+c_m)\alpha((w+kL+\tau)^\beta - (w+kL)^\beta) + c_r}{w+kL+\tau}. \quad (6)$$

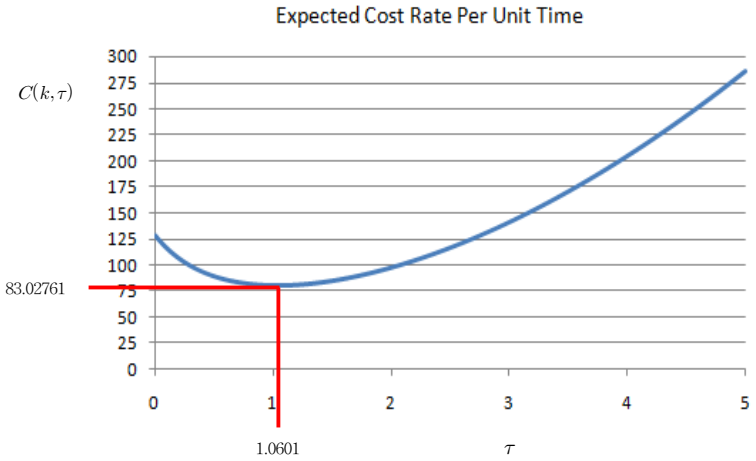
<표 1>에는 시스템의 고장률함수의 모수, 시스템에 주어지는 기본보증 기간 그리고 다양한 비용 등과 관련된 정보가 나타나 있는데, <표 2>부터 <표 5>까지에 나타난 결과는 기본적으로 이러한 정보를 사용하였다. 즉, <표 1>에 나타나 있는 기본적인 정보를 사용하여 식 (6)에 주어져 있는 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체정책과 그 때의 단위시간당 기대비용을 결정할 수 있다.

식 (6)과 <표 1>로부터 $k=3$인 경우에 교체주기 τ에 따른 단위시간당 기대비용은 <그림 2>와 같이 된다. 따라서 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체주기는 1.0601단위시

간이 된다는 사실을 알 수 있다. 즉, 연장된 보증기간이 종료된 이후에 1.0601단위시간에서 새로운 시스템으로 교체하는 것이 사용자 측면에서 기대비용이 가장 적게 발생한다고 할 수 있다. <표 2>에는 다양한 연장된 보증기간에 대하여 최적의 교체주기와 그 때의 단위시간당 기대비용이 나타나 있다.

<표 1> 연장된 보증이 있는 교체모형에 대한 기본 정보

w	L	α	β	γ	c_{fw}	c_{fm}	c_m	c_r	c_e
0.5	0.1	1	3	0.05	3	3	5	100	1.5



<그림 2> 연장된 보증이 종료된 이후의 최적의 교체주기 결정($k=3$)

<표 2> 연장된 보증이 종료된 이후의 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용

k	τ^*	$C(k,\tau^*)$
1	1.2451	81.72136
2	1.1526	82.37173
3	1.0601	83.02761
4	0.9671	83.67287
5	0.8741	84.29165
6	0.7806	84.86828
7	0.6861	85.38730
8	0.5911	85.83338
9	0.4951	86.19126
10	0.3981	86.44568

<표 3>에는 최소수리 비용의 변화에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용이 나타나 있는데, 이로부터 최소수리 비용이 증가함에 따라 최적의 교체주기는 짧아지고 단위시간

당 기대비용은 증가한다는 사실을 알 수 있다. <표 4>에는 교체 비용의 변화에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용이 나타나 있는데, 이로부터 시스템의 교체비용이 증가함에 따라 최적의 교체주기는 길어지고 단위시간당 기대비용도 증가한다는 사실을 알 수 있다. 끝으로 <표 5>에는 연장되는 보증의 구입비용에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용이 나타나 있는데, 이로부터 연장된 보증의 구입비용이 증가함에 따라 최적의 교체주기는 길어지고 단위시간당 기대비용도 증가한다는 사실을 알 수 있다.

<표 3> 최소수리 비용의 변화에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용

k	c_m					
	5		10		15	
	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$
1	1.2451	81.72136	0.9641	95.38780	0.7981	105.54587
2	1.1526	82.37173	0.8671	95.75033	0.6976	105.49758
3	1.0601	83.02761	0.7686	95.98792	0.5956	105.15926
4	0.9671	83.67287	0.6696	96.06280	0.4911	104.46481
5	0.8741	84.29165	0.5686	95.93692	0.3836	103.34560
6	0.7806	84.86828	0.4656	95.57155	0.2726	101.72911
7	0.6861	85.38730	0.3601	94.92686	0.1576	99.53699
8	0.5911	85.83338	0.2521	93.96135	0.0381	96.68254
9	0.4951	86.19126	0.1411	92.63107	0.0001	93.46124
10	0.3981	86.44568	0.0266	90.88876	0.0001	90.91871

<표 4> 교체 비용의 변화에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용

k	c_r					
	100		150		200	
	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$
1	1.2451	81.72136	1.5111	106.95919	1.7231	129.49543
2	1.1526	82.37173	1.4166	107.52805	1.6276	130.01259
3	1.0601	83.02761	1.3221	108.10248	1.5321	130.53517
4	0.9671	83.67287	1.2281	108.66833	1.4366	131.05027
5	0.8741	84.29165	1.1331	109.21162	1.3411	131.54515
6	0.7806	84.86828	1.0381	109.71849	1.2451	132.00712
7	0.6861	85.38730	0.9426	110.17519	1.1491	132.42359
8	0.5911	85.83338	0.8466	110.56806	1.0521	132.78202
9	0.4951	86.19126	0.7496	110.88348	0.9546	133.06990
10	0.3981	86.44568	0.6516	111.10784	0.8566	133.27473

<표 5> 연장되는 보증의 구입비용에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용

k	c_e					
	0.5		1.5		2.0	
	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$	τ^*	$C(k,\tau^*)$
1	1.2386	81.12415	1.2451	81.72136	1.2491	82.03943
2	1.1381	81.07111	1.1526	82.37173	1.1606	83.09883
3	1.0361	80.91733	1.0601	83.02761	1.0736	84.25296
4	0.9331	80.64616	0.9671	83.67287	0.9871	85.48403
5	0.8286	80.24060	0.8741	84.29165	0.9016	86.77468
6	0.7221	79.68316	0.7806	84.86828	0.8161	88.10801
7	0.6136	78.95569	0.6861	85.38730	0.7306	89.46758
8	0.5031	78.03919	0.5911	85.83338	0.6456	90.83746
9	0.3901	76.91353	0.4951	86.19126	0.5601	92.20219
10	0.2741	75.55710	0.3981	86.44568	0.4741	93.54676

4. 결론

본 논문에서는 최소수리보증이 있는 수리가 가능한 시스템에 대하여 연장된 보증이 종료된 이후의 교체모형을 제안하였다. 고려된 보증정책은 기본적으로 제공되는 보증기간에서는 무료로 최소수리가 수행되고, 기본보증기간이 종료되고 나면 일정한 비용을 지불하고 보증기간을 일정기간 동안 연장할 수 있는 보증이다. 이러한 보증정책에 대하여 사용자 측면에서는 일정한 비용을 지불하고 보증기간을 연장하였을 경우에 발생하게 될 기대비용 뿐만 아니라 연장된 보증이 종료된 이후의 최적의 교체주기에 관심이 있다. 따라서 본 논문에서 연장된 보증이 있는 교체모형에 대하여 단위시간당 기대비용을 이론적으로 유도하였으며, 이 단위시간당 기대비용을 최소화하는 최적의 교체주기를 제안하였다. 특히, 연장되는 보증의 구입비용을 연장되는 단위보증 횟수의 증가함수로 가정한 연장된 보증이 있는 교체모형을 제안하여 기존의 연구를 확장하였다. 끝으로 수치적 예를 통하여 본 논문에서 제안된 교체모형에 대하여 최적의 교체주기와 그 때의 단위시간당 기대비용을 결정할 수 있음을 보였으며, 시스템의 최소수리 비용, 교체 비용 그리고 연장된 보증의 구입비용의 변화에 따른 최적의 교체정책 및 단위시간당 기대비용의 변화를 자세히 살펴보았다.

본 논문에서는 비교적 간단한 형태의 보증정책인 최소수리 보증을 고려하였는데, 교체보증과 수리보증의 혼합보증과 이차원보증 등 좀 더 일반적인 형태의 보증 하에서 제공되는 연장된 보증에 대한 보전정책에 대한 연구가 진행될 필요가 있다.

참고문헌

[1] Bouguerra, S., Chelbi, A. and Rezg N. (2012). A decision model for adopting an extended warranty under different maintenance policies. *International Journal of Production Economics*, 135, 840-849.

[2] Chien, Y. H. (2008a). A general age replacement model with minimal repair under renewing free-replacement warranty. *European Journal of Operational Research*, 186, 1046-1058.

[3] Chien, Y. H. (2008b). Optimal age-replacement policy under an imperfect renewing free-replacement warranty. *IEEE Transactions on Reliability*, 57, 125-133.

[4] Ja, S., Kulkarni V. G., Mitra, A. and Patankar J. G. (2001). A nonrenewable minimal-repair warranty policy with time-dependent costs. *IEEE Transactions on Reliability,* 50, 346-352.

[5] Jung, G. M. and Park, D. H. (2003). Optimal maintenance policies during the post-warranty period. *Reliability Engineering and System Safety*, 82, 173-185.

[6] Jung, K. M. (2011). Replacement model following the expiration of free RRNMW. *The Korean Communications in Statistics*, 18, 697-705.

[7] Jung, K. M., Park M. and Park, D. H. (2010). System maintenance cost dependent on life cycle under renewing warranty policy. *Reliability Engineering and System Safety,* 95, 816-821.

[8] Sahin, I. and Polatoglu, H. (1996). Maintenance strategies following the expiration of warranty. *IEEE Transactions on Reliability,* 45, 220-228.

[9] Wu, S. and Longhurst, P. (2011). Optimising age-replacement and extended non-renewing warranty policies in lifecycle costing. *International Journal of Production Economics*, 130, 262-267.

[10] Yeh, R. H., Chen, M. Y. and Lin, C. Y. (2007). Optimal periodic replacement policy for repairable products under free-repair warranty. *European Journal of Operational Research*, 176, 1678-1686.