

인코히어런트 삼각 홀로그래피에서 위상오차가 횡축방향의 해상도에 미치는 영향에 관한 연구

(Effect of Phase Error on the Lateral Resolution of Reconstruction Image in Incoherent Triangular Holography)

김수길*

(Soo-Gil Kim)

Abstract

It is introduced the phase error sources of a incoherent hologram in incoherent triangular holography and derived the reconstruction image of point-source including the phase error in the lateral direction. From the reconstruction image of point-source, we analyzed the effect of phase error on the lateral resolution. When the phase retardation errors and azimuth angle error of a wave plate and a polarizer range from 0 to $2\pi/15$, the normalized intensities of reconstructed images are down by about 0.1% and 2.3%, respectively.

Key Words : Resolution, Point-Spread Function, Complex Hologram, Reconstruction

1. 서 론

인코히어런트 삼각 홀로그래피는 자연광을 이용하여 홀로그램을 만들 수 있다는 장점이 있지만 복소홀로그램이 복원될 때 쌍둥이 영상(twin image)이 동일한 축상에 존재하게 되어 복원영상에 잡음으로 나타난다[1].

이러한 쌍둥이 영상은 편광소자를 이용하여 변형

된 삼각간섭계에서 시계방향과 반시계방향으로 진행되는 두 빛의 상대적인 위상차를 만들고, 이 위상차로 인해 생기는 4개의 빛의 세기를 전자적으로 (electronically) 조작함으로써 제거할 수 있다[2].

복소홀로그램을 이용한 복원영상의 신호대 잡음비는 쌍둥이 영상뿐만 아니라 실험에 사용되는 편광소자들에 의해 영향을 받는다[3].

이전 논문에서는 시스템에 사용한 편광소자들로 인해 발생하는 위상오차 요인들을 분석하고 또한, 편광소자의 오차요인들이 종축방향의 복원영상에 미치는 영향에 대하여 분석하였다[4].

본 논문에서는 변형 삼각간섭계에서 사용되는 편광소자들에 의한 위상오차요인들이 횡축방향의 복원영상에 미치는 영향을 살펴보았다.

* 주저자 : 호서대학교 공과대학 디지털제어공학과
* Main author : Department of Digital Control Engineering, School of Engineering, Hoseo University
Tel : 041-540-5676, Fax : 041-540-5693
E-mail : sgkim@hoseo.edu
접수일자 : 2013년 7월 2일
1차심사 : 2013년 7월 4일
심사완료 : 2013년 9월 24일

2. 본 론

2.1. 변형 삼각간섭계

변형 삼각 간섭계는 바이어스와 공액영상이 제거된 복소홀로그램을 얻을 수 있는 수동소자로 구성된 시스템이며 이를 그림 1에 나타내었다.

그림 1에서 Linear polarizer는 선형편광기를, 그리고 wave plate는 파장판을 나타내며, lens1과 lens2는 초점거리가 각각 f_1 과 f_2 인 렌즈들이다. PBS(Polarizing Beam Splitter)는 편광 광분할기를 나타낸다.

변형 삼각간섭계에서 시계방향과 반시계방향으로 진행하는 빛이 출력면에서 더해지게 되는데, 출력면 쪽에 위치한 선형편광기와 파장판을 이용하여 두 빛의 상대적인 위상차를 조절함으로써 출력면에서 4가지의 빛의 세기를 얻을 수 있으며, 이를 전자적으로(electronically) 결합함으로써 바이어스와 공액영상이 제거된 복소홀로그램을 얻을 수 있다[2].

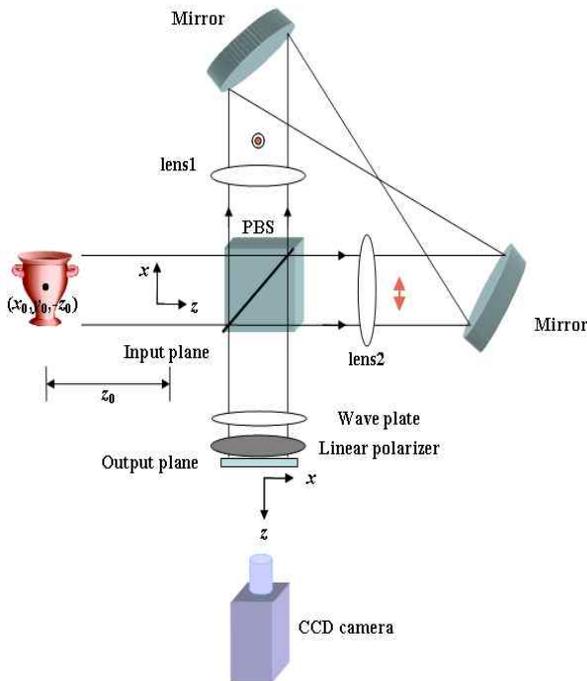


그림 1. 변형 삼각간섭계
Fig. 1. Modified triangular interferometer

2.2 편광소자들에 의한 위상오차요인

변형 삼각간섭계에서 편광소자들의 불완전성과 편광소자들의 회전오차 등이 주된 위상오차 요인들이다.

그림 1에서 출력면에서 출력빔의 Jones 행렬은 다음과 같다[4].

$$E_{out} = A(\varphi_2) W(\varphi_1) E_{input} \quad (1)$$

여기서 E_{input} 은 입력 광파를 나타내며, $A(\varphi_2)$ 와 $W(\varphi_1)$ 는 각각 선형편광기와 파장판의 Jones 행렬을 나타낸다. 편광소자들의 Jones 행렬들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E_{input} = \begin{pmatrix} P_{cxw} \\ P_{cw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^{-j\theta_{cxw}} \\ ae^{-j\theta_{cw}} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$A(\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi_2 & 1/2 \sin 2\varphi_2 \\ 1/2 \sin 2\varphi_2 & \sin^2 \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$W(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 2i \sin^2 \varphi_1 \sin \frac{\Gamma}{2} + e^{-i\frac{\Gamma}{2}} & -i \sin 2\varphi_1 \sin \frac{\Gamma}{2} \\ -i \sin 2\varphi_1 \sin \frac{\Gamma}{2} & -2i \sin^2 \varphi_1 \sin \frac{\Gamma}{2} + e^{i\frac{\Gamma}{2}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

여기서 $W(\varphi_1)$ 은 $\lambda/4$ 파장판의 Jones 행렬을 나타낸다. φ_1 과 φ_2 는 각각 선형편광기와 파장판의 방위각을 나타낸다. Γ 는 파장판의 위상지연을 나타낸다. 식 (1)의 빛의 세기는 다음식과 같다.

$$I = |E_{out}|^2 \quad (5)$$

파장판의 불완전성에 의한 위상오차는 선형편광기를 제외한 모든 편광소자들의 방위각 오차는 0이라고 가정하고 유도한다. 선형편광기의 방위각이 $\varphi_2 = \pi/4$ 이고, 파장판의 방위각이 $\varphi_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi/4$, 그리고 $\varphi_1 = -\pi/4$ 일 때 식 (5)로부터 3가지 빛의 세기를 얻는다. 그리고 $\varphi_2 = -\pi/4$ 이고 $\varphi_1 = 0$ 일 때 하나의 빛의 세기를 얻는다.

이렇게 구한 4개의 빛의 세기를 이용하면 변형 삼각

간섭계에서 시계방향과 반시계방향으로 진행하는 두 광파사이의 위상차 ϕ' 는 다음 식과 같이 주어진다.

$$\tan \phi' = \frac{I_4 - I_2}{I_1 - I_3} = \tan \phi \sin \Gamma \quad (6)$$

여기서 ϕ' 는 파장판의 불완전성에 의한 오차를 포함하고 있다. 일반적인 $\lambda/4$ 파장판의 경우에 대하여, 위상지연은 다음 식과 같이 생각할 수 있다.

$$\Gamma = \pi/2 + \alpha \quad (7)$$

여기서 α 는 $\lambda/4$ 에 의해 도입된 위상지연의 오차성분을 나타낸다. 식 (7)을 식 (6)에 대입하면, 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\tan \phi' = \tan \phi \cos \alpha \quad (8)$$

$$\tan \phi' = \tan(\phi + \Delta\phi) \approx \tan \phi + \Delta\phi \sec^2 \phi \quad (9)$$

우리는 식 (8)과 (9)로부터 파장판의 불완전성에 의한 위상오차를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\Delta\phi_\alpha = -\frac{1}{4}\alpha^2 \sin(2\phi) \quad (10)$$

비슷한 방법으로 파장판과 선형편광기가 회전할 때 생기는 방위각에 의한 위상오차를 구하면 다음과 같다.

$$\Delta\phi_{arp} = (1 + \sin^2\phi - 2\cot 2\beta \sin\phi)\beta_1 - \beta_2 \cos^2\phi \quad (11)$$

$$\Delta\phi_{ap} = -(\gamma_2 + \gamma_3)\sin^2\phi \quad (12)$$

여기서 β_1, β_2 와 γ_2, γ_3 는 각각 파장판과 선형편광기의 방위각 오차를 나타낸다.

2.3 위상오차요인을 고려한 횡축방향의 해상도

변형 삼각간섭계에서 실상에 대한 점광원 복소홀로

그램은 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$H_r(x, y) = \exp(-i\phi_x) \quad (13)$$

여기서 ϕ_x 는 파장판의 불완전성, 파장판 및 선형편광기로 인한 위상오차가 포함된 위상으로 생각할 수 있다.

2.3.1 파장판의 불완전성

파장판의 불완전성에 의한 위상오차를 고려한 점광원의 복소홀로그램은 식 (14)와 같다.

$$H_r(x, y) = \exp(-i\phi_\alpha) \quad (14)$$

여기서 H_r 은 복소홀로그램의 실상이며, $\phi_\alpha = \phi - (1/4)\alpha^2 \sin(2\phi)$ 이다.

식 (14)와 같은 홀로그램을 복원하기 위해 평면파를 비추어주면, Fresnel 회절에 의해 홀로그램으로부터 거리 z 만큼 떨어진 곳에서의 복소진폭은 식 (15)와 같이 표현된다. 이 때 홀로그램을 생성하는 점광원의 좌표는 (0,0)으로 가정한다.

$$U(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \iint_{-\infty}^{\infty} H_r(\xi, \eta) \times \exp\left[-i\frac{k}{2z}\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}\right] d\xi d\eta \quad (15)$$

식 (15)에 ϕ_α 를 대입하면 식 (16)이 된다.

$$U(x, y, z) = -\frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left\{\frac{k}{2z_1}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{1}{4}\alpha^2 \sin 2\frac{k}{2z_1}(\xi^2 + \eta^2)\right\}\right] \times \exp\left[i\frac{k}{2z}\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}\right] d\xi d\eta \quad (16)$$

식 (16)에서 점광원이 복원되는 평면의 위치가 $z = z_1$ 이라고 가정하면 식 (16)은 식 (17)과 같이 파장판에 의한 불완전성에 의한 위상오차만 남게 된다.

인코히어런트 삼각 홀로그래피에서 위상오차가 횡축방향의 해상도에 미치는 영향에 관한 연구

$$U(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[i\frac{k}{2z}\{x^2+y^2\}\right] \quad (17)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left\{\frac{1}{4}\alpha^2 \sin 2\frac{k}{2z}(\xi^2+\eta^2)\right\}\right]$$

$$\times \exp\left[-i\frac{k}{z}\{x\xi+y\eta\}\right] d\xi d\eta$$

식 (17)의 위상오차는 푸리에 시리즈로 표현될 수 있으므로 다음과 같이 표현된다[6].

$$U(x,y,z) = -\frac{i}{\lambda z} \exp(ikz) \exp\left[i\frac{k}{2z}\{x^2+y^2\}\right] \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right)$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\frac{2\pi q}{\lambda z}(\xi^2+\eta^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}\{x\xi+y\eta\}\right] d\xi d\eta \quad (18)$$

여기서 홀로그래프의 형태가 한 변의 길이가 w 인 정사각형이고, $a = \sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(\xi - \frac{x}{2q}\right)$ $b = \sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(\eta - \frac{y}{2q}\right)$ 로 변수변환하면 식 (18)은 식 (19)로 표현된다.

$$U(x,y,z) = -i \exp(ikz) \exp\left[i\frac{k}{2z}\{x^2+y^2\}\right] \exp\left[-i\frac{k}{4zq}(x^2+y^2)\right]$$

$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right) \frac{1}{4q} \int_{a_1}^{a_2} \exp\left[i\frac{\pi}{2}a^2\right] da \times \int_{b_1}^{b_2} \exp\left[i\frac{\pi}{2}b^2\right] db \quad (19)$$

여기서 적분구간 a_1, a_2, b_1, b_2 는 다음과 같다.

$$a_1 = -\sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(w + \frac{x}{2q}\right), \quad a_2 = \sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(w - \frac{x}{2q}\right)$$

$$b_1 = -\sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(w + \frac{y}{2q}\right), \quad b_2 = \sqrt{\frac{4q}{\lambda z}}\left(w - \frac{y}{2q}\right)$$

식 (19)를 Fresnel integral을 이용하여 표현하면 식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$U(x,y,z) = -i \exp(ikz) \exp\left[i\frac{k}{2z}\{x^2+y^2\}\right] \exp\left[-i\frac{k}{4zq}(x^2+y^2)\right]$$

$$\times \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right) \frac{1}{4q} [C(a_2) - C(a_1) + j\{S(a_2) - S(a_1)\}]$$

$$\times [C(b_2) - C(b_1) + j\{S(b_2) - S(b_1)\}] \quad (20)$$

여기서 $C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$, $S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$ 이다. 식 (20)으로부터 점광원의 intensity는 다음 식으로 표현된다.

$$I(x,y,z) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{1}{4}\alpha^2\right) \quad (21)$$

$$\times \frac{1}{16q^2} [C(a_2) - C(a_1)]^2 + \{S(a_2) - S(a_1)\}^2]$$

$$\times [C(b_2) - C(b_1)]^2 + \{S(b_2) - S(b_1)\}^2]$$

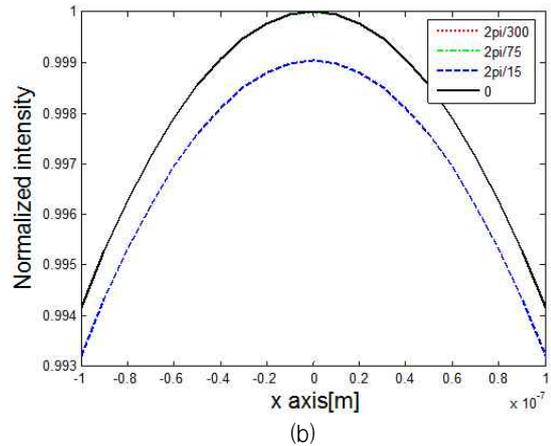
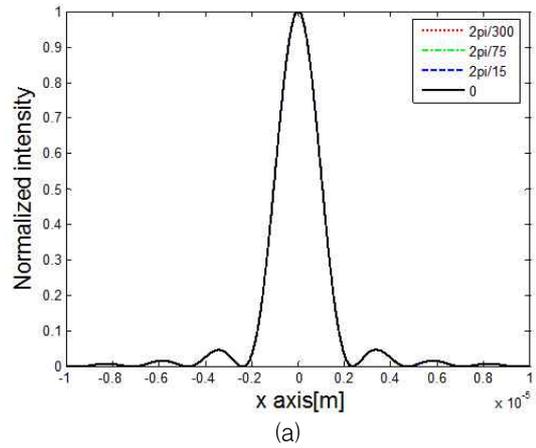


그림 2. 파장판의 불완전성에 의한 위상오차에 대한 점광원 복원영상의 빛의 세기

Fig. 2. Normalized intensity of reconstructed image of a point-source hologram for phase error due to the imperfections of wave plate in the lateral direction

식 (21)을 이용하여 파장판의 위상지연이 0, $2\pi/300$, $2\pi/75$, $2\pi/15$ 이고, 점광원이 복원되는 거리가 0.3m, 홀로그램의 크기가 0.04m, 복원파장이 632.8nm일 때 횡축방향에 대하여 복원된 점광원의 빛의 세기는 그림 2와 같다. 이 때 y좌표는 0으로 설정되었다.

파장판의 불완전성이 복원영상에 미치는 효과는 미미하다. 0.993이상의 빛의 세기를 확대한 그림 (b)를 보면 위상지연에 따라 빛의 세기가 달라짐을 알 수 있지만 $2\pi/15$ 정도의 위상지연이 생길 때 위상지연이 전혀 없을 때에 비해 약 0.1% 빛의 세기가 감소한다. 이것으로 보았을 때 파장판의 불완전성은 횡축방향의 해상도에 거의 영향을 미치지 않는다고 생각해도 무방한 것으로 사료된다.

2.3.2 파장판의 방위각 오차

2.3.1에서와 비슷한 과정을 통해 파장판의 방위각에 의한 위상오차 식 (11)을 고려하여 점광원의 빛의 세기를 구하면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다. 이 때 $\cot 2\beta = 0$ 으로 가정하였다.

$$I(x,y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) \frac{1}{16q^2} \quad (22)$$

$$\times [C(a_2) - C(a_1)^2 + \{S(a_2) - S(a_1)\}^2]$$

$$\times [C(b_2) - C(b_1)^2 + \{S(b_2) - S(b_1)\}^2]$$

$J_0(\cdot)$ 는 0차 1종 베셀함수를 나타낸다. 식 (22)에 대한 빛의 세기는 그림 3과 같다. 이 그림에서 사용된 각종 변수들의 값은 2.3.1절에서의 값과 동일하다.

0.975 및 0.999이상의 빛의 세기를 확대한 그림 (b)를 보면 파장판의 방위각 오차에 따라 빛의 세기가 달라짐을 알 수 있는데, $2\pi/15$ 정도의 방위각 오차가 생길 때 방위각 오차가 0일 때에 비해 약 2.3% 빛의 세기가 감소한다. 파장판의 불완전성으로 인한 효과보다 23배 더 빛의 세기에 영향을 미치는 효과가 크다.

2.3.3 선형편광기의 방위각 오차

파장판에 의한 위상오차 식 (12)를 고려하여 점광원의 빛의 세기를 구하면 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

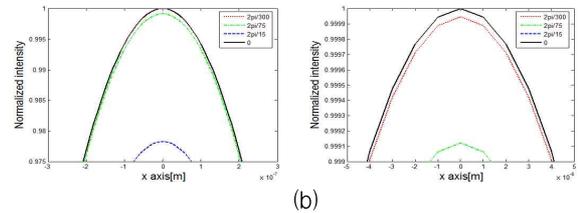
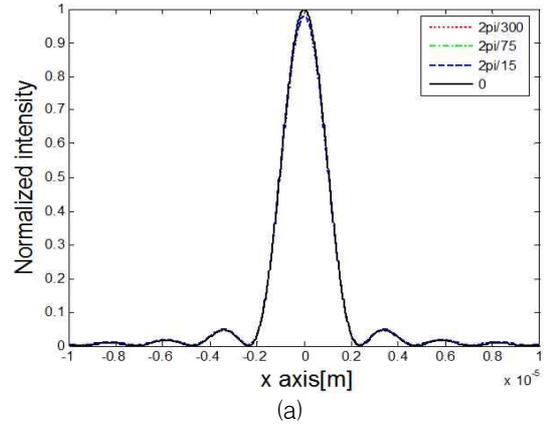


그림 3. 파장판의 방위각 오차에 의한 위상오차에 대한 점광원 복원영상의 빛의 세기

Fig. 3. Normalized intensity of reconstructed image of a point-source hologram for phase error due to the azimuth angle error of wave plate in the lateral direction

$$I(x,y) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2}\right) \frac{1}{16q^2} \quad (23)$$

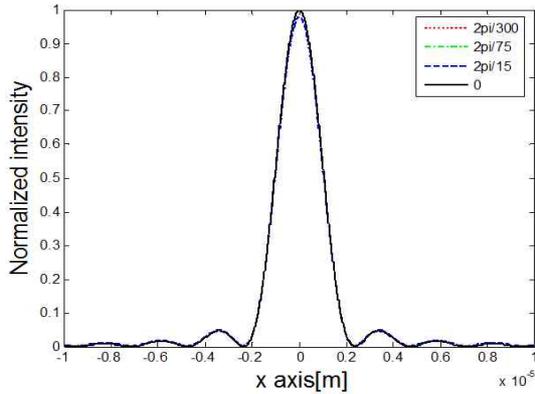
$$\times [C(a_2) - C(a_1)^2 + \{S(a_2) - S(a_1)\}^2]$$

$$\times [C(b_2) - C(b_1)^2 + \{S(b_2) - S(b_1)\}^2]$$

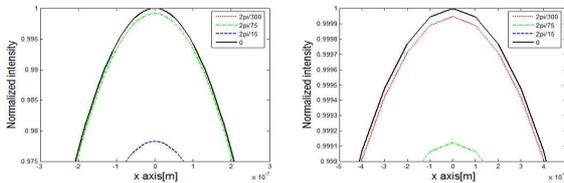
식 (23)에 대한 빛의 세기는 그림 4와 같다. 이 그림에서 사용된 각종 변수들의 값은 2.3.1절에서의 값과 동일하다.

편광판으로 인한 빛의 세기 변화에 대해 0.975 및 0.999이상의 빛의 세기를 확대한 그림 (b)를 보면 편광판의 방위각 오차에 따라 빛의 세기가 달라짐을 알 수 있는데, $2\pi/15$ 정도의 방위각 오차가 생길 때 방위각 오차가 0일 때에 비해 약 2.3% 빛의 세기가 감소한다. 파장판의 방위각 오차로 인한 효과와 동일하다. 파장

판과 마찬가지로 편광판의 방위각 오차가 파장판의 불완전성으로 인한 효과보다 23배 더 빛의 세기에 영향을 끼친다.



(a)



(b)

그림 4. 편광판의 방위각 오차에 의한 위상오차에 대한 점광원 복원영상의 빛의 세기

Fig. 4. Normalized intensity of reconstructed image of a point-source hologram for phase error due to the azimuth angle error of a linear polarizer in the lateral direction

3. 결 론

변형 삼각간섭계를 이용하여 홀로그래를 기록하는 경우에 홀로그래의 진폭과 위상에 영향을 미치는 요소들은 파장판의 불완전성, 파장판의 방위각 오차 및 편광판의 방위각 오차들이다. 본 논문에서는 편광소자들에 의한 위상오차가 포함된 점광원 복소 홀로그래를 이용하여 영상을 복원할 때 복원되는 영상에서 횡축 방향의 점광원에 대한 빛의 세기를 이론적으로 유도하였다.

또한 복원된 빛의 세기에 대하여 각 편광소자들에 의한 위상오차 각각에 대하여 빛의 세기에 대하여 미

치는 효과를 분석한 결과 파장판의 불완전성, 즉 위상 지연이 $2\pi/15$ 일 때 위상지연이 없는 경우에 비해 약 0.1% 빛의 세기가 감소했으며, 파장판과 편광판의 경우에는 방위각 오차가 $2\pi/15$ 일 때 방위각 오차가 없는 경우에 비하여 2.3% 빛의 세기가 감소하였다. 따라서 파장판과 편광판의 방위각 오차가 복원영상의 횡축방향 해상도에 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

이 결과로부터 복원영상에 있어서 빛의 세기에 주로 영향을 미치는 요인은 파장판과 편광판의 방위각 오차임을 알 수가 있다. 따라서 시스템을 구성하여 실험할 때는 편광소자들의 방위각 오차가 최대한 발생하지 않도록 하는 것이 가장 이상적인 복원영상을 얻을 수가 있다.

이 논문은 2012년도 호서대학교의 재원으로 학술연구비 지원을 받아 수행된 연구임(20120272).

References

- [1] G. Cochran, "New method of making Fresnel transforms with incoherent light," J. Opt. Soc. Am., Vol. 56, No. 11, pp. 1513-1517, 1966.
- [2] S. G. Kim, B. Lee, and E. S. Kim, "Removal of bias and the conjugate image in incoherent on-axis triangular holography and real-time reconstruction of the complex hologram," Appl. Opt. Vol. 36, No. 20, pp. 4784-4791, 1997.
- [3] S.-G. Kim, "Phase error due to polarization components of the modified triangular interferometer," JOSK Vol. 11, No.1, pp. 10-17, 2007.
- [4] S.-G. Kim, "Analysis of effect of phase error sources of polarization components in incoherent triangular holography," JOSK Vol. 16, No.3, pp. 256-262, 2012.
- [5] A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York, 1984, Chap. 5.
- [6] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, 1996, Chap. 4.

◇ 저자소개 ◇



김수길(金秀吉)

1965년 8월 2일생. 1988년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1991년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1997년 서울대학교 대학원 전기공학과 졸업(박사). 1997년~현재 호서대학교 공대 디지털 제어공학과 교수.