아래 평판이 미소한 불균일 온도를 갖는 두 수평 평판 사이에서의 자연 대류 : Pr=0.7

유 주 식
안동대학교 기계교육과

NATURAL CONVECTION BETWEEN TWO HORIZONTAL PLATES WITH SMALL MAGNITUDE NON-UNIFORM TEMPERATURE IN THE LOWER PLATE : Pr=0.7

Joo-Sik Yoo
Dept. of Mechanical Engineering Education, Andong Nat'l Univ.

Natural convection of air with Pr=0.7 between two horizontal plates with small magnitude non-uniform temperature distribution[$\epsilon \Delta T \sin(kX/H)$, H : gap width, X : horizontal coordinate] in the lower plate is numerically($\epsilon = 0.01$) investigated. In the conduction-dominated regime with $Ra \leq 1700$, two upright cells are formed over one wave length($2\pi/k$). For small wave number, the flow becomes unstable with increase of Rayleigh number, and multicellular convection occurs above a critical Rayleigh number. The flow patterns are classified by the number of eddies over one wave length. When $k=1$, a transition of 2→4→6 eddy flow occurs with increase of Rayleigh number, and no hysteresis phenomenon is observed. Dual and triple solutions are found for $k=1$, and transitions of 10→8, 8→6, 6→4→2 eddy flow occur with decrease of Rayleigh number.

Key Words: 자연 대류(Natural Convection), 불균일 온도 분포(Non-Uniform Temperature Distribution), 천이(Transition), 다중해(Multiple Solutions)

1. 서 론

아래 벽면이 위 벽면보다 높은 온도를 가지는 시스템에 대한 자연대류 문제는 유동의 안정성과 천이 현상을 조사하기 위해 광범위하게 연구되어 왔다[1]. 본 연구에서는 일정한 온도 차이를 가지고 있는 Rayleigh-Bènard 문제에 작은 크기의 불균일 온도가 아래 평판에 부가되었을 때 일어나는 자연대류 현상을 조사한다.

Fig. 1과 같이 위 평판은 일정온도(T_2)를 유지하며 아래 평판은 평균온도 T_1 외에 작은 크기의 불균일 온도 분포 $\epsilon \Delta T \sin(kX/H)$를 가지고 있다. 여기에서 $\Delta T > 0$이므로 $\epsilon = 0$이면 이 문제는 표준적인 Rayleigh-Bènard 문제가 된다. 비록 작은 크기이지만 불균일성이 주기적인 분포이므로 본 문제는 주기적인 경계조건을 가지는 하나의 문제가 된다. 주기적인 경계 조건을 갖는 문제에 대한 연구로는 두 판의 형태가 길이 방향으로 정현적(sinusoidal)이거나 삼각파 등과 같이 물결 모양을 이루는 관에 대한 것이 있다[2,3]. 이와 같은 문제에 있어서는 벽면의 온도가 늘 일정하다고 하고 주로 정상 상태의 대류 현상을 조사하였다. 한편 Yoo and Kim[4]은 같은 평균 온도를 가지고 주기적인 온도 분포를 갖는 평판 사이에서의 자연 대류에서 카오스로의 천이 경로를 규명하였다. 그리고 Yoo and Kim[5]은 서로 다른 평균 온도를 가지고 상하 벽면이 같은 형태의 주기적인 온도 분포를 갖는 시스템에서 일어나는 유동의 천이 현상을 조사하였다.

한편 다공성 매질에 대해서도 주기적인 불균일 벽면 온도를 갖는 시스템에 대해 몇 가지 연구가 수행되었다[6-9]. Poulikakos and Bejan[6]과 Bradean et al.[7]은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반무한 다공성 매질에서

Received: January 1, 2013, Revised: June 13, 2013, Accepted: June 14, 2013.
* Corresponding author, E-mail: jsyoo@andong.ac.kr
DOI http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2013.18.2.035

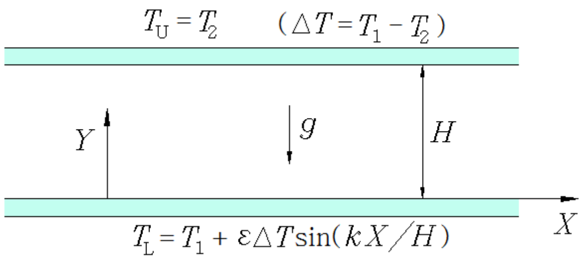

Fig. 1 Problem configuration

의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo[8]와 Yoo and Schultz[9]는 다공성 매질에서 평균 온도 차이가 없는 두 벽면이 정현적인 온도 분포를 가지고 있을 때의 유동을 작은 Rayleigh 수에 대한 점근적인 해를 구하여 조사하였다.

본 연구에서 고려하는 시스템은 Fig. 1과 같이 두 벽면이 서로 다른 평균 온도(T_1, T_2)를 가지고 있다. 위 평판은 일정 온도 $T_U = T_2$를 유지하며, 아래 평판은 $T_L = T_1 + \epsilon \Delta T \sin(kX/H)$의 온도 분포를 가지고 있다. 유동장은 벽면 온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 파장(wave length) $2\pi/k$는 시스템의 기하학적 형태를 나타내는 일종의 종횡비(가로/세로)에 해당된다. 여기에서는 파동수 $k=1$에 대해 중점적으로 조사하는데, 이 경우는 종횡비가 $2\pi/k \approx 6.3$이 된다. 그리고 $\epsilon = 0.01$로 하여 유한 차분법으로써 수치해를 구하며 고려하는 유체는 $Pr = 0.7$인 공기이다. 본 연구에서의 주된 관심사는 구동력을 나타내는 Rayleigh 수에 따른 유동 형태의 천이 현상인데, 전도 상태가 깨어지는 임계 Rayleigh 수 부근에서 이력현상은 관찰되지 않았으며 $k=1$에 대해 이중해와 삼중해가 발견되었다.

2. 해 석

Fig. 1과 같이 두 개의 수평 평판 사이에 채워져 있는 유체를 고려한다. 위 평판은 T_2의 일정온도를 유지하며, 아래 평판에는 일정 온도 T_1에 $\epsilon \Delta T \sin(kX/H)$의 불균일 온도가 가미되어 있다. 지배 방정식에서는 Boussinesq 근사 하에서 부력 항에서만 유체의 밀도 변화를 고려하고 다른 물성치들은 모두 일정하다고 가정한다. 에너지 방정식에서 점성 소산(dissipation)도 역시 무시한다. 이와 같은 가정 하에서 특성 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도를 각각 H, H^2/κ, κ/H, $\rho_0 \kappa^2/H^2$, ΔT로 택하여 질량 및 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식[10]을 무차원화시킨다. 여기에서 특성 길이 H는 평판 사이의 간격이다.

유동 함수 Ψ와 와도 ω로써 표현되는 무차원 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr\,\nabla^2 \omega + Pr\,Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{1}$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \tag{3}$$

여기에서 와도(ω)와 유동 함수(Ψ), Jacobian $J(f,g)$ 및 Laplacian ∇^2은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{4}$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{5}$$

$$J(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{6}$$

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \tag{7}$$

벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0, \quad \text{at } y = 0,\ 1 \tag{8}$$

$$\theta = 1 + \epsilon \sin kx, \quad \text{at } y = 0 \tag{9}$$

$$\theta = 0, \quad \text{at } y = 1 \tag{10}$$

x 방향으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 유동 함수(Ψ), 와도(ω), 및 온도(θ)에 대해 적용된다.

$$F(x,y,t) = F\left(x + \frac{2\pi}{k}, y, t\right), \quad F = \Psi, \omega, \theta \tag{11}$$

그리고 벽면에서의 평균 Nusselt 수를 다음과 같이 정의한다.

$$\overline{Nu} = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx, \quad \text{at } y = 0, 1 \tag{12}$$

x 방향으로 $2\pi/k$의 주기를 가지는 식 (1)-(11)의 해는 Napolitano and Quartapelle[11]가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다. 계산 영역은 $(0 \le x \le 2\pi/k,\ 0 \le y \le 1)$이 되며, x 방향으로는 균일 격자를 사용하고, y 방향으로는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

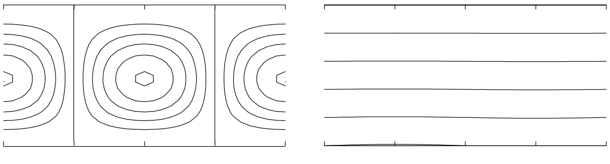

Fig. 2 Streamlines(a) and isotherms(b) in the conduction-dominated regime with $k=3.1$ and $Ra=1000$. The domain of x is $0 \le x \le 2\pi/k$

$$y=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\tanh\{B(2\eta-1\}}{\tanh(B)}\right], \quad B=1.5 \tag{13}$$

수평 방향으로 주기적인 본 문제에서 $2\pi/k$는 일종의 시스템의 종횡비(가로/세로)가 되므로 k의 값에 따라 다른 격자를 사용한다. 예를 들어 $k=3.1$일 때는 (33×25), $k=12$, 24일 때 (33×55)를 사용한다. 여기에서 주로 살펴본 시스템은 $k=1$인 얕은 채널인데 이때에는 (63×25)를 사용하였다. 이와 같은 것은 여러 가지 격자를 시험한 다음 충분하다고 생각되는 것을 택한 것이다. 예를 들어 $k=1$, Ra=5000인 경우, (63×25)와 (63×15),(63×35), (125×25) 격자 등과의 $\overline{Nu}$ 값의 차이는 0.5% 이내이다. 일반적으로 채널에서 셀 대류가 일어날 때 작은 Ra 수에서는 하나의 셀에 대해 수평 방향과 수직 방향으로 각각 10개 정도의 격자점을 가지면 충분하다. 본 연구에서는 정상 상태의 대류($Ra\le10^4$)에 대해 유동 형태의 천이 현상을 조사한다.

3. 결과 및 논의

벽면 온도가 일정한($T_L=T_1$, $T_U=T_2$) 표준적인 Rayleigh-Benard 문제에서는 부력에 의한 열불안정성이 언제나 존재하지만 임계 Rayleigh 수 ($Ra_{c,B}=1708$) 이하에서는 유체의 점성에 의해 정지 상태를 유지한다. 이때에는 유동이 없는 순수한 전도(conduction) 상태에 있으므로 그 해는 다음과 같다: $\Psi_B=\omega_B=0$, $\theta_B=1-y$. 그러나 본 문제에서는 비록 작은 크기($\epsilon\sin kx$)이지만 아래 벽면에서의 수평 방향의 온도 구배에 의해 정지 상태가 존재하지 않고 언제나 유동이 일어난다.

전도 영역의 해로써 Fig. 2에 $k=3.1$인 경우에 대하여 $Ra=1000$에서의 유선과 등온선을 도시하였다. 이 경우는 종횡비 $2\pi/k\approx2$가 된다. 작은 Rayleigh 수의 전도 영역에서의 유동은, 아래 벽면의 온도가 가장 큰 $kx=\pi/2$ 부근의 유체는 위로 올라가고, 가장 작은 $kx=3\pi/2$ 부근에서는 내려가는 모양을 갖는 셀(cell)이 형성된다(Fig. 2(a)). 그런데 유동은 일어나지만 그 세기는 약하므로 전도 영역의 등온선은 거의 수평으로 놓여진다(Fig. 2(b)).

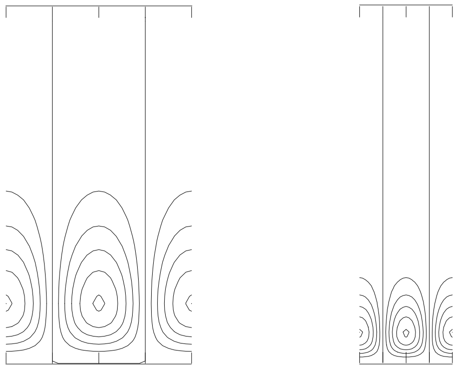

Fig. 3 Streamlines for $k=12$ and 24 in the conduction-dominated regime with $Ra=1000$: (a) $k=12$, (b) $k=24$. The domain of x is $0\le x\le 2\pi/k$

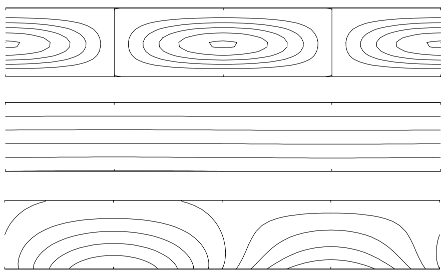

Fig. 4 Streamline and isotherm patterns when $k=1$ and $Ra=1000$: (a) streamlines, (b) isotherms, (c) iso-line of $\phi(x,y)=y-1+\theta(x,y)$. The domain of x is $0\le x\le 2\pi/k$

Fig. 3에는 큰 파동수 $k=12$, 24에서의 전도 영역($Ra=1000$)의 유선을 도시하였다. k가 증가하면 불균일 온도 분포를 갖는 아래 벽면 부근에서 약한 소용돌이가 형성되고 위 벽면으로 갈수록 유동이 약해진다.

k가 큰 경우($k\ge3$)에는 Rayleigh 수를 증가시켜도 한 주기에 걸쳐 전도 영역의 유동보다 많은 수의 소용돌이를 갖는 다수 셀 유동(multicellular flow)은 나타나지 않았다. 여기에서는 $k=1$에 대해 Ra의 변화에 따른 유동의 천이 현상을 살펴보도록 한다. 이 경우($k=1$)는 종횡비 $2\pi/k\approx6.3$이 된다.

먼저 Fig. 4에 $k=1$인 경우에 대한 전도 영역의 해로써 $Ra=1000$에서의 유동장을 도시하였다. k가 작아지면 셀은 넓어지며 Fig. 4(a)와 같이 한 주기에 걸쳐 두 개의 소용돌이가 형성된다. 이때의 등온선도 Fig. 4(b)와 같이 거의 수평으로

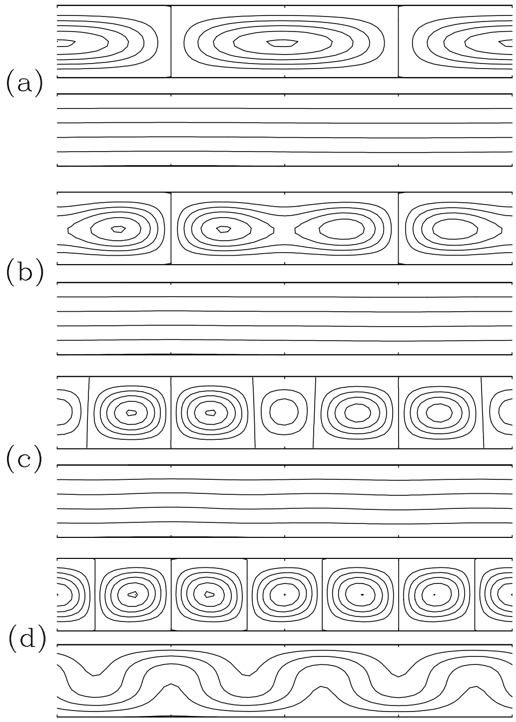

Fig. 5 Streamlines and isotherms showing flow pattern variation with respect to the Rayleigh number when $k=1$: (a) $Ra=1730$; (b) $Ra=1736$; (c) $Ra=1737$; (d) $Ra=3000$. The domain of x is $0 \le x \le 2\pi/k$

놓여진다. 그러나 표준적인 Rayleigh-Benard 문제의 전도 상태의 온도분포($\theta_B = 1-y$)를 제거한 $\phi(x,y) = y - 1 + \theta(x,y)$를 도시한 Fig. 4(c)는 유동의 모습을 잘 보여준다.

전도 영역에서 $k \le 3$에서는 거의 같은 유선과 등온선의 모양을 보여준다(Fig. 2, Fig. 4). 즉, 작은 Ra에서는 한 파장($\lambda = 2\pi/k$)에 걸쳐 두 개의 넓은 셀이 형성된다. 그러나 Rayleigh 수를 증가시키면 열적인 불안정이 증대되어 강한 대류가 일어나게 된다. 이와 같은 유동의 천이 형상을 조사하여 Fig. 5에 도시하였다.

Fig. 5는 $k=1$에 대한 Rayleigh 수에 따른 유동의 변화 모습이다. Rayleigh 수가 증가하여도 Ra=1730까지는 2개의 큰 셀을 갖는 전도 상태가 유지된다(Fig. 5(a)). 그러나 Ra=1736에서는 2개의 큰 셀 내에 같은 방향으로 회전하는 작은 소용돌이가 형성된다(Fig. 5(b)). 그리고 곧바로 Ra=1737에서 작은 소용돌이들이 분리되어 Fig. 5(c)와 같이 6개의 셀을 갖는 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어난다. 한편 다수 셀 대류가 일어나지만 전도 상태가 깨어지는 임계점 부근의 등온선은 거의 수평으로 놓여진다(Fig. 5(c)). 그러나 충분히 큰 Rayleigh 수에서는 거의 같은 세기를 갖는 다수 셀 대류가 확립되며 그때의 등온선도 유동의 양상을 잘 보여준다(Fig. 5(d)). Fig. 5는 여러 가지 유동 형태를 보여주고

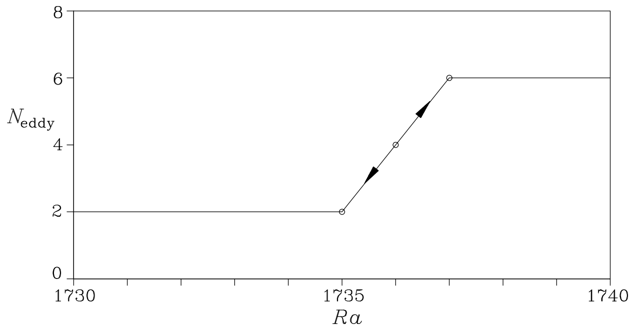

Fig. 6 Flow pattern variation near the critical Rayleigh number at which the flow in the conduction dominated regime becomes unstable when $k=1$. The flows are classified by the number of eddies(N_{eddy}) over one wave length

있지만 모든 유동장은 $kx = \pi/2$ 또는 $kx = 3\pi/2$에 대하여 좌우 대칭이다.

전도 상태가 깨어지는 임계점 부근에서의 유동 형태 변화를 Fig. 6에 도시하였다. 유동 형태는 소용돌이 수(N_{eddy})로써 구분하는데 본 문제에서는 이력(hysteresis) 현상은 관찰되지 않았다. Fig. 6은 Rayleigh 수의 증가와 감소에 따라 $2 \to 4 \to 6$ eddy 유동과 $6 \to 4 \to 2$ eddy 유동으로의 천이가 각각 일어난다는 것을 보여주고 있다.

Fig. 5는 2개의 셀을 갖는 전도 상태의 유동으로부터 6개의 셀을 갖는 유동으로의 천이 현상을 보여주고 있다. 본 연구에서는 이와 같이 다수 셀 대류가 일어나는 영역에서 다중해(multiple solutions)의 존재에 대해 조사하였는데 Table 1과 같이 2중해(Ra=3000, 4000)와 3중해(Ra=6000, 8000)를 관찰하였다.

다중해에 대한 하나의 예로써, $k=1$, Ra=6000에서 발견한 서로 다른 3개의 해를 Fig. 7에 도시하였다. 해의 종류는 셀의 개수로 구분하는데, Fig. 7의 (a), (b), (c)는 각각 6, 8, 10개의 셀을 갖는 유동을 보여주고 있다. 동일한 조건에서 한 시스템에 일어나는 여러 가지 현상은 매우 흥미 있는 것으로서 여러 종류의 유체역학 문제에서 연구되어 왔다 [12-14]. 유체 유동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식은 비선형이므로, 이와 같은 다중해가 발견될 가능성이 언제든지 있

Table 1 The number of solutions and the corresponding flow patterns as a function of Rayleigh number at $k=1$. The flow patterns are discriminated by the number of cells (eddies) over one wave length

Ra	No. of solutions	Number of cells (eddies) in the solutions
8000	3	6, 8, 10
6000	3	6, 8, 10
4000	2	6, 8
3000	2	6, 8
2000	1	6

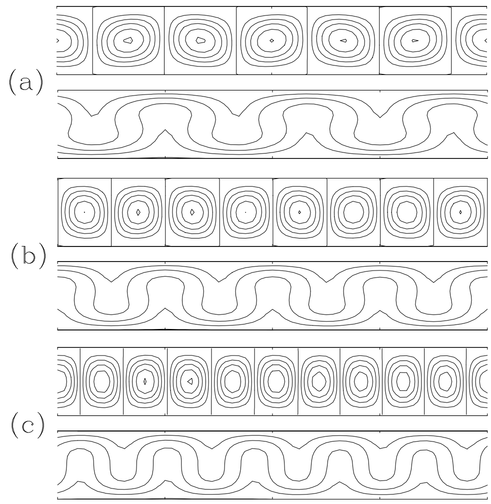

Fig. 7 Streamlines and isotherm patterns showing three multiple solutions at $k=1$ and $Ra=6000$. The flows of (a), (b), (c) have 6, 8, and 10 cells over one wave length, respectively. The domain of x is $0 \le x \le 2\pi/k$

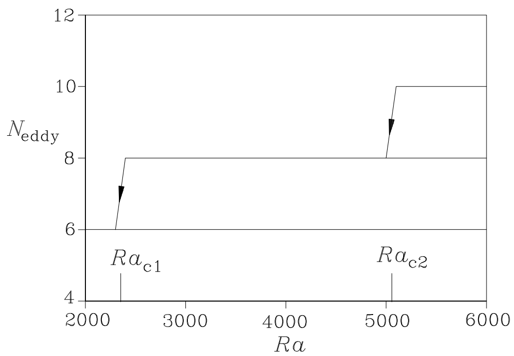

Fig. 8 Bifurcation diagram showing the solution branches as a function of Rayleigh number at $k=1$. The flows are classified by the number of eddies($N_{\rm eddy}$) over one wave length

다. 다중해를 구하는 일반적인 방법은 알려진 게 없다. 수치해석에서는 초기 조건을 변화시키거나 수치적인 교란을 가하기도 하고 time step(Δt)을 변화시키는 등의 방법이 있다.

한편 큰 Rayleigh 수의 다수 셀 유동 영역에서는 임계 상태 부근(Fig. 6)과 달리 조금 복잡한 유동의 분기 현상이 관찰되었다. Fig. 7과 같이 6, 8, 10개의 셀을 갖는 유동을 각각 6, 8, 10 eddy 유동으로 부르기로 하겠다. 이와 같이 소용돌이 수로써 유동 형태를 구분하여 $Ra \ge 2000$에서의 유동 분기 현상을 Fig. 8에 나타내었다.

$Ra=6000$에서는 6, 8, 10 eddy 유동이 모두 존재한다. 그러나 Ra를 감소시키면 Ra_{c2}에서 10 eddy 유동이 8 eddy 유동으로 변화한다. 그리고 더욱 더 Ra를 감소시키면 Ra_{c1}

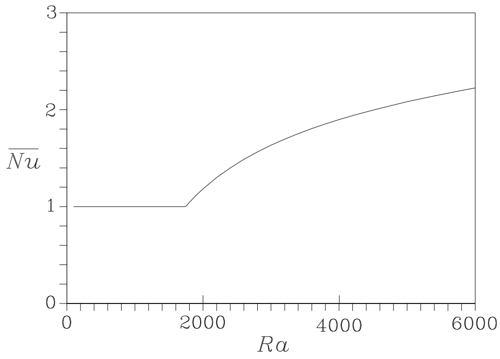

Fig. 9 Nusselt number as a function of Rayleigh number at $k=1$. $\overline{Nu}$ was obtained by using the 6 eddy flow as an initial condition

에서 8 eddy 유동이 6 eddy 유동으로 변화한다. 이때의 유동형태의 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수의 범위는 $2300 < Ra_{c1} < 2400$, $5000 < Ra_{c2} < 5100$이다. 한편 Ra를 증가시키면 6, 8, 10 eddy 유동은 모두 같은 형태의 유동을 유지한다. 이와 같이 하여 $2400 \le Ra \le 5000$과 $5100 \le Ra \le 8000$ 에서 각각 이중해와 삼중해가 존재한다. 이와 같은 다중해는 작은 파동수에서 발견되었으며 큰 파동수 $k \ge 3$에서는 발견되지 않았다. Fig. 8과 같은 분기현상은 기존의 연구에서 보고되지 않은 흥미로운 현상이다.

끝으로 Fig. 9에 $k=1$에서의 Rayleigh 수에 따른 Nusselt 수의 거동을 도시하였다. Fig. 9는 6 eddy 유동을 초기조건으로 하여 구한 것이다. 다중해 영역에서 벽면에서의 평균 Nusselt 수는 6, 8 eddy 유동은 서로 큰 차이가 없지만 10 eddy 유동은 상대적으로 조금 작은 값을 가진다는 것을 보았다. 예를 들어 $Ra=4000$에서 6, 8 eddy 유동의 $\overline{Nu}$는 각각 1.89, 1.84이고, $Ra=6000$에서 6, 8, 10 eddy 유동의 $\overline{Nu}$는 각각 2.22, 2.21, 2.03이며, $Ra=8000$에서 6, 8, 10 eddy 유동의 $\overline{Nu}$는 각각 2.44, 2.46, 2.32이다. 한편 Fig. 9는 전도상태가 깨어지는 $Ra \approx 1800$ 부근에서 약간 급격한 평균 Nusselt 수의 증가 현상을 보여주고 있다. 이와 같은 모양은 일반적으로 보이는 분기 다이어그램(diagram)과 유사하다. 즉, 정량적인 어떤 물리량의 변화 모습으로써 어떤 유동 형태의 천이를 예측할 수 있다.

4. 결 론

아래 평판에 작은 크기의 불균일 온도 분포($\epsilon \sin kx$)가 가미된 두 수평 평판 사이에서 일어나는 공기($Pr=0.7$)의 자연 대류 현상을 수치적으로($\epsilon=0.01$) 조사하였다. 전도가 지배적인 작은 Rayleigh 수에서는 모든 파동수(k)에 대해 한

주기에 걸쳐 두 개의 소용돌이를 갖는 유동이 일어난다. 큰 파동수($k \geq 3$)에서는 정상상태의 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어나지 않는다. 그러나 파동수가 작을 때 Rayleigh 수를 증가시키면 어떤 임계값 이상에서 다수 셀 대류가 일어난다. 파동수 $k=1$에서 한 주기에 걸쳐 6, 8개 또는 6, 8, 10개의 셀을 갖는 2중해와 3중해가 발견되었다. 다중해 영역에서 Rayleigh 수를 감소시키면 10→8, 8→6 eddy 유동으로의 천이가 일어난다. 전도 상태가 깨어지는 임계점 부근에서 Rayleigh 수의 증가와 함께 2→4→6 eddy 유동으로의 천이가 일어나며 이력현상은 관찰되지 않았다.

후 기

이 논문은 2012년도 안동대학교 특별연구지원사업에 의하여 연구되었습니다.

References

[1] 1981, Busse, F.H., "Transition to Turbulence in Rayleigh-Bènard Convection," *In Topics in Applied Physics*, Edited by Swinney, H.L. and Gollub, J.P, Springer-Verlag, Vol.45, pp.97-137.

[2] 1986, Faghri, M. and Asako, Y., "Periodic, fully developed, natural convection in a channel with corrugated confining walls," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.29, pp.1931-1936.

[3] 1988, Asako, Y., Hur, N. and Faghri, M., "Heat transfer and pressure drop characteristics in a corrugated duct with rounded corners," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.31, pp.1237-1245.

[4] 1991, Yoo, J.-S. and Kim, M.-U., "Two- Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol.7, pp.181-200.

[5] 2004, Yoo, J.-S. and Kim Y.-J., "An anomalous bifurcation in natural convection between two horizontal plates with periodic temperatures," *(in Korean) Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.9, No.4, pp.181-200.

[6] 1984, Poulikakos, D. and Bejan, A., "Natural convection in a porous layer heated and cooled along one vertical side," Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol.27, No.10, pp.1879-1891.

[7] 1996, Bradean, R., Ingham, D.B., Heggs, P.J. and Pop, I., "Buoyancy-induced flow adjacent to a periodically heated and cooled horizontal surface in porous media," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.39, No.3, pp.615-630.

[8] 2003, Yoo, J.-S., "Thermal convection in a vertical porous slot with spatially periodic boundary temperatures: low Ra flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.46, No.2, pp.381-384.

[9] 2003, Yoo, J.-S. and Schultz, W.W., "Thermal convection in a horizontal porous layer with spatially periodic boundary temperatures: small Ra flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.46, No.24, pp.4747-4750.

[10] 1982, Drazin, P. and Reid, W., Hydrodynamic stability, Cambridge University Press.

[11] 1985, Napolitano, M. and Quartapelle, L., "Block ADI Methods for steady natural convection in two dimensions," *in Numerical Methods in Heat and Mass Transfer*, Vol.3, John Wiley and Sons.

[12] 1982, Benjamin, T.B. and Mullin, T., "Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol.121, pp.219-230.

[13] 1985, Nandakumar, K., Masliyah, J.H. and Law, H.S., "Bifurcation in steady laminar mixed convection flow in horizontal ducts," *J. Fluid Mech.*, Vol.152, pp.145-161.

[14] 1999, Yoo, J.-S., "Prandtl Number Effect on Bifurcation and Dual Solutions in Natural Convection in a Horizontal Annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.42, pp.3275-3286.