

학교수학에 나타나는 ‘평행’과 ‘일치’의 관계

남 진 영 (경인교육대학교)
조 성 민 (한국교육과정평가원)[†]

학교수학에서는 학문으로서의 수학에서 제시된 정의를 그대로 제시하기보다 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성 등을 중시하는 교육적 논리를 바탕으로 학생들이 이해할 수 있는 방식으로 대상을 정의한다. 본 논문에서는 학교수학에 나타나는 두 직선의 ‘평행’과 ‘일치’ 개념의 정의와 특징을 알아보기 위하여 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 분석하였다. 그 결과, 현재 사용되는 교과서에는 ‘만남’의 맥락에서 평면에서 두 직선의 위치 관계를 설명할 때는 ‘평행’과 ‘일치’가 명백히 구분되지만, ‘기울기’ 맥락에서는 상황에 따라 ‘평행’과 ‘일치’가 명백히 구분되기도 하고, ‘일치’가 ‘평행’에 포함되기도 하는 것으로 나타났다. 이와 같이 상황에 따라 다르게 해석될 수 있는 ‘평행’과 ‘일치’의 관계는 학생들에게 혼동을 야기할 수 있다. 이에 본고에서는 이전 교육과정에 따른 교과서와 외국 교과서의 사례를 참고하여, ‘평행’과 ‘일치’의 관계가 논리적 일관성이나 객관성을 잃지 않은 채 학교수학에서 의미 있게 자리 매김할 수 있는 방안을 모색하고자 한다.

I. 서론

학문으로서의 수학에서는 대상의 특징, 속성 뿐 아니라 대상이 가지고 있는 본질적인 측면을 포착하기 위해 대상을 정의하여 사용한다. 이때 정의는 개념의 기본 요소로서, 증명과 문제해결의 기본이 되고 수학적 아이디어가 좀 더 쉽게 의사소통할 수 있도록 돕는다(Zaslavsky & Shir, 2005). 그러나 학교수학에서는 학문으로서의 수학과 같은 방식으로 정의를 분류하거나 사용하지 않고(Edwards & Ward, 2004), 학습자의 발달 단계나 교육적 타당성 등을 중시하는 교육적 논리에 따라 학생들이 이해할 수 있는 방식으로 대상을 정의한다(박교식, 임재훈, 2004; 조영미, 2002).

학교수학에서 학습자의 수준, 개념 형성 과정에서의 효율성, 의사소통의 용이성 등을 위해 정의를 변형시키는 것에 대하여는 여러 가지 문제점이 지적되기도 한다. 수학적 본질을 훼손하지 않으려다 보니 학생들이 개념을 학습하는 과정에 제시되는 정의가 다소 어색하게 표현되거나(임재훈, 박교식, 2009), 대상이 명료하지 않거나(이종영, 2005), 문맥이나 상황에 따라 이중적인 의미로 사용되어 학문으로서의 수학에서 제시되는 정의와 엄밀성이나 객관성 측면에서 차이가 나타나는 것은 물론, 교사와 학생들에게 혼란을 유발하는 경우가 발생하는 것이다(권석일, 박교식, 2011; 백대현, 2010). 그러나 학습자의 수학적 수준과 언어적 능력을 고려하여 학습 내용을 서술한다는 것이 수학적으로 정확하지 않거나 일관성이 결여된 채 수학 개념을 다루어도 된다는 것을 의미하지는 않는다. 학생들은 공식적인 개념 정의를 배우기에 앞서 다양한 경험으로부터 수학 내용에 대한 개념이미지를 형성하므로(Tall & Vinner, 1982), 수학적 엄밀성과 일관성이 떨어진 채 제시된 내용은 학생들에게 혼란을 초래하여 학습의 장애 요인으로 작용할 수도 있기 때문이다.

* 접수일(2013년 1월 15일), 심사(수정)일(2013년 2월 18일), 게재확정일(2월 25일)

* ZDM 분류 : U23

* MSC2000 분류 : 97U20

* 주제어 : 평행, 일치, 수학적 정의

† 교신저자 : csminy@kice.re.kr

본 논문에서는 도형에 관한 학습의 기본 바탕이 되는 ‘평행’ 개념에 대하여 살펴보고자 한다. ‘평행’ 개념은 기하학의 발달에서 중요한 역할을 하였음에도 불구하고, 학교수학과 관련되어서는 지금까지 연구가 많지 않은 편이다. 송정환(2001)은 제1차 교육과정부터 제7차 교육과정까지 초등학교 수학 교과서에 나타난 ‘수직’과 ‘평행’의 정의를 분석하여, ‘수직’과 ‘평행’에 대한 정의가 수학 내용을 단순히 제시하는 형식적 정의로부터 학생들의 탐구 활동을 바탕으로 하는 구성적 정의로 변해왔다고 주장하였다. 이종영(2005)은 초등학교 수학 교과서에 제시된 평행의 사례를 분석하여, 평행선, 평행사변형, 사다리꼴 등이 전형적인 형태로만 제시되어 학생들에게 오개념을 불러일으킬 수 있음을 지적하였다. 또한 수학적으로 좀 더 엄밀한 지도를 위하여 평행선, 평행한 선분의 지도 시 모눈종이를 이용할 것을 제안하였다. 이 외에 공학 도구를 사용하여 점, 직선, 평면의 위치 관계를 지도하는 방안에 대한 연구(김문주, 2012), 수직과 평행의 지도 시 작도 활동을 보완하고 모눈종이를 보다 적극적으로 활용할 것을 제안하는 연구(남경주, 2012), 학교기하에서 사용되는 정의를 분석하고, 이에 대한 교수학적 의의를 제시한 연구(강홍규, 조영미, 2002) 등이 있다.

본 논문에서는 현재 학생들이 사용하고 있는 2007 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서 ‘평행’ 개념이 어떻게 다루어지고 있는지에 대하여 알아보하고자 한다. 학교수학에서 수학적으로 정의되기 전부터 두 사물이 나란하다는 것을 통해 직관적으로 활용되는 ‘평행’ 개념은 학교급이 달라지면서 ‘기하’ 영역과 ‘함수’ 영역에서 모두 다루어진다. 본 논문에서는 이 과정에 일관성이 있는지를 살펴보고자 한다. 특히 두 직선의 위치 관계인 ‘평행’과 ‘일치’가 어떻게 서술되어 있는지, 학생들에게 혼란을 초래할 수 있는 부분이 있는지를 분석할 것이다.

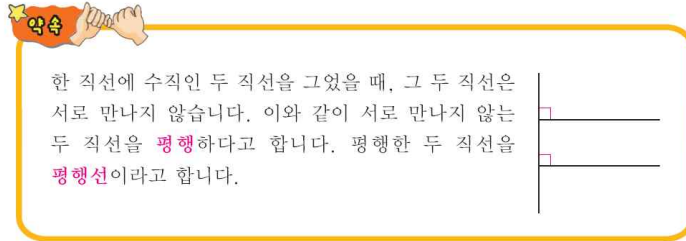
II. 교과서에 나타나는 ‘평행’과 ‘일치’

‘평행’은 수학 학습을 통해 형식적으로 배우기 전, 두 사물이 나란하다는 것을 통해 직관적으로 체득된다. 초등학교 4학년 수학에서 ‘평행선’과 함께 정의된 ‘평행’은 이후의 기본 도형에 대한 학습, 도형 사이의 관계 및 성질에 대한 학습의 초석이 된다(이종영, 2005). 2007 개정 수학과 교육과정에서는 초등학교 때 두 직선의 ‘평행’을 다루고, 두 직선의 ‘일치’는 따로 정의하지 않는다. 이후 중학교 때 평면에서 두 직선의 관계를 설명하면서 ‘평행’, ‘일치’, ‘한 점에서 만남’을 다룬다. 이에 대하여 좀 더 자세히 살펴보면 다음과 같다.

1. 기하 영역에서의 평행

학교수학에서 ‘평행’은 초등학교 4학년 2학기 ‘수직과 평행’ 단원에서 두 직선이 ‘서로 만나지 않는’ 것으로 정의된다([그림 1] 참조).¹⁾ 이는 두 사물이 나란하다는 것을 통해 직관적으로 체득한 ‘평행’ 개념을 수학적으로 표현한 것이라 할 수 있다.

1) 초등학교에서는 ‘정의’ 대신 ‘약속’이라는 표현을 사용하는데, ‘약속’은 학습자의 이해 수준에 적합하도록 수학적 정의를 변형한 것이므로, 초등학교 수학 교과서의 ‘약속’은 정의가 갖는 역할이 내포되어 있다(백대현, 2011).



[그림 1] 초등학교 수학에 나타난 '평행'의 정의 (교육과학기술부, 2010: 40)

직선의 평행은 '약속'을 통해 명시적으로 정의한 반면, 선분의 평행은 [그림 2]에서 볼 수 있듯이 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 도형을 이용하여 평행선 사이의 거리를 구하는 활동을 통해 암묵적으로 제시된다.

활동 2 변 AB 과 변 CD 은 서로 평행합니다. 평행선 사이의 거리는 어떤 성질이 있는지 알아보시다.

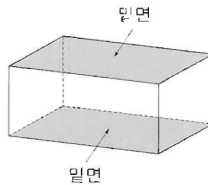


[그림 2] 선분의 평행 (교육과학기술부, 2010: 45)

이때 선분과 선분의 평행은 명시적으로 정의되지 않은 채 마주보는 한 쌍의 변을 연장하였을 때 생기는 두 직선이 서로 만나지 않는 것으로, 직관적이고 암묵적으로 다루어진다. 즉, 바로 앞에서 제시된 두 직선의 평행을 두 선분의 평행에 적용한 것이라 할 수 있다. 직선과 선분의 평행도 명시적으로 정의되지 않은 채 문제로서 다루어지는데, 선분과 선분의 평행과 마찬가지로 선분의 연장선이 직선과 만나지 않는 것으로 받아들여진다.

면과 면의 평행은 5학년 1학기에서 [그림 3]과 같이 '약속'을 통해 '계속 늘여도 만나지 않는 두 면'으로 정의된다. 학생들은 도형을 이루는 한 변의 연장선을 이용하여 마주보는 한 쌍의 변이 서로 평행함을 학습한 맥락을 바탕으로 면을 늘이는 개념과 면과 면의 평행을 학습하게 된다.

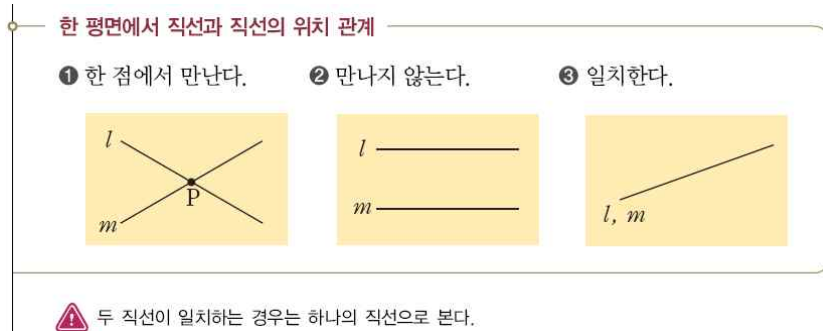
약속 그림과 같이 직육면체에서 색칠한 두 면처럼 계속 늘여도 만나지 않는 두 면을 서로 평행하다고 합니다. 이 두 면을 직육면체의 밑면이라고 합니다.



[그림 3] 면과 면의 평행(교육과학기술부, 2011: 86)

이상을 정리하면, 직선과 직선의 평행, 면과 면의 평행은 초등학교 교과서에서 ‘약속’을 통해 ‘만나지 않는’ 경우로 명시적으로 정의되는 반면, 선분과 선분의 평행, 선분과 직선의 평행은 선분을 연장하여 생기는 직선이 만나지 않는 것으로 간주하여 암묵적으로 다루고 있으며 두 직선의 일치에 대해서도 독립적으로 다루지 않는다.

중학교에서는 1학년 수학 ‘기본 도형’ 단원의 ‘평면에서 두 직선의 위치 관계’와 ‘공간에서 두 직선의 위치 관계’를 다루면서 ‘평행’과 ‘일치’에 대한 내용을 소개한다. 이때에도 두 직선의 위치 관계는 ‘만남’의 맥락에서 다루어지며, [그림 4]와 같이 평면에서 직선과 직선의 위치 관계는 한 점에서 만나는 경우, 만나지 않는 경우, 일치하는 경우인 세 가지로 구분되고, 만나지 않는 경우가 ‘평행’으로 간주된다. 즉, 두 직선은 만나는 점의 개수가 1개인 경우, 0개인 경우, 무수히 많은 경우로 구분된다. 다만, 강신덕 외(2009) 등의 교과서에서는 “두 직선이 일치하는 경우는 하나의 직선으로 본다”는 참고 사항을 제시함으로써 ‘일치’를 구분하기도 하였다.

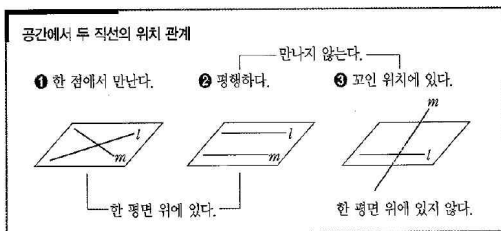


[그림 4] 평면에서 직선과 직선의 위치 관계(강신덕 외, 2009: 186)

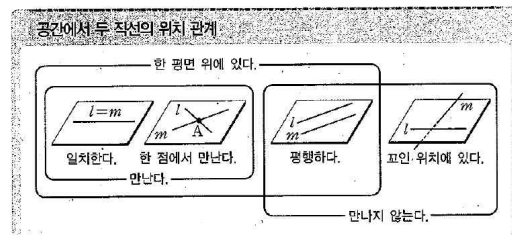
한편 공간에서 직선과 직선의 위치 관계는 [그림 5]와 같이 세 가지로 구분한 경우와 [그림 6]과 같이 네 가지로 구분한 경우가 있다. 이때, 같은 평면에 있을 때와 다른 평면에 있을 때를 구분하고, 같은 평면에 있을 때는 만나는 경우와 평행인 경우로, 다른 평면에 있을 때는 평행인 경우와 꼬인 위치에 있는 경우로 구분한다. 이어서 평행인 경우와 꼬인 위치에 있는 경우를 두 직선이 만나지 않는 경우로 묶어서 설명한다²⁾.

세 가지로 구분한 경우

네 가지로 구분한 경우



[그림 5] 공간에서 두 직선의 위치 관계
(김원경 외, 2009: 199)



[그림 6] 공간에서 두 직선의 위치 관계
(이영하 외, 2009: 212)

2) 교과서에 따라 서술 순서가 바뀌기도 한다. 즉, 만나는 경우와 만나지 않는 경우로 먼저 나누고, 이어서 같은 평면에 있거나 다른 평면에 있음을 서술하기도 한다.

평면에서 두 직선의 위치 관계에 있었던 '두 직선이 일치하는 경우'는 한 점에서 만나는 것도 아니고, 평행인 것도 아니고, 꼬인 위치에 있는 것도 아니라고 할 수 있다. 따라서 공간에서 두 직선의 위치 관계를 다룰 때는 '서로 다른 두 직선'임을 명시하거나 [그림 6]과 같이 공간에서 두 직선의 위치 관계를 한 점에서 만나는 경우, 일치하는 경우, 평행인 경우, 꼬인 위치에 있는 경우로 구분함으로써 '일치'하는 경우에 대한 설명을 포함하였다. 2007 개정 수학과 교육과정에 따라 개발된 27종의 중학교 1학년 교과서에서 평면에서 두 직선의 위치 관계, 공간에서 두 직선의 위치 관계를 구분한 내용은 <표 1>과 같다.

<표 1> 2007 개정 수학과 교육과정의 중1 교과서에 나타나는 두 직선의 위치 관계

구분	평면에서 두 직선의 위치 관계				공간에서 두 직선의 위치 관계			
	한 점	평행	일치	하나의 직선	한 점	평행	일치	꼬인 위치
강신덕 외(2009) 금종해 외(2009) 박윤범 외(2009) 신항균 외(2009) 정상권 외(2009) 최용준 외(2009) 황선욱 외(2009)	○	○	○	○	○	○	×*	○
김원경 외(2009) 박영훈 외(2009) 박종률 외(2009) 윤계한 외(2009) 장건수 외(2009) 정광식 외(2009) 정창현 외(2009)	○	○	○	○	○	○	×	○
김부윤 외(2009) 박규홍 외(2009) 유희찬 외(2009) 이영하 외(2009)	○	○	○	×	○	○	○	○
김홍중 외(2009) 우정호 외(2009) 유병훈 외(2009) 정순영 외(2009)	○	○	○	×	○	○	×*	○
송근화 외(2009) 윤성식 외(2009) 이강섭 외(2009) 이대현 외(2009)	○	○	○	×	○	○	×	○
이준열 외(2009)	○	○	×*	×*	○	○	×*	○

×* : 서로 다른 두 직선임을 명시한 경우

27종의 중학교 1학년 교과서 중에서 26종의 교과서가 평면에서 두 직선의 위치 관계를 다룰 때, ‘평행’과 ‘일치’를 구분하였다. 이준열 외(2009)는 평면에서 두 직선 위치 관계를 2가지로 구분하였으나, ‘서로 다른 두 직선’임을 명시함으로써 ‘일치’인 경우를 암묵적으로 배제한 것이라 할 수 있다. 반면에 공간에서 두 직선의 위치 관계는 4종의 교과서만이 [그림 6]과 같이 ‘일치’를 명시적으로 나타내었고, ‘서로 다른 두 직선’을 이용하여 두 직선의 위치 관계를 설명하거나, ‘공간에서 두 직선이 일치하는 경우는 하나의 직선으로 본다’고 명시함으로써 ‘일치’를 배제하기도 하였다. 한편 12종에서는 ‘두 직선이 일치하는 경우를 하나의 직선으로 본다’는 내용을 평면에서 두 직선의 위치 관계를 설명하면서 제시하고 있으나, 박윤범 외(2009), 정광식 외(2009)의 경우에는 ‘공간에서 두 직선의 위치 관계’를 다루면서 ‘두 직선이 일치하는 경우에는 하나의 직선으로 본다’는 설명을 제시하기도 하였다.

한편 고등학교 선택 과목인 ‘기하와 벡터’에서는 ‘평행’, ‘일치’ 개념이 중학교와 다소 다르게 제시된다. 벡터는 위치에 관계없이 방향과 크기만으로 결정되므로, 방향과 크기가 같은 벡터는 모두 같은 벡터가 되기 때문이다. 따라서 벡터의 관점에서 볼 때, 이전에 ‘평행’으로 보았던 선분도 길이와 방향이 같으면 ‘일치’하는 선분이 된다. 또, 두 선분이 완전히 포개어져도 방향이 서로 반대이면 ‘일치’하지 않는다. 그러나 10종의 ‘기하와 벡터’ 교과서에서는 모두 [그림 7]과 같이 “ $\vec{a} = k\vec{b}$ (k 는 0이 아닌 실수)”라고 설명할 뿐, ‘평행’과 ‘일치’에 대하여 명확히 구분하지 않는다. 이러한 설명에는 $k=1$ 인 경우가 포함되므로 엄밀한 의미에서 볼 때 ‘일치’가 ‘평행’의 한 종류로 포함된다고 할 수 있다³⁾.

벡터의 평행

영벡터가 아닌 두 벡터 \vec{a} , \vec{b} 와 0이 아닌 실수 k 에 대하여

$$\vec{a} // \vec{b} \iff \vec{b} = k\vec{a}$$

[그림 7] 벡터의 평행(유희찬 외, 2010: 134)

따라서 벡터를 이용하여 직선을 나타낼 때, 두 직선이 ‘평행’인지, ‘일치’인지 여부는 중요하게 다루어지지 않는다. 방향과 크기만으로 설명되는 벡터의 특성에 따라 직선의 방향이 중요하고 두 직선의 평행은 ‘만나지 않는’ 것보다 ‘방향이 같은’ 것으로 해석되기 때문이다.

지금까지의 내용을 정리하면, 초등학교와 중학교의 ‘기하’ 영역에서 다루어지는 ‘평행’은 주로 ‘만남’의 의미로 해석된다. 초등학교 교과서에서는 선분과 직선이 구분되지 않은 채, ‘만나지 않는 경우’로 ‘평행’을 다루며 두 직선의 ‘일치’를 명시적으로 다루지는 않는다. 중학교 교과서에서는 평면에서 두 직선의 위치 관계를 다룰 때, ‘평행’과 ‘일치’는 구분하고 있다. 그러나 공간에서 두 직선의 위치 관계는 ‘일치’하는 경우를 구분하여 설명하거나 ‘서로 다른’ 직선만을 다룸으로써 ‘일치’를 배제하기도 하고, 특별한 설명이 제시되지 않는 경우도 많다. 고등학교에서는 ‘벡터’ 영역에서 두 직선의 ‘평행’이 다루어지고, 이때 두 직선은 ‘방향’이 같은 것으로 설명되므로, 선분의 경우 방향과 길이를 모두 고려하게 되어 ‘평행’과 ‘일치’의 구분이 다소 무의미해진다. 따라서 교과서에서도 ‘평행’과 ‘일치’를 구분하지 않음을 알 수 있다.

3) 정상권 외(2010)는 “ $\vec{a} = 1 \vec{a}$ 이므로 $\vec{a} // \vec{a}$ 이다”라는 설명과 함께 ‘일치’도 ‘평행’임을 제시하기도 하였다.

2. 함수 영역에서의 평행

두 직선의 ‘평행’과 ‘일치’는 해석 기하의 차원에서 학교수학의 함수영역에서도 다루어지는데, 중학교 2학년 수학에서 직선을 일차함수의 그래프로 나타낼 때, 기울기가 같은 직선을 평행하거나 일치한다고 설명함으로써 제시된다. 즉, 기하 영역의 ‘만남’은 함수 영역에서 ‘기울기’ 개념으로 변하여 [그림 8]과 같이 ‘평행’한 경우와 ‘일치’하는 경우는 서로 다른 것으로 다루어진다.

일차함수의 그래프의 기울기와 평행

- 1 기울기가 같은 두 일차함수의 그래프는 서로 평행이거나 일치한다.
- 2 서로 평행인 두 일차함수의 그래프의 기울기는 서로 같다.

[그림 8] 일차함수의 그래프의 기울기와 평행 (김홍중 외, 2010: 137)

일차함수와 연립방정식을 연결한 부분에서는 기하 영역에서 평면에서 두 직선의 위치 관계를 세 가지로 구분하여 제시한 것과 같이 한 점에서 만나는 경우, 일치하는 경우, 평행한 경우로 구분하여 설명한다. [그림 9]와 같이 일차방정식을 좌표평면 위에 직선으로 나타내었을 때 두 직선이 만나는 점의 개수에 따라 연립방정식의 해의 개수가 결정되고, 이는 평면에서 두 직선의 위치 관계를 나타내고 있기 때문이다. 바로 앞에서 일차함수의 그래프의 기울기와 평행에 대하여 다루고 있음을 고려할 때, 일차함수의 그래프의 기울기 개념에서도 ‘평행’과 ‘일치’를 구분하고 있다고 볼 수 있다.

연립방정식의 해와 그래프(2)

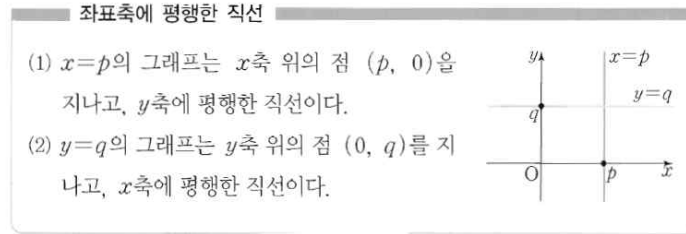
연립방정식 $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ ($a \neq 0, b \neq 0, a' \neq 0, b' \neq 0$)의 해의 개수는

두 방정식의 그래프의 교점의 개수와 같다. 즉, 두 직선이

- 1 한 점에서 만나면 연립방정식의 해는 교점의 좌표 하나뿐이다.
- 2 일치하면 연립방정식의 해는 무수히 많다.
- 3 평행하면 연립방정식의 해는 없다.

[그림 9] 연립방정식의 해와 일차함수의 그래프 (정상권 외, 2010: 158)

그러나 좌표축에 평행한 직선을 다루는 맥락에서는 두 직선이 ‘일치’하는 경우가 ‘평행’에 포함되어 제시된다. [그림 10]에 $x=p$ 의 그래프는 y 축에 평행한 직선이고 ‘특히’ $x=0$ 의 그래프는 y 축이라고 명시되어 있음을 알 수 있다. 따라서 이 서술에서는 $x=0$ 의 그래프가 y 축에 평행한 직선의 사례 중 한 가지가 되고, 결과적으로 ‘일치’는 ‘평행’에 포함된다고 볼 수 있다.

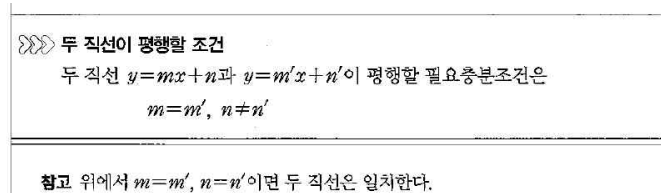


[참고] $x=0$ 의 그래프는 y 축이고, $y=0$ 의 그래프는 x 축이다.

[그림 10] 좌표축에 평행한 직선(윤성식 외, 2010: 138)

17종4)의 교과서 중에서 5종의 교과서(김홍중, 2010; 송근화, 2010; 이준열, 2010; 정상권, 2010; 최용준, 2010)에서는 “ $x=p(p \neq 0)$ 의 그래프는 y 축에 평행한 직선이고, $x=0$ 은 y 축이다”와 같이 좌표축에 평행한 직선과 좌표축인 경우를 구분하였으나, 12종의 다른 교과서에서는 좌표축에 평행한 직선을 설명하면서 $p \neq 0$ 인 경우와 $p=0$ 인 경우를 구별하지 않았다. 즉 맥락에 따라 ‘평행’과 ‘일치’는 구분되기도 하고 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되기도 함을 알 수 있다.

한편 고등학교 수학의 ‘두 직선의 평행과 수직’에서는 두 직선의 평행 조건을 [그림 11]과 같이 제시한다.



[그림 11] 두 직선의 평행 조건 (황선욱 외, 2010: 171)

고등학교에서는 문자를 사용하였을 뿐 두 직선의 평행 조건은 중학교 2학년에서 다루는 내용과 유사하다. 다만 중학교에서 기울기가 같으면 평행하거나 일치한다는 것을 y 절편을 이용하여 보다 명확하게 구분하고 있다. 그러나 직선과 좌표축과의 평행을 설명하는 맥락에서는 중학교에서와 마찬가지로 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되어 있다.

4) 2007 개정 수학과 교육과정에 따라 18종의 중학교 2학년 교과서가 검정심사를 통과하였으나, 현재 절판 중인 1종을 제외한 17종의 교과서를 분석 대상으로 하였다.

이와 같이, 모든 직선의 방정식은 x, y 에 대한 일차방정식

$$ax+by+c=0 \quad (a \neq 0 \text{ 또는 } b \neq 0)$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

역으로, x, y 에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ 의 그래프는 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a \neq 0, b \neq 0$ 일 때, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로 기울기가 $-\frac{a}{b}$, y 절편이

$$-\frac{c}{b}$$
인 직선이다.

(ii) $a \neq 0, b = 0$ 일 때, $x = -\frac{c}{a}$ 이므로 y 축에 평행한 직선이다.

(iii) $a = 0, b \neq 0$ 일 때, $y = -\frac{c}{b}$ 이므로 x 축에 평행한 직선이다.

(i), (ii), (iii)에서 x, y 에 대한 일차방정식 $ax+by+c=0$ 의 그래프는 직선임을 알 수 있다.

[그림 12] 직선의 방정식(이강섭 외, 2009: 204)

[그림 12]는 $ax+by+c=0$ 의 그래프를 설명할 때, $a \neq 0$ 인 경우와 $a=0$ 인 경우로 분류하고, $a=0$ 인 경우에는 $b \neq 0$ 인 경우를 서술하고 있다. 따라서 좌표평면에서 직선은 좌표축에 평행하지 않은 직선과 y 축에 평행한 직선, x 축에 평행한 직선으로 구분된다. 여기서 $c=0$ 인 경우는 따로 제시되지 않는다. 18종의 고등학교 수학 교과서에서는 모두 이와 같이 좌표축에 평행한 직선을 구분하지 않은 채, 좌표축도 좌표축에 평행한 직선으로 설명한다.

이상에서 살펴본 내용을 정리하면, 학교수학의 함수 영역에서는 두 직선의 위치 관계가 함수의 그래프의 기울기 맥락에서 설명된다. 이때 함수의 그래프 혹은 직선은 ‘평행’과 ‘일치’가 명백하게 구분되어 다루어지는 반면, 좌표축과의 관계에서는 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되어 제시되기도 하는 등 구분이 명확하지 않다.

III. ‘평행’과 ‘일치’ 관계 설정 방안 모색

현재 사용되는 교과서에서 ‘평행’과 ‘일치’는 맥락에 따라 구분되기도 하고, 구분되지 않기도 한다. 특히 교과서에 따라 기하영역의 ‘만남’ 맥락이나 함수영역의 ‘기울기’ 맥락에서 모두 ‘평행’과 ‘일치’를 구분하지 않는 경우가 나타났다. 이와 같이 상황에 따라 다른 내용 진술 방식은 학생들에게 혼란을 불러일으킬 수 있으므로, 이에 대한 관계 설정 방안이 모색되어야 한다. 본 연구에서는 ‘평행’과 ‘일치’ 구분의 모호함에 의해 발생되었던 논의를 제기하고 이전 교육과정을 따른 교과서와 미국과 일본의 교과서 사례를 분석을 통해 이를 해소할 수 있는 방안을 마련하고자 한다.

1. ‘평행’과 ‘일치’ 구분의 모호함

2012학년도 대학수학능력시험(이하 ‘수능’) 9월 모의평가에서는 수리 영역 ‘가’형과 ‘나’형의 공통으로 지수함수의 그래프의 개형 및 성질을 이해하고, 이를 바탕으로 수열의 규칙성을 추론할 수 있는지를 평가하기 위한 문항

이 출제되었다.

30. 자연수 n 에 대하여 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형의 한 변의 길이를 a_n 이라 하자.

- (가) 정사각형의 각 변은 좌표축에 평행하고, 두 대각선의 교점은 $(n, 2^n)$ 이다.
 (나) 정사각형과 그 내부에 있는 점 (x, y) 중에서 x 가 자연수이고, $y=2^x$ 을 만족시키는 점은 3개뿐이다.

예를 들어 $a_1 = 12$ 이다. $\sum_{k=1}^7 a_k$ 의 값을 구하시오. [4점]

[그림 13] 2012학년도 수능 9월 모의평가 수리영역 30번 문항

이 문항과 관련하여 지수함수의 그래프의 개형과 성질에 대한 이해가 뒷받침되지 않는 학생의 경우 문제해결을 위한 시도조차 쉽지 않았을 것이다. 그러나 시험 실시 후 제기된 이의 신청에⁵⁾ 따르면 수험생 중 일부는 지수함수의 그래프에 대한 이해가 아닌 다른 부분에서 혼란을 겪었음을 알 수 있다. 다음은 수험생의 이의 신청 사례 중 하나이다.

a_2 의 값을 구하는 과정에서, 정사각형의 중심은 $(2, 4)$ 가 되어야 하고, 조건 (나)를 만족하기 위해 정사각형과 그 내부가 세 점 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 8)$ ⁶⁾을 포함해야 합니다. 이때, 정사각형의 한 변의 길이가 8인 것으로 택하면 되는 것으로 보이지만, 이 경우 정사각형의 아랫변이 x 축과 평행한 상태가 되지 않고, 포함되는 상태가 되므로 조건 (가)를 만족하지 않습니다. 교과서를 보면, 직선과 직선과의 관계는 평면에서 일치, 평행, 교차의 세 경우가 있고, ‘평행’은 평면에서 두 직선이 서로 만나지 않는 것으로 되어 있습니다. 그러므로 $a_2 > 8$ 을 만족해야 하는 데, a_2 를 실수로 보면 최솟값이 없고, a_2 를 자연수로 보면 $a_2 = 9$ 가 되어야 합니다. ... (중략)

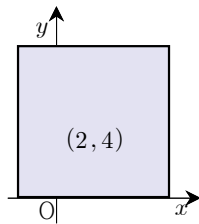
주어진 문항에서 $n=2$ 인 경우 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형을 그려보면 네 직선 $x=-2$, $x=6$, $y=8$, $y=0$ 으로 둘러싸인 부분이다([그림 14] 참조). 이때, $y=0$ 은 x 축이므로 그려진 정사각형의 한 변은 x 축에 포함된다. 그러나 교과서에서 두 직선의 ‘평행’은 ‘만나지 않는’ 것이므로 문항 오류라는 것이 이의 신청자의 의견이다. 이 내용의 이의 신청은 당시 유의미한 이의 신청 전체의 60%를 차지하여 수험생들의 상당수가 이러한 혼란을 겪었다고 생각할 수 있다. 이와 같은 이의에 대해 한국교육과정평가원에서는 문항의 (가) 조건은 좌표평면에서 정사각형의 위치를 정하기 위한 조건 즉, 조건을 만족시키는 정사각형의 기울어진 정도를 설명한

5) 수능 모의평가와 본시험의 출제를 주관하는 한국교육과정평가원은 모의평가와 본시험 당일 매 교시 종료 후부터 4~5일간 홈페이지에 개설된 이의 신청 게시판을 통하여 문제 및 정답에 대한 이의 신청을 받는다. 수능 이의 신청 게시판은 반드시 실명으로 회원 가입 후 작성하도록 규정되어 있다.

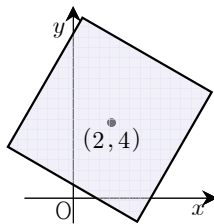
6) 정사각형과 그 내부가 $(4, 8)$ 을 포함해야 한다는 것은 이의신청자의 오류이다. 올바른 점은 $(3, 8)$ 이다.

다는 답변을 제시하였다.

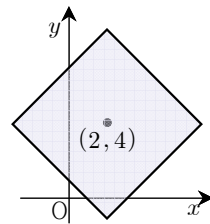
그렇다면 이 문항에서 정사각형의 위치를 정하는 것이 왜 필요하였을까? 중심이 $(n, 2^n)$ 이고 정사각형의 변과 내부에 있는 $(x, 2^x)$ (x 는 자연수)인 점이 세 개 뿐인 정사각형은 무수히 많다. 크기가 같은 정사각형 중에서도 좌표평면 위에서의 위치에 따라 이 조건을 만족시키기도 하고, 만족시키지 않기도 한다. 예를 들어 $n=2$ 인 경우 중심이 $(2, 4)$ 이고 두 점 $(1, 2)$ 와 $(3, 8)$ 을 정사각형의 변 또는 내부에 포함하는 정사각형은 여러 개가 있을 수 있고, [그림 15], [그림 16]과 같이 [그림 14]보다 한 변의 길이가 작은 정사각형도 그릴 수 있다.



[그림 14]



[그림 15]



[그림 16]

그러나 정사각형의 변이 기울어진 정도까지 고려하면서 조건을 만족시키는 가장 작은 정사각형을 찾아야 한다면 문항이 매우 어려워진다. 따라서 출제자는 좌표평면에서 정사각형의 위치를 고정시킴으로써 출제 의도와 무관한 부분에서 학생들이 많은 시간을 보내게 되는 것을 막고자 했던 것으로 판단된다.

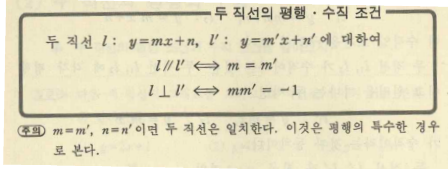
정사각형의 위치를 정하기 위한 조건이라는 한국교육과정평가원의 답변에 대하여 두 직선, 또는 선분과 직선의 ‘평행’은 ‘만나지 않는 것’이므로 문항 오류를 지속적으로 주장하거나, 학교수학에서의 ‘평행’ 개념에 대한 추가 설명을 요청하는 경우도 있었다. 선분과 직선의 관계를 ‘만남’의 의미에서만 해석한다면 이러한 이의가 타당하지만, 현재 사용되는 교과서에서 좌표축과 직선의 관계를 말할 때 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되어 서술되기도 함을 고려하면, 정사각형의 위치를 정하기 위한 조건이라는 해석 역시 타당하다. 즉, ‘만남’의 관점에서 보면 ‘일치’는 평행에 포함되지 않지만, ‘기울기’의 관점에서 보면 ‘일치’는 ‘평행’의 특수한 경우라고 할 수도 있기 때문이다. 특히, 앞 장의 교과서 분석에서 살펴보았듯이 좌표축과의 평행과 관련해서는 더욱 그러하다. 이에 본 연구에서는 ‘평행’, ‘일치’에 대한 이전 교육과정을 따르는 교과서와 외국의 교과서 서술을 살펴보았다.

2. 이전 교육과정을 따르는 교과서에서의 ‘평행’과 ‘일치’

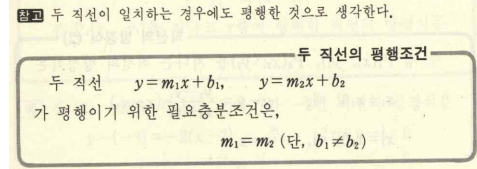
이전 교육과정을 따르는 교과서를 살펴본 결과 두 직선의 ‘평행’과 ‘일치’의 구분은 제6차 수학과 교육과정에 따른 교과서에서부터 시작되었다. 제6차 수학과 교육과정에 따라 개발된 교과서와 제7차 수학과 교육과정에 따라 개발된 교과서는 ‘평행’ 개념과 관련하여 2007 개정 수학과 교육과정에 따라 개발된 교과서와 유사하게 서술되어 있다. 그러나 그 이전의 교육과정을 따르는 교과서에서는 ‘평행’과 ‘일치’를 명확히 구분하지 않거나, 명백하게 ‘일치’를 ‘평행’의 한 특수한 사례로 다루었다.

제5차 교육과정에 따른 교과서인 김명렬 외(1992)에서는 [그림 17]에서 볼 수 있듯이 두 직선의 평행을 다루면서 상수항의 계수에 대한 제한 없이 두 직선의 기울기가 같다는 것만으로 정의하고, 두 직선이 일치하는 경우를 평행의 특수한 사례라고 명시하였다. 이흥천 외(1993)에서도 [그림 18]과 같이 두 직선이 평행이기 위한 필요충분조건에서 ‘평행’과 ‘일치’를 구분하지만, ‘두 직선이 일치하는 경우에도 평행한 것으로 생각한다’는 단서를 명

시하였다.

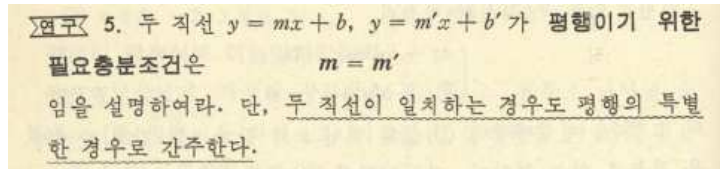


[그림 17] 두 직선의 평행·수직 조건
(김명렬 외, 1992: 134)



[그림 18] 두 직선의 평행조건
(이흥천 외, 1993: 146)

제4차 수학과 교육과정에 따른 교과서에서도 ‘일치’를 ‘평행’으로 간주하였다. 신동선 외(1985)는 ‘두 직선 $y = mx + k$ 와 $y = m'x + k'$ 이 평행하기 위한 필요충분조건으로 ‘ $m = m'$ ’을 제시하고 “특히 $m = m'$, $k = k'$ 일 때, 두 직선은 일치한다(p.149).”면서 ‘일치’를 ‘평행’의 특수한 경우로 설명하였다. 장태환 외(1985)도 ‘두 직선 $y = mx + n$ 과 $y = m'x + n'$ 이 평행하기 위한 조건으로 ‘ $m = m'$ ’을 제시하고, “여기서 $m = m'$ 이고 $n = n'$ 이면 두 직선은 일치하는데, 이 경우도 평행한 것으로 생각한다(p.155)”라고 명시하였다. 정영진(1985)은 “단, 두 직선이 일치하는 경우도 평행의 특별한 경우로 간주한다”는 부분에 밑줄을 그어 강조하기도 하였다 ([그림 19] 참고).



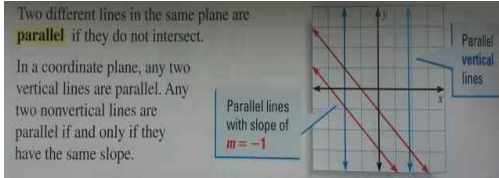
[그림 19] 두 직선의 평행 조건(정영진, 1985: 140)

이와 같이 제4차 교육과정이나 제5차 교육과정을 따르는 교과서 중에는 기울기 맥락에서 두 직선의 ‘평행’과 ‘일치’를 다룰 때, ‘일치’를 ‘평행’의 특수한 경우로 보거나 일치하는 경우도 평행으로 간주한다는 언급을 분명히 하였다.

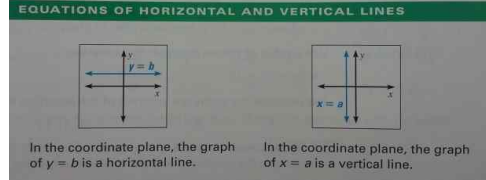
3. 외국 교과서에서의 ‘평행’과 ‘일치’

미국의 교과서에서는 ‘두 직선이 평행하다’를 ‘두 직선의 기울기가 같다’는 것과 필요충분조건으로 설명함으로써 ‘일치’를 구분하지 않거나⁷⁾, 같은 평면에 있는 두 직선이 교점을 갖지 않을 때 두 직선이 ‘평행’하다고(Larson et al, 2004) 제시함으로써 ‘만남’ 혹은 ‘기울기’의 맥락에서 모두 ‘일치’를 구분하여 다루지 않고 있다([그림 20], [그림 21] 참고). 특히 우리나라 교과서에서는 맥락에 따라 ‘평행’과 ‘일치’를 구분하기도 하였던 좌표축과의 평행과 관련된 부분에서도 미국 교과서에는 구분하지 않고 있다.

7) “Two nonvertical lines are parallel if and only if their slopes are equal(Gordon et al, 1997: 42).” “If two lines have the same slope, then they are parallel(Senk et al, 1998: 149).”

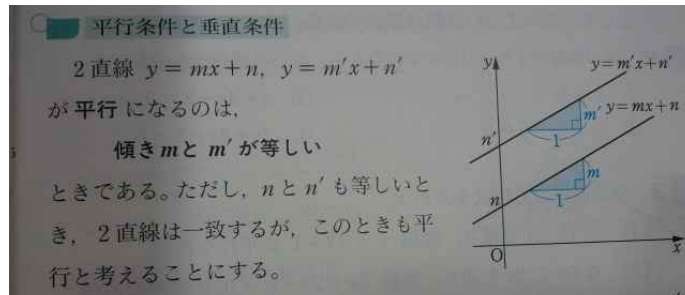


[그림 20] 미국 교과서에 제시된 두 직선의 평행 (Larson et al, 2004: 242)



[그림 21] 미국 교과서에 제시된 좌표축과의 평행 (Larson et al, 2004: 213)

한편 일본의 중학교 2학년 교과서(飯高, 2004)에서는 기울기 맥락에서 두 직선의 ‘평행’을 설명할 때, [그림 22]에서와 같이 ‘일치’도 ‘평행’으로 간주함을 명시하였다.⁸⁾



[그림 22] 일본 교과서에 제시된 평행조건(飯高, 2004: 65)

IV. 요약 및 결론

본 논문에서는 2007 개정 수학과 교육과정에 따라 개발된 현재의 교과서에서 각 학교급별로 ‘평행’과 ‘일치’를 어떻게 다루고 있는지를 분석하였다. 우리나라 초등학교 교과서에서 직선의 평행은 ‘만남’의 맥락으로 도입되어 ‘기울기’ 맥락에서 설명된 후 고등학교 「기하와 벡터」에서 방향이 중심적인 역할을 하는 ‘벡터의 평행’으로 진행된다. ‘만남’으로 평행이 해석될 때에는 평행한 두 직선이 ‘서로 만나지 않는 두 직선’으로 정의되기 때문에 ‘평행’과 ‘일치’가 명백히 구분된다. 특히 중학교 1학년의 ‘평면에서 두 직선의 위치 관계’에서는 두 직선이 한 점에서 만나는 경우, 평행인 경우, 일치하는 경우로 확실하게 구분된다. 그러나 ‘공간에서 두 직선의 위치 관계’에서는 두 직선이 한 점에서 만나는 경우, 평행인 경우, 꼬인 위치에 있는 경우로 구분되어 두 직선이 일치하는 경우가 배제된다. 이에 비해 ‘기울기’ 개념으로 평행이 해석될 때에는, 기울기가 같고 y 절편이 다른 두 직선이 ‘평행’으로 다루어짐으로써 ‘평행’과 ‘일치’가 명시적으로 구분되어 서술된다. 그러나 좌표축과의 평행과 관련된 내용에서는 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되어 서술된다. 한편 미국 교과서에서는 ‘일치’를 구분하여 설명하지 않았고, 우리나라

8) 교과서 내용을 번역하면 다음과 같다. “2직선 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ 이 평행이 되는 것은 기울기 m 과 m' 이 같을 때이다. 단, n 과 n' 도 같을 때 두 직선은 일치하지만, 이때도 평행이라고 생각하는 것으로 한다.”

의 이전 교육과정을 따르는 교과서와 일본 교과서에서는 기울기 맥락에서 ‘일치’도 ‘평행’의 특수한 경우로 간주한다는 언급을 교과서에서 명확하게 하였다.

평면이나 공간에 대한 이해, 추론 능력 등을 바탕으로 그림을 이용하여 대상을 나타내고 해석하는 능력은 학생들이 수학의 다른 주제를 이해하는 데 초석이 된다는 점에서 기하 영역은 수학 교육과정에서 중요하게 다루어진다(Chinnappan & Lawson, 2005). 그러나 기하 영역을 학습하는 데 있어 용어와 정의에 대하여 이해가 충분하지 않은 경우, 학생들은 대상이나 관계를 학습하지 못한 채, 몇몇 사례들을 배우는 데 머무르게 된다(권유미, 안병곤, 2005). 따라서 대상을 이해하고 개념을 형성하는 과정에 많은 영향을 미치는 정의와 용어의 중요성을 인식하면서 학생들의 직관적 경험과 학문으로서의 수학에 모두 적합하도록 대상을 정의하는 방식에 대한 면밀한 검토가 필요하다.

‘평행’, ‘일치’에 관한 본 논문의 분석 결과, 첫째, 학교수학에서 ‘평행’과 ‘일치’의 관계는 맥락에 따라 상이한 의미로 해석될 여지가 있는 ‘맥락 의존적 정의(박교식, 임재훈, 2004)’가 적용되고 있었다. 그러나 맥락에 따라 다르게 해석될 수 있는 ‘평행’과 ‘일치’의 관계는 학생들에게 혼란을 야기할 수 있다. 따라서 학교수학의 ‘맥락 의존적 정의’가 학문으로서의 수학이 갖고 있는 본질을 살리면서 논리적 일관성이나 객관성을 잃지 않은 채 학교수학에서 의미 있게 자리 매김을 할 수 있도록 하는 방안이 모색되어야 한다. 이를 위해서는 ‘두 사물이 나란하다’는 직관을 바탕으로 ‘서로 만나지 않는’ 것으로 체득된 ‘평행’ 개념과 ‘기울기가 같은’ 직선으로서의 ‘평행’ 개념을 유기적으로 연결시킬 수 있는 방안이 필요하다. 특히 기울기 개념에서 ‘일치’에 대하여 명백하게 언급함으로써 ‘서로 만나지 않는’ 맥락에서는 ‘일치’와 ‘평행’이 명백히 다르지만 ‘기울기가 같은’ 맥락에서는 ‘일치’가 ‘평행’에 포함되는 상황으로부터 야기되는 혼란을 최소화해야 한다.

이와 관련하여, 두 가지 방안을 생각할 수 있다. 첫째, 이전 교육과정을 따르는 교과서나 일본 교과서의 사례를 참고할 때 기울기 맥락에서는 ‘일치’를 ‘평행’에 포함되는 것으로 보고, 이를 교과서에 명시하는 방안이다. 직선의 중요한 요소가 방향성(Freudenthal, 1983)이라는 측면에서 볼 때 기울기 맥락에서 ‘평행’과 ‘일치’의 구분은 큰 의미를 갖지 않을 수도 있으므로 이것은 향후 방향과 크기만을 고려하는 벡터 개념의 학습에 도움이 될 수 있다. 둘째, 기울기 맥락에서도 ‘서로 만나지 않는’ 것으로 ‘평행’의 개념을 설명하여 ‘일치’와 ‘평행’을 구분하여 다루는 것이다. 따라서 좌표평면에서 좌표축과 직선의 평행을 언급할 때, 직선의 방정식이 $x=0$, $y=0$ 인 경우 각각 y 축, x 축임을 명시하여 ‘일치’를 구분한다. 그러나 이와 같은 경우는 좌표축과 직선의 관계가 지나치게 세분된다는 비판이 있을 수도 있다. 따라서 위의 두 방안 중 어느 것을 택할 것인가에 대한 결정에는 면밀한 교수학적 분석과 실증적 후속 연구가 뒷받침되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

- 강신덕, 함남우, 홍인숙, 김영우, 이재순, 전민정, 라미영(2009). 중학교 수학1. 교학사.
- 강홍규, 조영미 (2002). 학교기하의 다양한 정의 방법과 그 교수학적 의의, 수학교육학연구, **12(1)**, 95-108.
- 교육과학기술부(2010). 초등학교 수학 4-2.
- 교육과학기술부(2011). 초등학교 수학 5-1.
- 권석일, 박교식(2011). 초등학교 수학 교과서에서의 용어 사용과 정의 방식에 관한 비판적 분석: 몇 가지 예를 중심으로. 한국초등수학교육학회지, **15(2)**, 301-316.
- 권유미, 안병곤(2005). 초등 수학 교과서에 사용되고 있는 수학 용어에 대한 학생들의 이해도 분석-도형 영역을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, **9(2)**, 137-159.

- 김중해, 김창일, 한길준, 한철형, 신송임(2009). 중학교 수학1. (주)에듀왕.
- 김명렬, 김창동, 박수화(1992). 일반수학. 대일도서.
- 김문주(2012). 점, 직선, 평면의 위치관계에 대한 중학교 1학년 학생들의 이해에 관한 사례 연구. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- 김부윤, 송영무, 김춘실, 이순주, 김이언, 권숙귀, 이술선, 김정희, 정재훈, 이미경, 류춘희, 이지성, 강선영, 안은주, 주신영(2009). 중학교 수학 1. 교과서다음(주).
- 김원경, 조민식, 김영주, 김윤희, 방환선, 윤기원, 이춘신(2009). 중학교 수학1. 비유와상징.
- 김홍종, 계승혁, 오지은, 원애경(2009). 중학교 수학1. 성지출판(주).
- 김홍종, 계승혁, 오지은, 원애경(2010). 중학교 수학2. 성지출판(주).
- 남경주(2012). 수직과 평행 지도 방법에 관한 한국, 일본, 싱가포르 초등학교 수학 교과서 분석. 전주교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 박교식, 임재훈(2004). 다각형, 다면체, 면에 대한 교수학적 분석. 수학교육학연구, **14(1)**, 19-37.
- 박규홍, 최병철, 안숙영, 김준식, 유미영(2009). 중학교 수학1. (주)동화사.
- 박영훈, 여태경, 김선화, 심성아, 이태림, 김수미(2009). 중학교 수학1. 천재문화.
- 박윤범, 남상이, 최소희, 홍유미(2009). 중학교 수학1. 웅진씽크빅.
- 박종률, 유종광, 이창주, 홍분남, 김덕진, 박유량(2009). 중학교 수학1. (주)도서출판 디딤돌.
- 백대현(2011). 제7차와 2007년 개정 교육과정의 초등학교 수학 교과서에 제시된 '약속'의 내용과 서술 방식의 비교 분석. 수학교육학연구, **21(3)**, 261-278.
- 백대현(2010). 초등학교 수학 교과서에 제시된 용어 사용과 표현의 적절성 고찰. 학교수학, **12(1)**, 61-77.
- 송근화, 정운석, 유기중, 우종욱, 이흥기, 이용경(2009). 중학교 수학1. 새롭교육.
- 송근화, 정운석, 유기중, 우종욱, 이흥기, 이용경(2010). 중학교 수학2. 새롭교육.
- 송정환(2001). 초등학교 수학 교과서에 나타난 수직과 평행 지도방법에 대한 분석. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 신항균, 이광연, 윤혜영, 이지현(2009). 중학교 수학1. (주)지학사.
- 우정호, 박교식, 박경미, 이형과, 김남희, 임재훈, 박인, 지은정, 신보미, 최인선(2009). 중학교 수학1. 두산공아.
- 유병훈, 이동원, 이용완, 김영호, 이순호, 박은옥, 이종인, 배수경, 김형미, 정주연(2009). 중학교 수학1. 법문사.
- 유희찬, 류성림, 한혜정, 강순모, 제수연, 김명수, 천태선, 김민정(2009). 중학교 수학1. (주)미래엔컬처그룹
- 유희찬, 조완영, 손홍찬, 조정목, 이병만, 김용식, 임미선, 선미향, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 정성윤(2010). 기하와 벡터. (주)미래엔컬처그룹
- 윤성식, 조난숙, 김화영, 조준모, 장홍월, 김해경(2009). 중학교 수학1. 더텍스트.
- 윤성식, 조난숙, 김화영, 조준모, 장홍월, 김해경(2010). 중학교 수학2. 더텍스트.
- 윤제한, 박진석, 정낙영, 이영철, 이성재, 윤장노, 최준호, 장인선(2009). 중학교 수학1. 더텍스트.
- 이강섭, 왕규채, 송교식, 이강희, 안인숙(2009). 중학교 수학1. 지학사.
- 이강섭, 왕규채, 송교식, 양인웅(2009). 고등학교 수학. 지학사.
- 이대현, 김성국, 김종남, 박남미, 육상국, 임창우, 박두일, 신동선(2009). 중학교 수학1. 두레교육(주).
- 이영하, 홍정희, 한동승, 오정현, 김기연, 원유미(2009). 중학교 수학1. (주)교문사.
- 이종영(2005). 초등학교 수학에서 평행과 평행선 지도에 관한 고찰. 수학교육학연구, **15(3)**, 273-286.
- 이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미, 임유원(2009). 중학교 수학1. 천재교육.
- 이흥천, 김종현(1993). 일반수학. 동아출판사.
- 임재훈, 박교식(2009). 우리나라 수학 교과서의 닳음 도입 및 정의에 관한 비판적 논의. 수학교육학연구, **19(3)**,

393-407.

- 장건수, 고성화, 김관중, 김의석, 안희정, 이상윤, 임중삼, 장지경, 정경숙, 최승규(2009). 중학교 수학1. 지구문화사.
- 장태환, 서태영, 이종근, 박재명(1985). 수학 I. 삼화서적(주).
- 정광식, 김정현, 오종래, 임윤영(2009). 중학교 수학1. 대교.
- 정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진근, 서혜숙, 박부성, 강은주(2009). 중학교 수학1. (주)금성출판사.
- 정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진근, 서혜숙, 박부성, 강은주(2010). 중학교 수학2. (주)금성출판사.
- 정순영, 권혁진, 강은중, 이환철, 신지영, 설정수(2009). 중학교 수학1. (주)두산.
- 정영진 (1985). 수학 I. 학연사.
- 정창현, 김창동, 이상은, 이치형, 민정범(2009). 중학교 수학1. 대교.
- 조영미(2002). 수학 교과서에서 사용하는 정의의 특성 분석과 수준 탐색-기하 영역을 중심으로. 학교수학, **4(1)**, 15-27.
- 최용준, 한대회, 박진교, 김강은, 신태양, 배명주(2009). 중학교 수학1. 천재문화.
- 황선욱, 강병개, 김수영, 박정아(2009). 중학교 수학1. 좋은책신사고.
- 황선욱, 강병개, 김수영(2009). 고등학교 수학. 좋은책신사고.
- 飯高(2004). 신편 수학II. 동경서적.
- Chinnappan, M. & Lawson, M. J.(2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **8(3)**, 197-224.
- Edwards, B. S. & Ward, M. B.(2004). Surprise from mathematics education research: student (mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, **111(5)**, 411-424.
- Freudenthal, H.(1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel Publishing Company.
- Gordon, B. W., Yunker, L. E., Crosswhite, F. J., & Vannatta, G. D.(1997). *Advanced mathematical concepts-precalculus with applications*. McGraw-Hill.
- Larson, R., Boswell, L., Kanold, T. D., & Stiff, L. (2004). *Algebra I*. McDougal Littell.
- Senk, S. L., Thompson, D. R., Viktora, S. S., Usiskin, Z., Ahbel, N. P., Levin, S., Weinhold, M. L., Rubenstein, R. N., Jaskowiak, J. H., Flanders, J., Jakucyn, N., & Pillsbury, G.(1998). *UCSMP Advanced Algebra: integrated mathematics*. Scott Foresman Addison Wesley.
- Tall, D. & Vinner, S.(1982). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **12(2)**, 151-169.
- Zaslavsky, O. & Shir, K.(2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36(4)**, 317-346.

A study on the relationship between ‘parallel’ and ‘identical’ in school mathematics

JinYoung, Nam

GyeongIn National University of Education

E-mail : jynam@ginue.ac.kr

Seongmin, Cho[†]

Korea Institute for Curriculum and Evaluation

E-mail : csminy@kice.re.kr

In this study, we investigated how the relationship between 'parallel' lines and 'identical' lines is stated in mathematics textbooks of the 2007 revised national curriculum. In school mathematics, 'parallel' lines and 'identical' lines are explicitly distinguished in the perspective of 'coincidence', whereas 'identical' lines are implicitly regarded as a special case of 'parallel' in the perspective of 'slope'. These different treatments could bring out a confusion as was in the mock mathematics test for 2012 College Scholastic Ability Test. To resolve this confusion, it needs to be considered that the relationship between 'parallel' lines and 'identical' lines are more clearly stated in the context of 'slope' such as in some textbooks for the 4th and 5th curriculum and a textbook of Japan.

* ZDM Classification : U23

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key word: parallel, identical, slope, textbooks

[†] Corresponding author