

# 선형회로에서 마디해석법의 효과적인 교수법

(An Effective Pedagogical Method for Nodal Analysis in Linear Circuit)

김광원\* ⋅ 현슝호

(Gwang Won Kim · Seung-Ho Hyun)

#### **Abstract**

This paper presents an effective pedagogical method for nodal analysis in linear circuit. In the proposed method, basic equations are built only for passive elements and independent current sources. And then, the basic equations are modified by considering other sources such as voltage sources and dependent current sources. In the proposed method, the equations are presented in form of a matrix and a vector of which elements are built systematically by considering every element in a circuit one by one. This make the proposed method easy to apply to intricately composed circuit and easy to solve the final simultaneous equations and easy to realize as computer program for nodal analysis and easy to memorize compared to the conventional method.

Key Words: Linear Circuit Analysis, Nodal Analysis, Pedagogical Method

# 1. 서 론

회로이론은 전기전자공학에서 가장 기본이 되는 교 과목이며, 교과목내에서도 전압원, 전류원 및 선형소 자인 저항, 인덕터, 커패시터로 구성된 선형회로망을 푸는 방법에 대한 학습이 매우 중요하다. 선형회로망 의 대표적인 해법으로는 마디해석법(nodal analysis) 과 폐로해석법(mesh analysis)이 있는데, 방법의 선택 에 따라 회로 해석이 간단해질 수 있다. 그 중에서 마 디해석법은 기준마디를 제외한 모든 마디 전압을 미지량으로 두고, 각 마디에 키르히호프의 전류법칙을 적용하여 마디 개수만큼의 선형연립방정식을 만들어, 이를 연립함으로써 각 마디의 전압을 구한다.

마디해석법을 이용하여 선형회로망을 풀 때, 학생들이 주로 어려워하는 내용은 종속전원이 있는 경우와마디사이에 전압원이 있는 경우이다. 특히 후자의 경우에 대부분의 교재에서는 초마디(super node)를 도입해서 설명을 하는데[1-3], 일부 학생은 그 개념을 이해하는데 어려움을 겪고 있으며, 시간이 지남에 따라많은 학생들이 초마디를 이용해서 회로를 푸는 방법을 쉽게 잊어버린다.

또한 각 마디에 키르히호프의 전류법칙을 적용해 만든 방정식, 종속전원을 표현한 방정식, 초마디와 관련된 방정식이 섞여 있는 경우에, 마디전압을 구하기 위

Tel: 052-259-2186, Fax: 052-259-1686

E-mail: gwangwon@gmail.com

접수일자: 2013년 4월 22일 1차심사: 2013년 4월 24일 심사완료: 2013년 5월 8일

<sup>\*</sup> 주(교신)저자 : 울산대학교 전기공학부 교수

<sup>\*</sup> Main(Corresponding) author: Professor in the School of Electrical Engineering of Univ. of Ulsan

해서 어떤 방정식을 선택해서 연립방정식을 구성할지 혼란스러워하기도 하며, 회로망이 다소 복잡해지고 다 양한 형태의 전원이 혼재하면 풀이 자체를 포기해 버 리곤 한다. 이는 비록 마디해석법의 원리는 충분히 이 해하고 있더라도, 이를 체계적으로 적용하는 방법을 모르기 때문이다.

E. Chatzarakis는 이러한 어려움을 인지하고 이를 해결하고자 범용으로 사용할 수 있는 체계적인 교수법을 제안하였다[4]. 그러나 제안한 방법을 적용하려면 기본 행렬을 만들어야 하는데, 그 기본행렬의 개수가 적지 않으며 또한 각 기본행렬의 의미를 숙지하고 있어야하므로 쉽게 익히고 사용하는데 한계가 있다.

이에 본 논문에서는 보다 쉽게 익힐 수 있으며, 오래 기억할 수 있고, 복잡한 회로망의 풀이에도 체계적으로 적용할 수 있는 새로운 교수법을 제안한다. 제안하는 방법에서는 대상 회로에 있는 요소중에서 수동소자와 독립전류원만을 반영하여 기본행렬을 구성하고, 그 외 전원(종속전류원, 독립전류원, 종속전압원)을 하나씩 차례로 추가 반영하여 기본행렬을 수정함으로써최종 방정식을 구한다.

본 논문에는 제안하는 교수법에 대한 상세히 설명과 함께 이를 적용하여 다소 복잡한 회로를 푸는 예를 수 록하였다.

### 2. 제안하는 교수법

회로해석에서 다루는 선형회로는 어드미턴스성분 (또는 임피던스), 독립전류원, 종속전류원, 독립전압원, 종속전압원으로 구성된다. 본 절에서는 어드미턴스성분과 독립전류원만으로 구성된 회로의 해석 방법을 먼저 설명한 후, 이를 기본으로 종속전류원, 독립전압원, 종속전압원 등이 존재하는 경우에 해당 전원의영향을 반영하는 방법을 설명한다. 본 논문에서 다루는 문제는 선형연립방정식이므로 최종식을 구한 후, 역행렬을 이용하여 모든 마디의 전압을 구한다.

### 2.1 기본행렬의 구성

마디해석법은 키르히호프의 전류법칙에 근간을 두

며, 어드미턴스성분과 독립전류원만으로 구성된 선형 회로에 대한 마디방정식은 매우 쉽게 구성할 수 있다. 이렇게 구성한 마디방정식은 선형대수방정식이므로 행렬을 이용하여 간단히 표현할 수 있으며, 본 논문에 서는 이를 '기본해렬'이라고 표기하였다.

예를 들어 어드미턴스성분과 독립전류원만으로 구성된 그림 1의 선형회로를 가정하자. 이를 해석하려면 기준마디를 제외한 1, 2, 3번 마디에 각각 키르히호프의 전류법칙을 적용하여 3개의 방정식을 만들어 연립하면 각 마디의 전압을 구할 수 있다. 이에 사용되는 방정식을 행렬형태로 표현하면 식 (1)과 같고, 이는 식 (2)와 같이 간단히 표기할 수 있는데, 이 때  $V_{node}$ 는 구하고자 하는 미지량이고,  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 가 본 논문에서의미하는 기본행렬이다.

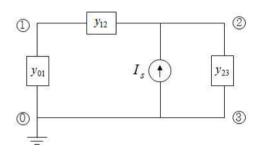


그림 1. 간단한 선형회로

Fig. 1. A simple linear circuit

$$\begin{vmatrix} y_{10} + y_{12} & -y_{12} & 0 & V_1 \\ -y_{12} & y_{12} + y_{23} & -y_{23} & V_2 \\ 0 & -y_{23} & y_{30} + y_{23} & V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ I_S \\ -I_S \end{vmatrix} (1)$$

$$Y_{\text{node}} \times V_{\text{node}} = I_{\text{node}}$$
 (2)

여기서  $Y_{node}$ 는 '마디수×마디수'의 어드미턴스행렬이고,  $V_{node}$ 와  $I_{node}$ 는 '마디수×1'의 벡터로 각각 '마디전압' 및 '전원에서 마디로 흘러들어가는 전류'를 의미한다.

제안하는 교수법의 첫 절차는, 각 어드미턴스 요소별로 다음 절차에 따라 행렬  $Y_{note}$ 를 구성하는 것이다.

#### < 절차 1 >

1-1. 행렬 Y<sub>node</sub>의 각 원소를 0으로 초기화 한다.

조명·전기설비학회논문지 제27권 제7호, 2013년 7월

- 1-2.  $y_{ij}$ 가 마디 i와 j사이에 있으면,  $Y_{node}$ 의 대각요 (i,i), (j,i)에는  $y_{ij}$ 를 더해주고 비대각요소 (i,j), (j,i)에는  $-y_{ii}$ 를 더해준다.
- 1-3.  $y_{i0}$ 가 기준마디와 마디 i사이에 있으면,  $\mathbf{Y}_{node}$ 의 대각요소 (i,i)에  $y_{i0}$ 를 더해준다.

다음으로 각 독립전류원의 전원별로 다음 절차를 밟아 벡터 Inote를 구성한다.

< 절차 2 >

- 2-1. 벡터 Inode의 각 원소를 0으로 초기화 한다.
- 2-2. 전류원  $I_{ij}$ 가 마디 i에서 j로 전류를 보내면,  $I_{node}$ 의 i번째, j번째 원소에 각각  $-I_{ij}$ ,  $I_{ij}$ 를 더 해준다.
- 2-3. 전류원  $I_{0i}$ 가 기준마디에서 마디 i로 전류를 보내면,  $I_{node}$ 의 i번째 원소에  $I_{0i}$ 를 더해준다.

이로써 마디해석법으로 회로를 풀기 위한 기본행렬이 구성되었다.

### 2.2 종속전류원의 반영

종속전류원의 전류값은 일반적으로 식 (3)의 형태로 풀어서 표현할 수 있다. 식 (3)은 마디 i에서 j로 전류를 보내는 종속전류원  $I_{ij}$ 의 전류값이 m번째 및 n번째 마디전압의 함수임을 나타낸다.

$$I_{ij} = a V_m + b V_n + c \tag{3}$$

종속전류원도 전류원이므로 2-1절에서 독립전류원을 반영하는 절차에 따라 반영할 수 있으나, 이 경우에는 상수벡터  $I_{node}$ 에 미지량인 마디전압이 포함된다. 따라서  $Y_{node}$ 의 역행렬로 마디전압  $V_{node}$ 을 구하려면  $I_{node}$ 에 있는 마디전압관련 항을 식 (2)의 좌변으로 이항하여야 한다. 결론적으로 식 (3)과 같은 종속전류원은 다음의 절차를 따라 반영하여야 한다.

< 절차 3 >

3-1. Y<sub>node</sub>의 원소 (*i,m*), (*i,n*)에 각각 a와 b를 더해주

- 고,  $\mathbf{I}_{\mathsf{node}}$ 의 i번째 원소에 -c를 더해준다.
- 3-2. Y<sub>node</sub>의 원소 (*j,m*), (*j,n*)에 각각 -*a*와 -*b*를 더해주고, I<sub>node</sub>의 *j*번째 원소에 *c*를 더해준다.

절차 3에서 마디 i(또는 j)가 기준마디면, 마디 i(또 t)에 대한 절차는 생략한다.

### 2.3 전압원의 반영

전압원이 회로에 존재하는 경우는 그 위치와 종류에 따라 4가지로 구분할 수 있다.

경우1) 마디 i와 j사이의 독립전압원

경우2) 마디 i와 i사이의 종속전압원

경우3) 기준마디와 마디 i사이의 독립전압원

경우4) 기준마디와 마디 i사이의 종속전압원

전압원을 반영할 때에는 경우 1, 2를 먼저 반영하고 기준마디와 관련된 경우 3, 4를 나중에 반영하여야 하는데, 그 구체적인 이유는 뒤에서 설명하였다.

경우 1, 2에서 마디 j가 전압원의 '+' 방향이면, 마디 j의 전압  $V_i$ ,  $V_j$  사이에는 식 (4)의 관계가 성립한다. 식 (4)는 종속전압원에 대한 식이지만, a=0, b=0라고 하면 독립전압원의 경우에도 사용할 수 있다.

$$V_i - V_i = a V_m + b V_n + c \tag{4}$$

한편 마디 사이에 전압원이 있는 경우에는 전압원에서 나오는 전류를 알 수 없으므로 전압원을  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 에 직접 반영하기가 어려워서, 기존의 회로해석에서는 두 마디를 합하여 하나의 초마디(super node)로정의하고 방정식을 세운다. 반면 제안하는 교수법에서는  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 의 i행을 j행에 합하여 하나의 행으로만들고, 대신 i행에는 식 (4)를 추가하여 부족한 식을 보충한다.

제안하는 방법에서 두 행을 합한다는 것은 두 방정식을 합하여 하나의 방정식으로 만든다는 것이다. 이는 두 마디 사이에 전압원이 있더라도 해당 마디와 관련된 두 마디방정식을 합한 식에는 영향을 미치지 않

음을 이용한 것이다. 예를 들어 마디 i와 j사이의 전압원을 기본행렬에 반영하면  $I_{node}$ 의 i행과 j행에 새로운 값이 추가로 더해지는데, 두 값이 서로 부호만 달라서마디 i와 j에 대응되는 방정식은 변하지만 두 방정식의 합한 결과는 변하지 않게 된다. 반면에 두 식을 합하면 방정식의 개수가 줄어드는데 이는 식 (4)의 두마디전압간 관계식으로 대신한다.

기존의 초마디를 이용한 방법과 제안하는 방법은 개념적으로 완전히 동일하지만, 복잡한 회로해석에 적용하거나 회로해석을 위한 컴퓨터 프로그램을 만 드는 경우에는 제안하는 절차를 따르는 것이 훨씬 간 편하다.

마디 i와 j사이에 전압원이 존재하고 전압  $V_i$ ,  $V_j$  사이에 식 (4)의 관계가 성립할 때, 이를 반영하는 절차는 다음과 같다.

#### < 절차 4 >

- 4-1.  $Y_{node}$ 의 i행을 j행에 더하고, i행은 '0'으로 채우다.
- 4-2. I<sub>node</sub>의 *i*번째 원소를 *j*번째 원소에 더하고, *i*번째 원소는 '0'으로 채운다.
- 4-3. Y<sub>node</sub>의 원소 (*i,j*), (*i,i*), (*i,m*), (*i,n*)에 각각 1, -1, -*a*, -*b*를 할당한다.
- 4-4. Inode의 i번째 원소를 c로 한다.
- 4-5. 마디 *i*와 관련된 식은 *j*행에 반영되어 있음을 기록한다.

위의 절차 4-5는 세 개 이상의 마디가 합해져서 초마디를 구성하는 경우를 위하여 필요하다. 예를 들어, 마디 i와 j사이에 또 마디 i와 k사이에 각각 전압원이 존재하면 세 마디를 합하여 초마디를 구성해야 한다. 이 때 마디 i와 j사이의 전압원을 먼저 처리하면서 위의 절차 4-3에 의해 i행에는 식 (4)가 저장되므로, 이후에 마디 i와 k사이의 전압원을 반영할 때 i행과 k행을 대상으로 절차 4를 밟으면 안된다. 이 경우에는 마디 i와 k사이의 전압원이지만, j행과 k행을 대상으로 절차 4를 밟아야한다.

마지막으로 기준마디와 마디 *i*사이에 전압원이 존재하는 경우에는 마디 *i*의 전압이 이미 정해진 경우이므

로  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 에서 마디 i에 대응되는 행을 삭제하고, 대신 식 (5)를 삽입한다. 식 (5)는 마디 i가 전압원의 '+' 방향임을 가정하였고, 독립전압원인 경우에는 a=b=0이다.

$$V_i = a V_m + b V_n + c \tag{5}$$

위에서 마디 i에 대응되는 행을 i\*라고 했을 때, 반영 절차는 다음과 같다.

< 절차 5 >

- 5-1. Y<sub>node</sub>의 *i*\*행을 '0'으로 채운다
- 5-2. Inode의 i\*번째 원소를 '0'으로 채운다.
- 5-3. Y<sub>node</sub>의 (*i*\*,*i*), (*i*\*,*m*), (*i*\*,*n*)에 각각 1, -*a*, -*b*를 할당한다.
- 5-4.  $I_{node}$ 의  $i^*$ 번째 원소를 c로 한다.

절차 5에서는 전압원이 연결된 마디의 마디방정식을 삭제하므로, 절차 5가 절차 4에 앞서면 절차 4에서 두 행을 합하는 연산이 오류가 된다. 따라서 절차 4는 반드시 절차 5에 앞서 수행되어야 한다.

이상을 정리하면 어드미턴스요소 및 전류원을 우선 적으로 반영하여  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 를 구성하고, 기준마디에 연결되지 않은 전압원을 반영하여  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 를 1차로 수정하고, 기준마디에 연결된 전압원을 반영하여  $Y_{node}$ 와  $I_{node}$ 를 최종 확정한 후에  $Y_{node}$  1 10 지입을 구할 수 있다.

## 3. 적용 사례

2절에서 소개한 풀이 방법을 그림 2의 선형회로 풀이에 적용하였다. 그림 2의 회로는 참고문헌[4]에 서 인용하였는데 다양한 전원을 포함하고 있어서 소 개한 풀이 방법을 적용하기에 적합하다. 그림 2에는 마디방정식을 적용하기 위한 마디 번호도 표시되어 있다.

대상 회로에 있는 6개의 어드미턴스요소 및 3개의 독립전류원을 차례로 적용하여(절차1, 절차2) 다음 식 (6)을 얻는다.

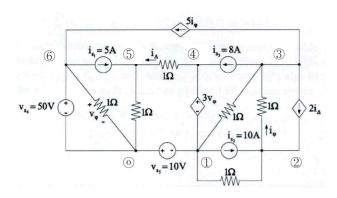


그림 2. 적용 대상 선형회로 Fig. 2. Linear circuit for case study

+2	-1	-1	0	0	0	$V_1$		-10		
-1	+2	-1	0	0	0	$V_2$		+10		
-1	-1	+2	0	0	0	$V_3$		-8		
0	0	0	+1	-1	0	$V_4$	=	+8		
0	0	0	-1	+2	0	$V_5$		+5	- (	۵,
0	Ö	0	0	0	+1	$V_6$		-5	(1	Э,

종속전류원  $2i_{\Delta}$ 는 마디3에서 마디2로 흘러가며  $2i_{\Delta}=2\,V_4-2\,V_5$ 이다. 이를 절차 3에 적영하면 식 (6)의 2행과 3행의 값이 변경되며, 그 결과는 식 (7)과 같다. 식 (6)과 비교하여 식 (7)에서 달라진 부분은 밑줄로 표시하였다.

+2	-1	-1	0	0	0	$V_1$		-10	
-1	+2	-1	-2	+2	0	$V_2$	1	+10	
-1	-1	+2	+2	-2	0	$V_3$		-8	
0	0	0	+1	-1	0	$V_4$	=	+8	
0	0	0	-1	+2	0	$V_5$	517	+5	
0	0	0	0	0	+1	$V_6$		-5	

종속전류원  $5i_{\phi}$ 는 마디3에서 마디6으로 흘러가며  $5i_{\phi}=5(V_2-V_3)$ 이다. 이를 절차 3에 적용하면 식 (8)을 얻을 수 있고, 식 (7)에서 변한 부분은 밑줄로 표시하였다.

+2	-1	-1	0	0	0	$V_1$	lie.	-10
-1	+2	-1	-2	+2	0	$V_2$		+10
-1	-1+5	+2-5	+2	-2	0	$V_3$		-8
0	0	0	+1	-1	0	$V_4$	=	+8
0	0	0	-1	+2	0	$V_5$		+5
0	-5	+5	0	0	+1	$V_6$		-5

다음으로, 기준마디가 아닌 마디 사이의 전압원으로 는 마디1과 마디4를 연결하는 종속전압원  $3V_{\phi}$ 가 있다 (마디4가 +방향). 회로에서  $3V_{\phi}=3V_{6}$ 이므로 두 마디 간의 전압 관계식은 (9)와 같다.

$$V_4 - V_1 = 3 V_6 \tag{9}$$

제안하는 교수법의 절차 4에 따라, 식 (8)의 4행을 1행에 더하고, 4행은 식 (9)를 덮어쓰면 식 (10)을 얻는다. 이 때 식 (10)에서 1행은 마디1 및 마디4의 식이함께 있음을 기억하고 있어야 한다.

+2 <u>+0</u>	-1 <u>+0</u>	-1 <u>+0</u>	0+1	0-1	0+0	$V_1$	1	-10+8
-1	+2	-1	-2	+2	0	$V_2$		+10
-1	-1+5	+2-5	+2	-2	0	$V_3$		-8
-1	0	0	1	0	-3	$V_4$	-	0
0	0	0	-1	+2	0	$V_5$		+5
0	-5	+5	0	0	+1	Ve		-5

50[V]의 독립전압원이 기준마디와 마디6 사이에 있으므로(마디6이 +방향) 마디6의 전압은 50[V]로 고정이 된다. 따라서 절차 5에 따라 식 (10)의 6번째 행은식 (11)로 교체된다.

+2+0	-1+0	-1+0	0+1	0-1	0+0	$V_1$		-10+8
-1	+2	-1	-2	+2	0	$V_2$		+10
-1	-1+5	+2-5	+2	-2	0	$V_3$		-8
-1	0	0	1	0	-3	$V_4$	-	0
0	0	0	-1	+2	0	$V_5$		+5
0	0	0	0	0	+1	$V_6$		50

같은 방법으로, 10[V]의 독립전압원이 기준마디와 마디1 사이에 있으므로(기준마디가 +방향) 마디1의 전압은 -10[V]로 고정이 된다. 이에 식 (11)의 첫째 행 은 식 (12)로 교체된다.

0	-10	$V_1$	0	0	0	0	0	+1
0	+10	$V_2$	0	+2	-2	-1	+2	-1
3	-8	$V_3$	0	-2	+2	+2-5	-1+5	-1
	= 0	$V_4$	-3	0	1	0	0	-1
5	+5	$V_5$	0	+2	-1	0	0	0
)	50	$V_6$	+1	0	0	0	0	0

(12

이상의 절차로 사례연구 대상 회로의 모든 요소를 차례로 반영하여 식 (12)를 얻었으며, 식 (13)과 같이 좌변 행렬의 역행렬을 구하여 모든 마디전압을 구할 수 있다. 계산 결과는 참고문헌[4]의 결과와 일치한다.

$V_1$		+1	0	0	0	0	0	-1	-10		-10	
$V_2$		-1	+2	-1	-2	+2	0		+10		279	
$V_3$		-1	+4	-3	+2	-2	0		-8		423	[3.7]
$V_4$	-	-1	0	0	+1	0	-3		0	=	140	
$V_5$		0	0	0	-1	+2	0		+5		72.5	
$V_6$		0	0	0	0	0	+1	1	50		50	

# 4. 결 론

본 논문에서는 마디해석법을 이용하여 선형회로망을 푸는 방법의 효과적인 교수법을 제안하였다. 제안하는 교수법에 따라 마디해석법을 학습하면, 고전적인 방법에 비하여 마디해석법에 따른 연립방정식을 쉽게 구성할 수 있고, 아울러 방정식의 구성도 체계적으로할 수 있어서 복잡한 회로해석 문제도 별 어려움 없이해결할 수 있다.

아울러 제안하는 교수법에 따른 마디해석법 절차는 회로해석을 위한 컴퓨터 프로그램 알고리즘으로도 손 색이 없어서, 전기전자분야 학생의 컴퓨터 프로그래밍 연습에 활용하는 것도 고려해 볼만 하다.

#### References

- [1] J. Nilsson and S. Riedel, Electric Circuits, 9th ed., Pearson Education 2011.
- [2] W. Hyat Jr., et. al., Engineering Circuit Analysis, 6th ed., McGraw Hill 2003.
- [3] R. Dorf and J. Svoboda, Introduction to Electric Circuits, 8th ed., Wiley 2011.
- [4] G. Chatzarakis, "Nodal Analysis Optimization Based on the Use of Virtual Current Sources: A Powerful New Pedagogical Method", IEEE Trans. on Education, Vol.52, No.1, pp.144–150, February 2009.

# ◇ 저자소개 ◇─



#### 김광원 (金光源)

1966년 5월 14일생. 1989년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1991년 동 대학원 전기 공학과 졸업(석사). 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1996년 ~ 현재 울산대학교 전기공학부 교수.



#### **현 6 호** (玄升鎬)

1962년 10월 30일생. 1991년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1993년 동 대학원 전기 공학과 졸업(석사). 1996년 동 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1996~2002년 한국철도기술연구원 고속철도기술개발 사업단 시스템개발팀장. 2002~2004년

명지대학교 전기공학과 차세대 전력기술연구센터 연구교수. 2004년~현재 울산대학교 전기공학부 부교수.