한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 1, 241-263, March 2013

# 문제해결 과정에서 나타난 고등학생들의 수학적 추론 특성[1)]

강윤수[2)] · 김민주[3)]

본 연구의 목적은 문제해결 과정에서 나타나는 학생들의 추론 특성을 알아보는 것이다. 이를 위해, 다섯 명의 고등학생들을 연구참여자로 선정하여 이들에게 다양한 전략적 접근이 가능한 개방형 과제를 부과한 후, 그들의 문제해결 과정을 관찰하였다. 문제해결 과정을 그들이 작성한 답안지와 연계하여 분석함으로써 다음을 확인하였다.

첫째, 학생들은 과제를 접할 때 문제이해 없이 성급하게 계산을 시도하는 경향이 있다.

둘째, 학생들은 스스로 선택한 전략의 결과에 대해 수학적 근거를 고려하여 정당화하 기보다 정답을 구했는지에 대해 더 관심이 많다.

셋째, 문제해결에 필요한 두 가지 이상의 조건을 동시에 고려하지 못하는 경향이 있다.

넷째, 학생들은 과제와 관련된 선행지식을 활용하는데 능숙하지 못하다.

다섯째, 학생들은 지나친 일반화로 문제해결에 어려움을 겪을 수 있다.

주요용어: 문제해결, 추론, 고등학생들의 추론 특성

## Ⅰ. 서론

‘추론’은 사전적으로는 ‘어떤 판단을 근거로 다른 판단을 이끌어 내는 일련의 사고 과정’이라는 의미를 가지고 있다. 그렇다면 ‘수학적 추론’은 ‘수학적 상황에서 어떤 수학적 사실이나 판단을 근거로 다른 수학적 주장이나 판단을 이끌어 내는 일련의 수학적 사고 과정’이라고 규정할 수 있다. 여기서 ‘수학적’이라는 것은 기호, 명제, 법칙 등 수학에서 용인되는 여러 가지 요소들을 활용하여 표현하고 의사소통하는 것을 말한다.

최근 들어, 수학교육에서는 문제해결과 함께 수학적 추론이 강조되고 있다. 2011년에 고시한 우리나라 수학과 교육과정(교과부, 2011)에서도 수학적 추론 능력을 신장시키기 위한 교수·학습 방법으로 다음을 강조하였다.

첫째, 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고, 이를 정당화할 수 있게

1) 이 논문은 2011년 순천대학교 학술연구비 공모과제로 연구되었음.
2) 순천대학교 (yskang@sunchon.ac.kr)
3) 순천대학교 대학원 (mjkim@sunchon.ac.kr)

한다.

둘째, 수학적 사실이나 명제를 분석하고, 수학적 관계를 조직하고 종합하며, 학생 자신의 사고 과정을 반성하게 한다.

셋째, 수학적 추론을 통해 합리적으로 사고하는 능력을 키우고, 일상생활에서 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논지를 전개할 수 있게 한다.

NCTM(2000)도 10개의 규준 중 하나로 '추론과 증명' 규준을 설정하고 학교수학의 모든 프로그램들이 학생들로 하여금 이와 관련된 능력을 신장할 수 있도록 해야 한다는 것을 강조했다. 즉, 학생들은 '추론과 증명'을 수학의 가장 중요한 측면 중의 하나로 인식하고, 수학적 추론을 생성하고 조사할 수 있으며, 수학적 주장과 증명을 발전시키고 평가할 수 있고 다양한 추론 유형과 증명 방법을 선택하고 사용할 수 있어야 한다고 주장했다. 특히, 학생들은 그들의 주장이나 추측을 스스로 평가하거나 형식적인 수학적 논증과정에서 귀납적 혹은 연역적 추론을 사용하는 연습을 통해 그들의 추론 기술을 다듬고 확장시켜야 한다고 했다.

한편, 수학교육의 주요 목표는 어떻게 하면 학생들을 훌륭한 문제해결자가 되도록 할 것인가 하는 것이다. Hiebert(2003)는 문제해결 관련 개혁운동과 연구가 시작된 이후로 수 십년의 세월이 지났지만, 아직도 학생들은 여전히 기계적으로 사고한다고 지적했다. 기계적 학습과 관련된 제 측면을 분석하기 위한 분석틀을 제시한 연구들이 있는데, 대표적으로는 기계적 학습과 관계적 학습을 구분한 Skemp(1978), 대상에 대한 이해와 과정 사이의 상호작용 분석(Asiala et al, 1996; Tall, 2004), 이해의 수준을 구분한 연구(Pirie and Kieren, 1994) 등이 그것이다. 또한, 비정형적 문제 해결 능력과 같은 특정한 능력의 틀 구조에 대한 연구(Schoenfeld, 1985)도 있고 수학적 증명을 다루는 과정에서 학생들이 겪는 어려움을 다룬 연구(Hanna and Jahhke, 1996: Hoyles, 1997)도 있다. 증명이 수학적 추론의 핵심적인 유형이기는 하지만 추론 자체와 동일시 될 수 없으며 수학적 추론은 증명을 포함한 광의의 의미로 해석되어야 한다. Ball & Bass(2003)는 '수학적 추론은 단순한 기능 그 이상의 것이다'라고 했지만 명확한 개념 규정을 제시하지 않았으며, Yackel & Hanna(2003)는 '추론'이라는 용어가 '정확히 정의되지 않은 채로 그 의미가 일반적으로 합의된 것처럼 암암리에 가정하면서 수학교육자들에 의해 광범위하게 사용되고 있다'고 지적하였다. 이 논문에서는 수학적 추론을 '문제해결 과정에서 어떤 주장을 이끌어내거나 결론을 도출하기 위해 채택된 일련의 사고 과정'이라는 의미로 사용하고자 한다. 따라서 그것이 반드시 형식적 논리에 근거할 필요가 없으며 증명으로 제한되지도 않고 심지어는 추론자(연구참여자)에게 모종의 의미가 있다면 반드시 옳은 주장일 필요도 없다.

우리가 가르치는 학생들이 훌륭한 문제해결자가 되기를 바라는 수학교육자로서 우리는 학생들이 문제해결에 성공하고 실패하는 이유가 무엇인지에 대해 관심이 많다. 이에 대한 궁금증을 해소하기 위해 우리는 지속적으로 학생들의 문제해결 과정을 미시적으로 관찰해 왔다. 특히, 정형화되어 있는 또는 문제해결 방법이 정해져 있는 과제보다는 다양한 전략적 접근이 가능한 개방형 과제를 해결하는 과정에서 학생들은 어떤 어려움을 겪으며 또 어떤 추론 특성을 나타내는지를 관찰하고자 했다. 이 연구에서는 그러한 과정에서 학생들로부터 수

집한 자료를 분석하여 확인한 문제해결 과정에서 나타난 학생들의 추론 특성을 소개하려고 한다. 이를 위해, 우리는 다양한 접근이 가능한 개방형 과제를 제작하여 수학에 대한 흥미가 높고 학업성적이 우수한 자율형사립고 학생과 특목고 학생 등 모두 다섯 명의 고등학생들에게 제시하여 그들의 해결과정을 관찰함으로써 고등학생들의 추론 특성을 파악하고자 하였다.

## II. 문제해결과 수학적 추론

### 1. 수학적 문제해결

NCTM(1989)은 문제해결을 ‘즉시 적용할 수 있는 방법이 알려져 있지 않은 경우 적절한 수단을 통해 방법을 찾는 것이며, 어려움을 이기고 방법을 찾는 것이며, 장애를 극복하는 방법을 찾는 것이며, 쉽게 얻을 수 없는 원하는 목표에 도달하는 것’으로 규정하였다. 이는 문제란 ‘즉각적인 해법이 떠오르지 않아 어려움을 겪는 경우’라는 것을 전제로 하고 있다.

Polya(1957)는 학생 시절에 수학과 물리에 대하여 조금이라도 더 잘 이해하려고 책도 읽고 제시된 해답과 사실을 받아들이려고 노력해 보았지만 계속되는 의문은 “해답은 맞고 정확한 듯 보인다. 그러나 어떻게 해서 그러한 풀이를 고안할 수 있는 것일까? ... 나라면 어떻게 해야 그러한 것들을 스스로 발견하거나 발명할 수 있을 것인가?”였다. 자신에게 배우는 학생들이 그와 유사한 의문을 갖고 스스로 호기심을 충족시키기 위해 노력하고 있다고 생각하여 풀이에 대한 동기와 절차를 다른 사람들에게 설명해 줄 의도로 ‘How to solve it?(1957)’이라는 책을 쓰게 되었다고 한다. 이 책에서 그는 문제해결 과정을 문제의 이해, 계획 작성, 실행, 반성 등 네 단계로 나누고 각 단계에서 학생들에게 유용한 질문과 권고를 제시하고 있다.

한편, Schoenfeld(1985)는 문제해결의 성패와 관련된 지식과 행위 요인으로 Polya(1971)가 제시한 자원(resource), 발견술(heuristics) 외에도 통제력(control), 신념체계(belief system)와 같은 정의적 요인을 추가하였다. 이 내용을 정리하면 다음과 같다(강옥기 외, 2012, 재인용)

<표 0> 문제해결 관련 요인

| | |
|---|---|
| 자원<br>(resource) | 주어진 문제를 해결하는데 필요한 개인의 지식<br>· 해당 영역에 관련된 직관과 비형식적 지식<br>· 사실, 명제적 지식<br>· 알고리즘 절차, 기계적인 비알고리즘 절차 |

| | |
|---|---|
| 발견술<br>(heuristics) | 비표준적인 문제해결에서 진전을 이루기 위한 전략과 기술<br>· 어림 규칙 · 그림 그리기 · 관련 문제 활용<br>· 거꾸로 풀기 · 문제의 재형식화 · 시험과 검증 |
| 통제력<br>(control) | 자원과 전략의 선별과 채택에 관한 전체적인 결정<br>· 계획 ·모니터링과 평가<br>· 의사결정 · 의식적인 메타인지적 행위 |
| 신념체계<br>(belief system) | 개인의 수학관, 개인적 행위를 결정하는 요인<br>· 자신에 대한 신념 · 환경에 대한 신념<br>· 주제에 대한 신념 · 수학에 대한 신념 |

## 2. 수학적 추론 구조과 유형

### 1) 수학적 추론 구조

문제해결이란 다음 네 단계를 수행하는 것으로 설명될 수 있다(Lithner, 2008).

(1) 문제에 직면하는 것. 이것은 즉각적으로 해결방법이 떠오르지 않은 상태를 말하는 것으로 '문제 상황'이라고 표현될 수 있다.

(2) '전략 선택' 단계. 여기서 '전략'이라는 것은 부분적인 절차에서부터 일반적인 접근방법까지를 포함하는 의미하며, '선택'이라는 것은 선택, 회상, 구성, 발견, 추측 등을 모두 포함하는 넓은 의미로 사용된다.

(3) '전략 적용' 단계. 이는 왜 이 전략이 주어진 문제를 해결했다고 볼 수 있는가?와 같은 타당성을 입증(예측 논증)하는 단계이다.

(4) '결론'.

### 2) 수학적 추론 유형4)

#### (1) 모방적 추론

모방에 의한 추론은 교재에 수록된 문제해결 과정을 모방하는 것인데, 이런 주제를 연구한 많은 선행연구에서는 크게 두 가지 형태의 모방적 추론을 언급했는데, 그것은 바로 기억에 의한 추론과 알고리즘에 의한 추론이다.

4) 여기서는 Lithner(2000b, 2002, 2003, 2004, 2008)와 Bergqvist et al.(2007)가 언급한 추론 유형을 중심으로 살펴볼 것임.

**기억에 의존한 추론(Memorised reasoning, MR):** MR은 다음 조건을 만족할 때이다.

▷ 전략선택은 완벽한 답을 기억해냈을 때 전략선택이 확인된다.

▷ 전략적용 단계에서는 기억해 낸 문제해결 과정을 쓴다.

이 형태의 추론은 모든 문제 형태에서 부분적으로 나타날 수 있지만, 수학적 사실이나 수학적 정의를 묻는 문제 형태에 특히 유용하게 적용될 수 있는 추론이다. 대학 수준의 시험에서 '미적분학의 기본정리를 쓰고 증명하시오'와 같은 문제가 출제되었을 때 만점을 맞은 150명 학생들 중 50% 이상의 학생들이 두 페이지에 달하는 교과서 증명과 일치하는 답안을 작성하였다. 하지만 그들에게 이 과정의 일부를 설명하게 했을 때, 대부분의 학생들이 제대로 설명하지 못했다고 한다(Lithner, 2008).

**알고리즘[5] 추론(Algorithmic reasoning, AR):** AR은 다음 조건을 만족할 때이다.

▷ 전략선택은 문제해결 알고리즘을 기억해 내는 것이다. 예측 논증(전략 적용 단계)은 다른 형태로 나타날 수 있지만, 새로운 해법을 창안할 필요는 없다.

▷ 전략적용의 나머지 부분은 부주의로 인한 실수만 없다면 답을 얻을 수 있는, 추론하는 사람에게 명백한 부분만 남게 된다.

여기서 언급한 '알고리즘'은 나눗셈 알고리즘처럼 명시적으로 가르쳐질 수 있는 일련의 절차로서보다 더 넓은 의미로 사용된다. 이렇게 보는 관점은 개념적으로 어려운 부분은 알고리즘에 의해 처리되고 학습효과를 제한하는 쉬운 부분만 학생들 몫이 될 수 있기 때문이다. 예를 들어, 일곱 살 아동에게도 학습에 의해 간단한 다항식함수의 도함수를 구하게 할 수 있다. 물론, 이 아동들이 다항식함수의 도함수 개념을 이해할 수 없는 것은 명백하지만, 그들이 도함수 알고리즘을 활용하여 도함수를 구할 수 있다. 따라서, AR은 절차에 대한 완벽한 이해뿐만 아니라 부분적으로 이해한 상태에서도 수행될 수 있다.

AR에서의 어려움은 적절한 알고리즘을 확인할 수 있는가이다. Lithner(2000a)는 겉으로 드러난 표면적 성질만을 고려하여 수학적으로 안정적이지 못한 바탕에서 수행한 AR을 익숙한 AR(Familiar AR), 제한적 AR(Delimiting AR), 안내된 AR(Guided AR) 등으로 세분화하여 설명하였다.

### (2) 그럴듯한 추론 및 창의적 추론

몇몇 연구자들은 '수학적 추론'을 엄격한 증명과 동일한 개념으로 보는 반면(Duval 2002; Harel 2006), 다른 연구자들(NCTM 2000; Ball and Bass 2003)은 덜 엄격한 추론까지 포함

5) 여기서 알고리즘은 주어진 문제에 대한 확실한 결과를 얻을 수 있는 유한번의 실행 과정을 의미함 (Brousseau, 1997).

시켜야 한다고 주장한다. 학교수학에서 다루는 과제들은 수학자, 공학자, 경제학자 등이 다루는 것과 구별된다. 학교수학에서는 논리적 엄밀성이 상당히 결여된 추론을 사용하도록 허용하고 격려한다. 이미 언급한 것처럼, 이 연구에서는 좀 더 넓은 의미로 수학적 추론의 개념을 사용한다. Polya(1954)는 “엄격한 추론에서 중요한 것은 추측과 증명을 구분하는 것이다. [...] 그럴듯한 추론에서 중요한 것은 추측에서 또 다른 추측을 구분하고 덜 합리적인 추측에서 더 합리적인 추측을 구분해 내는 것이다.”라고 했다. 증명에서 추론의 가치는 정확성에 있지만, 그럴듯한 추론은 논리적으로 엄격할 필요가 없으며 그럴듯한 논증에 의해 구성되는 것을 필요로 한다.

추론 구조의 ‘전략 선택’과 ‘전략 적용’ 단계의 논증들에서 다음과 같은 특징이 나타나면 이러한 추론을 **‘그럴듯한(혹은 진짜) 추론**(Plausible reasoning, PR)’이라고 부른다 (Lithner, 2003).

▷ 추론에 포함된 요소들의 본질적인 수학적 특성들에 기반해서 논증을 전개한다.

▷ 이 추론에서의 논증은 사실을 향해가기는 하지만 반드시 옳거나 완벽할 필요는 없다.

예를 들어, 미적분학의 최대값 구하는 문제의 해결과정에서 다음과 같은 (형식적으로 완전하지 않은) PR을 생각해 볼 수 있다: “다항식 함수의 그래프를 언덕과 골짜기로 이해하면, 최대값은 언덕의 꼭대기에 존재한다. 기울기는 미분계수에 의해 구해질 수 있으니, 이런 문제는 $f'(x)=0$ 인 값을 조사함으로써 해결될 수 있다.” Lithner(2003)는 PR을 다음과 같이 세분화하였다.

**전반적 혹은 부분적인 그럴듯한 추론**(Global and Local Plausible Reasoning, GPR and LPR): 수학적 추론이 다음 조건 중 최소한 하나 이상 만족하면 GPR이라고 분류할 수 있다.

▷ 전략 선택이 문제에 포함된 구성요소의 본질적인 수학적 특성을 분석하여 이루어진다. 해법의 아이디어는 PR에 의해 구성되고 뒷받침된다.

▷ 전략을 적용하는 단계가 주로 PR에 의해 뒷받침된다.

만일, 사전에 이와 비슷한 문제를 경험하지 못했다면 다음과 같은 문제는 전반적인 그럴듯한 추론(GPR)을 필요로 한다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3 \text{ 일 때, } \lim_{x\to 2}f(x)\text{를 구하시오.}$$

이 문제의 조건을 이해하기 위해서는 극한의 정의를 활용하여 $x$가 2로 가까이 갈 때

$\frac{f(x)-5}{x-2}$는 3에 한없이 가까이 간다는 사실을 확인해야 한다. 이것은 $f(x)-5$가 $3(x-2)$에 가까이 간다는 것을 의미하여, 곧 $f(x)$가 $3(x-2)+5$ 에 가까이 가는 것을 의미한다. 그런데 $3(x-2)$는 0에 한없이 가까이 가므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=5$가 된다.

**국소적으로 그럴듯한 추론**(Local Plausible Reasoning, LPR): LPR이란 다음을 만족할 때이다.

▷ 전략 선택이 교재에 이미 나와 있는 예제, 정리, 법칙 혹은 다른 상황과 관련된 표면적 유사성을 확인함으로써 이루어진다. 하지만 다른 부분은 매우 국소적인 부분에 국한되며, 발견한 문제해결 절차가 모방적인지를 결정하는데 PR이 부분적으로만 사용된다.

▷ 전략을 적용하는 단계는 대부분 모방에 의한 것이지만 해결과정의 몇 부분은 생산적인 PR에 의해 수행된다.

수학적 추론 중에서는 PR이 수학적이고 비교적 안정적인 논증에 의해 뒷받침되는 전략 선택과 전략 적용이 진행된다는 측면에서 질이 높은 추론이라고 할 수 있다. 이런 형태의 추론은 비정형화된 문제를 잘 풀도록 하거나 정형화된 문제를 풀 때 잘못된 부분을 잘 찾을 수 있도록 해준다.

한편, 다음 조건을 모두 만족하면 **'창의적 수학적 추론**(Creative mathematically founded reasoning, CMR)'이라고 한다.

▷ 참신성. (추론자에게) 새로운 추론 과정이 만들어지거나 잊었던 것을 다시 만들어 내는 것.

▷ 그럴듯함. 전략선택과 전략 적용 단계가 왜 맞고 그럴듯한 것인지를 뒷받침할 논증이 존재하는지의 여부.

▷ 수학적 토대. 논증이 추론에 포함된 수학적 요소들의 본질적 특성과 잘 연결되어 있어야 한다.

문제해결의 입장에서 볼 때, CMR이라고 해서 반드시 어려운 문제인 것은 아니다. 대부분의 연구에서 CMR은 찾아보기 어려우며 AR이 대부분이다. Palm et al.(2005)는 공식적인 국가수준의 시험은 CMR을 요구하는 문제 비율이 높은 반면 교사들이 출제한 문제의 경우는 매우 드물다고 했다. 또한, Boesen et al.(2005)는 간단한 CMR을 요구하는 문제는 CMR이 광범위하고 성공적으로 사용되지만 어려운 CMR 문제의 경우는 거의 성공적이지 못하거나 제한된 AR이 대부분 사용되었음을 확인하였다.

# Ⅲ. 연구 방법

## 1. 연구방법

본 연구는 문제해결 과정에서 나타난 학생들의 추론 특성을 분석하는데 그 목적이 있으므로, 학생들의 문제해결 과정을 주의 깊게 관찰해야 한다. 따라서 소수의 학생들을 연구참여자로 선정하여 그들에게 다양한 전략적 접근이 가능한 개방형 과제를 부과하여 자기주도적으로 해결하도록 유도하고 그 과정에서 수집된 자료를 분석하여 결론을 도출하려고 한다. 이처럼 소수의 연구참여자들을 미시적으로 관찰하고 기록한 후에 그 결과를 분석하여 결론을 이끌어내기 위해서는 비디오, 오디오, 문서 자료 등을 수집하여 세밀하게 분석해야 한다. 이러한 연구 목적과 의도에는 질적연구의 한 형태인 사례연구 방법이 적합할 것으로 판단되는 바, 이 연구에서는 사례연구 방법에서 많이 활용하는 자료수집과 분석 방법을 활용하고자 한다.

## 2. 연구참여자

이 연구를 위해 모두 다섯 명의 고등학생들을 연구참여자로 선정하였다. 이들 중 네 명은 지방의 G시에 소재한 자립형 사립고 2학년 학생들이고 나머지 한 명은 J과학고 1학년 학생이다. 자립형 사립고 학생들은 연구자 중 한 명이 진행한 R&E 프로그램에 참여하여 수월성 교육을 받은 학생들로 해당 학교에서 학업성적이 매우 뛰어난 학생들이며 의대, 공대, 자연대 등으로 진학하기를 희망해 수학에 관심이 많다. 특목고에 다니는 학생도 중학교 재학 시절에 대학교부설 과학영재교육원에서 기초과정부터 사사과정까지 3년 정도의 영재교육을 이수하고 특목고에 진학한 학생으로 대학에서 수학을 전공하기를 희망한다. 또한, 그들의 부모들은 대개 4,50대로 그들의 학습 환경에 관심이 많은 것으로 조사되어 가정에서도 좋은 학습 환경을 갖고 있음을 알 수 있었다.

한편, 연구 목적과 연구에서 수집된 자료를 활용하여 논문을 작성하는 과정 등을 이 학생들에게 설명한 후에 참여 여부를 물었다. 그 결과, 학생들 모두 이에 동의하였다. 이하의 내용에서 다섯 명의 연구참여자들은 각각 ‘A학생’, ‘B학생’, ‘C학생’, ‘D학생’, ‘E학생’ 등과 같은 가명을 사용하기로 한다.

## 3. 과제

본 연구의 목적은 문제해결 과정에서 나타난 학생들의 추론 특성을 알아보는 것이므로 학

생들에게 부과할 과제를 제작하는데 다음과 같은 기준을 마련하였다.

첫째, 문제를 해결하는데 충분한 정형화된 알고리즘이 존재하지 않을 것.

둘째, 다양한 해결 경로를 찾을 수 있는 과제.

셋째, 직접 계산이 가능하지만 전략적 접근으로 더 쉽게 해결할 수 있는 과제.

넷째, 학생들의 추론이 수학적 성질에 근거를 두고 있는지를 쉽게 확인할 수 있는 과제.

이러한 기준에 의해 '식의 값이 최소 혹은 최대가 되는 분수의 가감식'이라는 과제를 자체 제작하였다. 과제에 포함된 문제와 그 문제를 해결하는데 활용 가능한 전략[6]을 정리하면 다음과 같다.

<표 1> 과제와 문제해결 전략

<table>
<tr><th colspan="2">문 제</th><th>가능한 전략</th></tr>
<tr><td colspan="3">※ 5, 6, 7, 8 네 개의 수를 한 번씩만 사용하여 주어진 조건에 맞는 식을 만들어 보세요.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$</td><td>1. 결과가 가장 작은 양수가 되는 식<br><br>예상 답: $\frac{5}{7}+\frac{6}{8}$</td><td rowspan="2">A1(S1)[7]: 분모에 큰 수(작은 수), 분자에 작은 수(큰 수)를 넣어 식을 만든다.<br><br>A1(S2)[8]: $n_1/d_1$는 $1/d_1$이 $n_1$개 더해져 있는 것이며 $n_1/d_1+n_2/d_2$ 의 두 분모 $d_1, d_2$ 중에서 만일 $d_2$가 더 큰 수(작은 수)라면 $n_1$보다 $n_2$를 더 크게(작게) 해야 식의 결과가 작게(크게) 된다.<br><br>A1(S3): 통분했을 때 분모는 크고(작고), 분자는 작게(크게) 되는 식을 만든다.</td></tr>
<tr><td>2. 결과가 가장 큰 양수가 되는 식<br><br>예상 답: $\frac{8}{5}+\frac{7}{6}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}$</td><td>3. 결과가 가장 작은 양수가 되는 식<br><br>예상 답: $\frac{6}{8}-\frac{5}{7}$</td><td rowspan="2">S1(S1)[9]: 통분했을 때, 분모는 크고(작고) 분자는 작게 (크게)되는 식을 만든다.<br><br>S1(S2): $n_1/d_1-n_2/d_2$ 일 때, $n_1d_2-n_2d_1$이 가장 작은(큰) 양수가 되도록 $n_1, n_2$를 결정한다.<br><br>S1(S3): 네 수로 만들 수 있는 가장 큰 분수를 만들고 나머지 수로 만들 수 있는 가장 작은 분수를 만들어 뺄셈식을 만든다.</td></tr>
<tr><td>4. 결과가 가장 큰 양수가 되는 식<br><br>예상 답: $\frac{8}{5}-\frac{6}{7}$</td></tr>
</table>

6) 모든 경우의 수를 고려하여 비교하는 경우는 추론에 바탕을 둔 것이라고 보기 어려워 제외함.

7) A1(S1)은 한 자리 덧셈식(Addition 1)에서 첫 번째 전략(Strategy 1)을 의미함.

<table>
<tr><td colspan="3">※ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8을 한 번씩만 사용하여 네 개의 두 자리 정수를 만들어 주어진 조건에 맞는 식을 만들어 보세요.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$</td><td>5. 결과가 가장 작은 양수가 되는 식<br>예상 답: $\frac{24}{86}+\frac{13}{75}$</td><td rowspan="2">A2(S1): 크기순으로 나열할 때 $d_1,d_2,d_3,d_4$ 인 네 자연수로 만들 수 있는 가장 큰(가장 작은) 두 개의 두 자리 자연수는 $d_1d_3$ 와 $d_2d_4$($d_3d_1$와 $d_4d_2$)이다.</td></tr>
<tr><td>6. 결과가 가장 큰 양수가 되는 식<br>예상 답: $\frac{86}{13}+\frac{75}{24}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}$</td><td>7. 결과가 가장 작은 양수가 되는 식<br>예상 답: $\frac{61}{82}-\frac{54}{73}$</td><td rowspan="2">S2(S1): $n_1/d_1-n_2/d_2$ 을 통분할 때, 분자가 되는 $n_1d_2-n_2d_1$이 가장 작은(큰) 양수가 되도록 네 수를 배치한다.<br><br>S2(S2): S2(S1)에서 $n_1d_2-n_2d_1$의 크기가 가장 작은(큰) 경우를 찾기 위해서는 십의 자리에 5,6,7,8 (또는 8,7,1,2)을 배치하여 (6*)(7*)-(8*)(5*) (또는 (8*)(7*)-(1*)(2*))이 가장 작게(크게) 되도록 1,2,3,4 (또는 5,6,3,4)를 일의 자리에 배치하여 6*/8* - 5*/7* (또는 8*/1* - 2*/7*)와 같은 식을 완성한다.</td></tr>
<tr><td>8. 결과가 가장 큰 양수가 되는 식<br>예상 답: $\frac{86}{13}-\frac{24}{75}$</td></tr>
</table>

## 4. 자료 수집 방법

이 연구에서는 연구참여자들에게 준비된 과제를 부과하여 해결하도록 요구한 후에 추론의 근거를 확인하거나 힌트를 주기 위한 목적으로만 연구자가 개입했을 뿐 전체적으로는 연구참여자들이 자기주도적으로 문제를 해결하게 했다. 연구참여자들은 한 명 또는 두 명씩 시간을 정해 과제에 포함된 8개의 하위문제를 한 번에 해결하도록 했는데, 팀 별로 5분 정도의 휴식시간을 포함해 1시간 30분에서 2시간 정도가 소요되었다.

8) A1(S3)은 문제해결 시작단계의 전략이고, 이 전략은 그 다음 단계의 전략이므로 구분할 필요가 있음.

9) A1(S3)와 S1(S1)는 겉으로는 같지만 분자의 크기를 결정할 때 다른 접근이 필요해서 구분함.

그들의 문제해결 과정을 기록하기 위해 비디오, 오디오 기법 등이 활용되었으며, 이 과정에서 수집된 자료들은 그들이 작성한 답안지와 비교하면서 반복해서 분석되었으며 주요 부분을 녹취록으로 작성하여 연구참여자들의 추론 특성을 분석하는데 활용하였다.

# Ⅳ. 결과 분석

이 연구에 참여한 다섯 명의 연구참여자들이 주어진 과제를 해결하는 과정을 비디오, 오디오 기법을 활용하여 기록한 후에 그들이 작성한 답안지와 연계하여 분석하였다. 우리는 학생들이 정답을 찾아내는지의 여부에 초점을 두지 않고 문제를 해결하는 과정에서 그들이 어떤 방식으로 추론하고 어떤 어려움을 겪는지, 또 그러한 어려움의 원인이 무엇인지를 확인하는데 관심을 집중하였다. 각 연구참여자 관련 자료를 독립적으로 분석한 후에 그 결과를 종합하여 비교,분석하는 방식으로 정리한 결과는 다음과 같다.

## 1. 한 자리 분수 덧셈(1~2번) 답안 분석

최소값의 덧셈 분수식에 대해서는 ‘E학생’을 제외한 연구참여자 모두 A1(S1)전략을 활용하여 두 개의 식 $5/7+6/8, 5/8+6/7$을 추정하였고, 두 식을 통분하고 결과 값을 비교하여 결론을 이끌어 내었다. 하지만 ‘A학생’은 첫 번째 전략을 선택하여 결론을 도출한 이후, ‘문제3’을 풀이하다가 다시 ‘문제1’로 돌아와 $n_1/d_1+n_2/d_2$일 때 $n_1d_2+n_2d_1$이 가장 작은 양수가 되도록 $n_1, n_2$를 결정하기 위해 분모는 가능한 크게 하되 분자를 작게 만들 수 있는 경우들을 다음과 같이 나열한 후 (5×6+7×8=86, 5×7+6×8=83, 5×8+6×7=82) 계산된 값을 비교해서 식을 결정하였다. 이는 A1(S3)과 비슷한 전략으로 구한 값의 타당성을 높여 학생 스스로 풀이를 설명하는데 자신감을 갖게 한 계기가 되었다. 또한 ‘문제5’를 풀이한 후, ‘문제1’로 돌아와 처음 추정했던 $5/7+6/8, 5/8+6/7$ 식을 직접 통분하여 계산하지 않고서도[10] 두 식의 크기 비교가 가능함을 발견하고 A1(S2)전략을 사용하여 $5/7+6/8$이 가장 작은 양수가 됨을 설명하였다. 이처럼 ‘A학생’은 다른 문제를 풀이하는 과정에서 자신이 이전에 인지하지 못했던 전략들을 ‘문제1’에 활용하면서 수학적 성질에 근거한 좀 더 명확한 추론을 할 수 있게 되었다.

한편, ‘E학생’은 다른 학생들과 마찬가지로 A1(S1)을 부분적으로 활용하였지만 문제를

10) 두 분수를 각 단위(1/7,1/8)의 합으로 이해하여 단위가 작은 쪽의 분자를 크게해서 식의 값을 작게함.

받자마자 $b/a+d/c$ 이라는 식을 쓰고 '결과가 작기 위해서는 각각의 분모가 분자보다 커야 한다$(a>b,\ c>d)$'고 썼다. 그런 다음, '$c>a$라고 해도 일반성을 잃지 않으므로 $a,b,c,d$ 중 $c$가 가장 크다고 가정해도 된다'고 하면서 $(c,d)=(8,7),(8,6),(8,5)$라 놓고 각각의 경우에 나올 수 있는 세 식 $7/8+5/6$, $6/8+5/7$, $5/8+6/7$ 의 값을 직접 계산하여 비교함으로써 $6/8+5/7$의 경우가 가장 작은 값을 갖는 식이 된다고 결론내렸다.

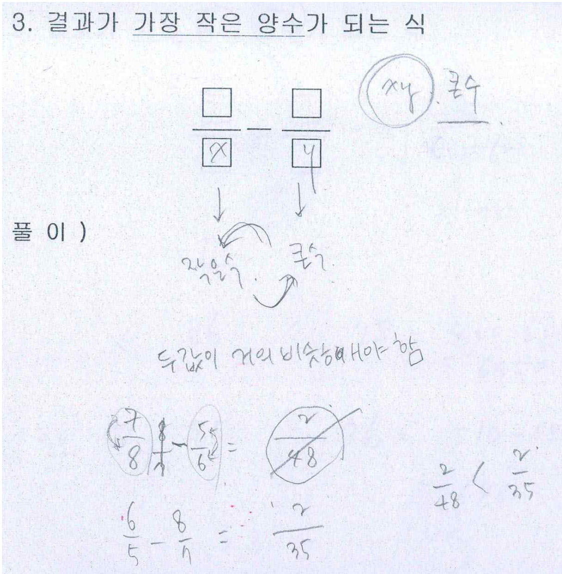
최대값 덧셈 분수식에 대해서도 A, B, C, D 네 학생은 A1(S1)전략을 활용하여 두 개의 식 $7/5+8/6, 8/5+7/6$을 추정한 후 직접 계산하여 비교하는 방식으로 결론을 도출하였다. 이 과정에서 'C학생'은 잠깐 동안 반비례함수 그래프를 그려서 관련성을 탐색했으나 이내 직접 계산에 의한 결과 비교 방식을 고수하였다.

특히, E학생의 경우 기본적으로 A1(S1)전략을 사용하였지만, '문제1'과 마찬가지로 $b/a+d/c(a<b,c<d)$ 라고 쓰고 '$a<c$라고 해도 일반성을 잃지 않으므로 $a,b,c,d$ 중 $a$가 가장 작다고 가정해도 된다'고 하면서 $(a,b)=(5,6),(5,7),(5,8)$이라고 놓았다. 그런 다음, '통분을 해서 살펴보았을 때 분자가 최대가 되고 분모가 최소가 되면 되므로 c=6 이라고 유추할 수 있다'고 썼다. 이로부터 $b/5+d/6=$ , $7/5+8/6=7(1/5+1/6)+1/6$ , $8/5+7/6=7(1/5+1/6)+1/5$와 같이 계산하여 $8/5+7/6$이 가장 큰 식이라는 결과를 이끌어내었다.

## 2. 한 자리 분수 뺄셈(3~4번) 답안 분석

최소값의 뺄셈 분수식에 대해서 'A학생'은 S1(S2) 전략을 활용하여 나열된 수를 두 개씩 묶어 (30,56),(35,48),(40,42)와 같이 표현한 후에 $n_1d_2-n_2d_1$가 가장 작은 값을 직접 계산하여 확인하였다. 이렇게 얻어진 값을 바탕으로 S1(S1)전략에 따라 가장 큰 두 수 7, 8을 분모로 한 $6/8-5/7=1/28$이 가장 작은 양수가 되는 식이라고 했다. 이 학생은 두 전략을 적절하게 사용하여 문제를 해결했지만, 분수식의 값을 비교하는 과정에서는 무조건 통분하여 직접 계산하는 방법을 고수하였다. 'B학생'은 처음에는 $7/5-8/6$과 $6/5-8/7$의 값을 비교하다가 $7/8-5/6$의 값이 더 작다는 것을 확인한 다음에는 $6/8-5/7$과 $6/7-5/8$의 값을 직접 계산하여 비교함으로써 $6/8-5/7$의 값이 최소가 된다는 것을 확인하였다.

한편, 'C학생'은 뺄셈의 결과가 가장 작기 위해서는 '두 값이 거의 비슷해야 함'이라고 추측함으로서 S1(S1) 전략을 생각할 가능성이 줄어들었다. 그래서 이 전략의 일부인 '두 분모의 곱이 큰 수'를 생각해냈음에도 더 이상 진전시키지 못하고 여러 식의 값을 계산하여 비교함으로써 모든 경우의 수를 검토하는 방식을 선택하였다[그림1].




[그림 1] ‘C학생’의 ‘문제3’ 풀이 과정

‘D학생’은 구체적인 수학적 근거를 생각해 보기보다는 5,6,7,8로 만들 수 있는 식들을 $7/8-5/6$ , $6/5-8/7$, $7/5-8/6$과 같이 나열하여 직접 계산을 통해 그 크기를 비교하였다. 때문에 풀이 과정에서도 다른 식이 떠오르면 계산해 보고 더 작은 값이 나오면 다시 수정해 나가는 과정만을 되풀이 하였다. 또한 답을 수정해 나가는 과정에서도 다른 전략을 찾기 보다는

$$\frac{7}{5}-\frac{8}{6}=\frac{42-40}{30}=\frac{2}{30}\ \rightarrow\ \frac{7}{5}-\frac{8}{6}=1+\frac{2}{5}-\left(1+\frac{2}{6}\right)=\frac{2}{5}-\frac{2}{6}=\frac{2}{30}$$

와 같이 계산 방법만을 바꿔나갔다.

‘E학생’은 $b/a-d/c=(bc-ad)/ac$라고 썼다가 지운 다음에 $|b/a-d/c|=|bc-ad|/ac$라고 썼다. 그런 다음에는 앞 문제에서와 같이, ‘앞에서 논리를 전개한 방식으로 $ac$가 최대가 되어야 한다. $(a,b)$나 $(c,d)$의 순서가 바뀌어도 되므로 $a>c$라고 할 수 있다. 따라서 $(a,c)=(8,7)$이다’라고 썼다. 이로부터 다음과 같은 계산을 하여 $6/8-5/7$가 가장 작은 값을 갖는다고 결론내렸다.

$$\left|\frac{b}{8}-\frac{d}{7}\right|=$$

$$\frac{6}{8}-\frac{5}{7}=\frac{1}{8}+5\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)\qquad \frac{5}{8}-\frac{6}{7}=5\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$$

$$\frac{5}{7}-\frac{6}{8}=5\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}\qquad \frac{6}{7}-\frac{5}{8}=5\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{7}$$

최대값의 뺄셈 분수식에 대해, 'A학생'은 S1(S1)과 S1(S2) 전략을 적절하게 사용해서 통분 했을 때 분자가 크게 나온 경우를 먼저 결정하고 나열된 수 중 가장 작은 두 수를 분모로 선택하여 $8/5-7/6=13/30$이 가장 큰 값을 가진다고 결론내렸다. 하지만 나름대로의 수학적 근거를 제시하고도 답에 대한 확신을 갖지 못했으며, 나올 수 있는 다른 경우들을 직접 통분하고 계산기를 이용해 식의 값을 찾아보기도 했다.

다른 문제에서와 마찬가지로 'B학생'은 처음에는 $8/5-7/6$의 값을 계산했으나 $8/5-6/7$의 값이 더 작게 된다는 것을 확인하고는 $7/5-6/8$의 값을 직접 계산하여 그 결과를 비교하였다. 하지만, $7/5-6/8$의 경우는 $8/5-6/7$를 계산할 때와 분자가 같기 때문에 통분한 분모를 비교하여 대소비교가 가능하다. 그런데도 이 학생은 직접 계산하여 그 값을 비교하였다.

이에 반해, 'C학생'과 'D학생'은 최소의 뺄셈 분수식을 위해서는 '두 값이 거의 비슷해야 함'이라고 생각한 '문제3'의 경우와 마찬가지로 최대의 뺄셈 분수식을 만들려면 '차이가 가장 많이 나는' 식을 만들어야 한다고 생각했다. 하지만 'C학생'의 경우 네 수(5,6,7,8)로 만들 수 있는 큰 분수인 $8/5$과 $7/5$을 먼저 생각하고 나머지 수로 가장 작은 분수를 만들려고 시도하였다. 그런 다음, 세 식($8/5-6/7, 7/5-6/8, 8/5-7/6$)을 직접 계산하여 그 결과를 비교한 반면, 'D학생'은 $8/5-6/7=26/35>8/6-5/7=26/42>8/7-5/6=13/42$과 같이 몇 개의 식을 통분하여 그 크기를 비교하였다. 그 과정에서 S1(S1)전략을 일부 활용했지만 실제로 제한된 몇 가지 경우에 대해서만 대상들을 비교했기 때문에 결과에 대한 확신을 갖지 못했다.

한편, 'E학생'은 $|b/a-d/c|=|bc-ad|/ac$라고 쓰고 '$ac$가 최소가 되고 $|bc-ad|$가 최대가 되어야 한다. $(a,d),(c,d)$의 순서가 바뀌어도 상관 없으므로 $a<c$라 할 수 있다. 따라서 $(a,c)=(5,6)$이다'라고 놓고 $|b/5-d/6|=|6b-5d|/30$라 썼다. 하지만, 여기서 더 이상 진전시키지 못하고 시간을 보내다가 $(6\times8-5\times7)-(6\times7-5\times8)=6+5=11>0$ 이라고 계산하고는 $8/5-7/6$이 최대가 된다고 결론지었다. 이 때, 연구자가 '왜 분모가 반드시 5,6이 되어야 한다고 생각하는지', '통분했을 때 결과가 어떻게 되는지' 등을 질문하자 다 지우고 '$|bc-ad|$가 최대가 되어야 하므로 $bc=8\times7$, $ad=6\times5$여야 한다. 분모는 최소가 되어야 하므로 $a=5, c=7$이고 $8/5-6/7$일 때 최대가 된다'고 결론지었다.

## 3. 두 자리 분수 덧셈(5~6번) 답안 분석

최소 덧셈 분수식에 대해, 'A학생'은 A1(S1)전략에 따라 분모는 (86, 75)와 (85, 76), 분자는 (13, 24)와 (14, 23)로 가정 한 후 A1(S3)전략을 활용해 통분 했을 때 가장 작은 분자를 갖는 경우를 계산기를 이용해 확인하여 $24/86+13/75$일 때 가장 작은 양수가 된다고 결론내렸다.

'B학생'도 먼저 A1(S1) 전략을 활용하여 분모의 쌍으로 (87, 65)를 먼저 정하여 (13, 24),

(14, 23), (23, 14)등을 분자의 조합으로 생각하다가 (85, 76)이 분모의 조합으로 더 적합하다고 생각하고 분자의 쌍으로 (23, 14), (24, 13) 등의 조합을 생각하였다. 그런 다음, 산술평균과 기하평균의 관계를 활용하기 위해 $23/85+14/76 \geq 2\sqrt{\bigcirc\bigcirc}$ 과 같은 식을 생각했으나 더 이상 발전시키지 못하고 다시 (86,75)와 (85,76) 중에서 어느 것이 분모의 조합으로 적합한지를 조사하였다. 다만, 이 때에는 앞에서와 달리 직접 계산해서 비교하지 않고 $1/85 \rightarrow 1/86$ 와 $1/76 \rightarrow 1/75$ 인 경우에 어떤 변화가 생기는지를 확인하여 $24/86+13/75$ 이 결과가 가장 작은 식이 된다고 결론지었다.

'C학생'은 두 수의 합이 최소가 되는 식을 만들어야 한다는 점에 착안하여 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하고자 했으나 더 이상 진행시키지 못하고, A1(S1) 전략을 활용하여 분모는 (86, 75)와 (85, 76)의 두 가지 경우를 가정하고 각각의 곱을 계산하여 전자의 곱이 더 크다는 것을 확인하였다. 그런 다음, 통분했을 때 분자가 가장 작아야 한다는 점에 착안하여 A1(S3)전략에 따라 '$76\times\_\_+85\times\_\_=$ 가장 작은 수'가 될 수 있는 두 분자를 결정하였다. 여기서 이 학생은 $86\times75=(85+1)\times75$ 이고 $85\times76=85\times(75+1)$ 이 되는 것을 쉽게 확인할 수 있어서 직접 계산할 필요 없이 크기 비교가 가능한데도 직접 계산하여 그 결과를 비교하였다. 그리고 '$76\times\_\_+85\times\_\_=$ 가장 작은 수'가 될 수 있는 두 분자를 결정하기 위해 직접 계산했는데 이는 A1(S2) 전략을 활용하면 두 분자가 $(24,13)$ 과 $(23,14)$ 의 조합 중에서 어느 것이 되는지를 알 수 있다.

'D학생'은 A1(S1) 전략을 활용하여 $2\_/8\_+1\_/7\_$ , $2\_/8\_+1\_/6\_$ 와 같이 각 자리 10의 자리수를 먼저 결정한 후 나머지 숫자를 일의 자리에 대입하여 나열한 식의 값을 계산기를 이용해 구한 다음, 그 크기를 비교하였다. 하지만 이 학생은 구체적인 근거 없이 큰 맥락에서 세운 전략에 의존하여 본인이 구한 식에 대한 확신을 갖지 못했다. 이를 위해 좀 더 수학적 근거를 갖고 구체화 및 정교화 과정이 필요하지만 학생은 $23/87+14/65=0.4797 > 24/87+13/65=0.4758 > 24/86+13/75=0.4524$ 과 같은 계산을 통해 최소 분수식을 결정하였다.

최대 덧셈 분수식에 대해, A,B,C,D학생은 A1(S3)전략을 활용했지만, 결론을 이끌어내는 방법에서는 차이를 보였다.

'A학생'은 십의자리 숫자를 먼저 선택하고 나머지 숫자를 일의자리에 배치한 후 통분했을 때 분자가 크게 되는 경우를 찾아, $86\times24+75\times13=3039$ 가 가장 적합하다고 생각했다. 하지만 이 방법 또한 구체적인 수학적 근거를 갖고 있지 않기 때문에 학생 스스로 답을 신뢰하지 못했다. 이후로도 이 학생은 구한 답이 정답인지에 대해서만 궁금해 했으며, 구체적인 수학적 근거를 생각해 보기보다는 친구가 구한 결과와 비교해보면서 자신의 답을 정당화하였다. 'B학생'의 경우는, 처음부터 A1(S3) 전략을 활용하였지만, (13,24)로 분모를 정해놓고 분자의 조합으로 (85,76)과 (86,75) 중에서 어느 것이 적합한지를 조사하였다. 그런 다음, 분모로 (14,23)이 더 적당하다고 판단하였지만 확신을 갖지는 못했다. 그래서 다음과 같은 계산을 하여 결과를 도출하였다.

$$\frac{1}{13} \to \frac{1}{14} \qquad \frac{86}{13\times 14} \qquad > \qquad \frac{1}{24} \to \frac{1}{23} \qquad \frac{75}{23\times 24}$$

이는 $(86/14+75/23)-(86/13+75/24)=-86/(13\times 14)+75/(23\times 24)$이므로 작아지고 커지는 값을 비교하여 $86/14+75/23 \to 86/13+75/24$일 때, 줄어드는 값이 더 크다는 것을 계산한 결과이다.

‘C학생’은 처음부터 A1(S3) 전략을 활용하여 $(24, 13)$과 $(23, 14)$의 조합 중 어느 경우가 분모로 적합한지를 결정하기 위해 직접 곱셈을 하여 $(24, 13)$의 경우를 선택하였다. 그런 다음, 13×7*+24×8*와 같은 식을 생각하였다. 빈 칸에 5와 6을 어떻게 배치할지를 결정하기 위해 13×76+24×85 와 13×75+24×86을 비교했는데 다른 문제에서와 달리 직접 계산하지 않고 두 번째 식에서 첫 번째 식으로 바뀌면 ‘+13-24’의 효과가 생기는 것을 확인하여 두 번째 식의 값이 더 크다고 판단하였다. 그러면 원하는 식이 $86/13+75/24$가 되는데도 여기서 결론을 내지 않고 다시 $8_/1_+7_/2_$와 같은 식을 생각한 다음 빈 칸에 3,4,5,6을 배치한 네 가지 경우 모두를 직접 계산하여 비교함으로써 $86/13+75/24$의 값이 가장 크다는 것을 확인하였다. 여기서도 이 학생이 A1(S2)전략을 활용했다면 네 가지 식의 경우를 직접 계산할 필요가 없게 된다.

‘D학생’은 ‘문제5’에서와 같은 전략으로 분모 10의 자리에 1,2를, 분자 10의 자리에 8, 7을 대입하고 나머지 숫자를 일의 자리에 대입하였다. 따라서 분모는 (13, 24)과 (14, 23), 분자는 (86, 75)과 (87, 65)가 가능하다고 판단하여 이로부터 만들 수 있는 네 가지 식을 직접 계산하여 비교함으로써 결론을 도출하였다.

한편, ‘E학생’의 경우는 다른 학생들과 달리 모든 문제를 일반적인 형태로 바꾸어 증명이 포함된 문제해결을 시도하였다. 다른 학생들과 다른 이러한 ‘E학생’의 추론 특성을 좀 더 자세히 소개하기 위해 그의 문제해결 과정(5~6번 문제 공통)에서 주요한 단계를 그대로 묘사하면 다음과 같다.

| ‘E학생’의 답안 설명 | 추론 구조[11] |
|---|---|
| 문제를 받자마자 ‘$b/a+d/c$ 라 놓으면 $b<a, d<c$여야 한다(00:40-경과시간)’고 가정했다. 이전의 문제와 마찬가지로 ‘일반성을 잃지 않고 $a>c$라 하자. 그러면 a,b,c,d 중 a가 최대가 된다(01:10)’고 썼다. 이런 접근 방법은 문제가 구체적으로 주어졌음에도 일반적으로 해결하고자 하는 그의 추론 특성을 잘 드러내준다. 그런 다음, ‘분모인 $ac$가 최대가 되면서 | PS: 1~8로 최소값을 갖는 두 자리 자연수 분수 덧셈식을 만들어라.<br>SC1: $b<a, d<c$ (A1(S1)) 전략을 선택.<br>SC2: $a>c$라고 가정하면 $a, b, c, d$, 중 $a$가 최대가 |

| | |
|---|---|
| $bc+ad$는 최소가 되어야 한다. 따라서 $a,c$는 최대가 되면서 $b,d$는 최소가 되어야 한다(02:07)'고 썼다.<br>그는 이로부터 '$a$와 $c$의 구성요소는 8,7,6,5이고 $b$와 $d$의 구성요소는 4,3,2,1이 되어야 하므로 $(a,c)=(86,75),(85,76)$ 이고 $(b,d)=(14,23),(13,24)$ 이다(04:04).'라고 한 후에 '$(a,c)$는 고정하고 $(b,d)$를 결정하자'고 쓰고는 다음과 같이 계산하였다.<br>'$14c+23a<13c+24a(\because a>c)$이므로 $(b,d)=(14,23)$이다(05:40).<br>$86b+75d<85b+76d(\because b<d)$ 이므로 $(a,c)=(86,75)$이고 $14/86+23/75$일 때, 최소가 된다(07:00)'고 결론내렸다. | 된다.<br>SC3: $ac$가 최대, $bc+ad$는 최소가 되어야 한다 (A1(S3)).<br>SC4: $(a,c)=(86,75),(85,76)$ 이고 $(b,d)=(14,23),(13,24)$ 이다. [하지만, 이것은 $b<d$ 라는 임의적 가정을 전제로 한 것임].<br>SC5: $(a,c)$는 고정하고 $(b,d)$를 결정하자. [이 전략에는 $b<d$라고 가정할 수 있다는 설명이 필요함]. |
| 연구자: 분자(14와 23)가 바뀐 경우는 어떻게 되지?<br>E학생: $(a,c)$의 경우가 두 가지가 있으므로 이것을 고정하고 조건에 맞는 $(b,d)$를 찾으면 $(14,23)$의 경우가 해당되요. | [연구자는 $b<d$를 가정해도 되는 이유를 묻고 있으나 'E학생'은 자기 해법에 근거해서 답변하려고 함]. |

[표 3] 'E학생'의 5~6번 문제해결 과정 설명

## 4. 두 자리 분수 뺄셈(7~8번) 답안 분석

'B학생'은 이 문제에 대해 전략적으로 접근하지 않았다. 다만, 분모는 <u>7*</u>, <u>8*</u> 이고 분자는 <u>5*</u>, <u>6*</u> 가 될 것이라고 추정하고 각각의 경우를 직접 비교하는 방식으로 최소 분수식을 찾기 위해 노력하였다. 이 학생이 고려한 식들을 순서대로 나열하면 다음과 같다.

$$\frac{64}{81}-\frac{53}{72},\ \frac{64}{72}-\frac{53}{81},\ \frac{63}{72}-\frac{54}{81},\ \frac{63}{75}-\frac{51}{86},\ \frac{63}{81}-\frac{54}{72},\ \frac{41}{86}-\frac{32}{75},\ \frac{62}{81}-\frac{54}{73},\ \frac{62}{81}-\frac{53}{74}$$

그런 다음, 통분했을 때 분자인 (<u>6*</u>)(<u>7*</u>)-(<u>8*</u>)(<u>5*</u>)가 가장 작게 되려면 1,2,3,4를 일의 자리

11) Lithner(2003)는 다음과 같은 분석틀을 활용하여 대학생들의 문제해결 과정을 분석하였다.
추론 구조: 문제상황(PS), 전략 선택(SC), 전략 적용(SI), 결론(C)
추론 특성: 그럴듯한 추론(PR), 전반적 PR(GPR)과 부분적 PR(LPR), 유사성 확인(IS)
구성 요소: 대상(O), 변환(T), 절차(P), 개념(C)
구성요소의 성질이 수학적인가? 아닌가? 혹은 본질적인가? 표면적인가?

에 어떻게 배치할 것인지를 고민하여 61/82 − 54/73가 가장 작은 값을 갖는 식이 된다고 결론내렸다. '문제8'에 대해서도 처음에는 특별한 전략 없이, 86/13 − 75/42나 86/14 − 75/32를 비교하더니 다시 86/12 − 57/43와 87/12 − 56/43의 경우를 검토하였다. 하지만, 만족스러운 결과가 나오지 않자 S1(S3)전략으로 바꿔 1~8까지의 자연수로 만들 수 있는 가장 큰 수(87)와 가장 작은 수(12)로 피감수(87/12)를 만들고 감수로 56/43, 43/56, 34/65, 36/54 등을 생각하여 비교함으로써 87/12 − 34/65가 최대 분수식이 된다고 판단하였다. 하지만, 연구자가 통분했을 때 분자가 가장 크게 되도록 하려면 어떻게 해야 하는지(S2(S1)전략)를 생각해보라는 힌트를 주자 86/13 − 24/75을 생각해냈다.

'C학생'은 최소 뺄셈 분수식에 대해, 처음에는 '가장 비슷한 두 분수'를 찾으면 된다고 생각하고 36/72가 0.5이므로 나머지 수로 최대한 0.5에 가까운 수를 만들면 된다고 생각했다. 그래서 41/85 = 0.482..와 45/81 = 0.555..의 크기를 비교한 후에 36/72 − 41/85와 같은 식을 만들었다. 여기서 연구자가 '이 식의 값이 가장 작다는 것을 어떻게 보장하느냐'고 질문하자, 6_/8_ − 5_/7_과 같은 식이 통분했을 때 분자의 크기가 가장 작게 된다고 판단하고 1,2,3,4를 빈 자리에 배치한 네 경우의 식의 값을 직접 계산, 비교하여 61/82 − 54/73인 경우가 가장 작은 값을 갖게 된다고 결론지었다. 최대 뺄셈 분수식에 대해서는 '가장 큰 값을 갖는 분수를 먼저 생각하고 나머지 숫자로 가장 작은 값을 갖는 분수를 만들어 빼주면 된다'(S1(S3))고 생각하고 8_/1_ − 2_/7_ 와 같은 식을 생각하였다. 그런 다음, 3,4,5,6을 어디에 배치하면 그 값이 가장 크게 되는지를 생각하여 86/13 − 24/75 와 같은 식을 완성하였다.

한편, 최소 · 최대 뺄셈 분수식에 대해 'E학생'의 경우는 비록 성공하지는 못했지만 다른 학생들과 달리 다양한 방법을 시도하였다. 또한, 그의 답안은 과도한 일반화 시도가 문제해결에 어떤 영향을 미치는지를 보여줄 수 있어서 그의 사고과정을 자세히 분석할 필요가 있다고 판단된다. 다음은 'E학생'이 이 문제들의 해결과정에서 시도한 방법과 연구자의 개입으로 문제를 해결한 장면이다.

[$|c/a-d/b| = |bc-ad|/ab$을 써놓고,] ~~일단, 일반성을 잃지 않고 $a<b$라고 할 수 있다~~(썼다가 지운 내용)(02:00) ~~$bc>ad$라고 하자. 그러면 최소가 되기 위해서~~는(02:34) ~~또한, 분모가 최대가 되어야 하므로~~(03:40) ~~$a<b$~~(03:50). $\{a,b,c,d\}$의 원소가 정해져 있다고 하고 이것이 최소가 되도록 빼면 되는 방법에 대해 알아보자(05:10). 일단, 일반성을 잃지 않고 ~~$bc<ad$라고 하면~~(05:20). $a<b$라고 할 수 있다. $|bc-ad|$가 최소가 되기 위해서는 $c<d$여야 함을 알 수 있다. *분모(ab)가 최대가 되어야 하므로 $c<d<a<b$ 이고* $(a,b)=(86,75),(85,76)$ $(c,d)=(14,23),(13,24)$. *~~앞에서 한 방식으로 최소값을 구해보~~면(08:50)*

연구자: $|bc-ad|$는 작아야 하는 대신에 분모는 커야 하니까 $c,d$를 그렇게 잡으면 안되겠지!!
학생E: [이텔릭체 부분을 지움](09:40)

~~$ab$가 커야 하므로 $a,b$의 원소도 커야 한다. $(a,b,c,d) = c < a < b < d, a < c < d < b$~~
(i) $bc > ad$인 경우 $\Leftrightarrow$ $c/a > d/b$인 경우, $a > c$이고 $b < d$이어야 한다. ~~$b < d$~~(13:00)
(ii) $bc < da$인 경우 $\Leftrightarrow$ $c/a < d/b$인 경우, $a < c$이고 $b > d$이어야 한다. $a < c < d < b$(15:00)
[이후로도 3분 40초 정도 다른 방법을 시도함]

연구자: OK! 그대로 놔두고 다음 문제가 거의 비슷한 전략으로 풀 수 있으니까 먼저 해봐!(18:40) 1~8로 두 자리 정수를 만드니까 결과가 가장 큰 식을 만들려면 통분해서 분모는 작고 분자를 커야 되지?! 십의 자리에 어떤 숫자가 와야 하는지를 생각해보고 그 다음에 일의 자리를 결정해봐!
E학생: [$|b/a - d/c| = |bc - ad|/ac$에서 $ab$는 작고 $|bc - ad|$는 커지는 방향으로 만든다.
$a$:□□ $b$:□□ $c$:□□ $d$:□□](19:50)
연구자: $b$나 $c$자리가 가능한 커야 하겠지?!(21:35)
E학생: ['$ad$가 최소가 되어야 하므로 $a$:1□, $d$:2□ 이고 $b$:8□와 $c$:7□의 일의 자리에는 6과 5가 들어가야 한다'고 기록함](26:00)
E학생: [$a$:13 $b$:8□ $c$:7□ $d$:2□, $86 \times 75 - 85 \times 76 = (85+1)(76-1) - 85 \times 76 > 0$(실제로는 '$< 0$'이 되어야 함)이므로 $75/13 - 24/86$일 때 최대]
연구자: 75와 86이 바뀌면 어떻게 되지? 분자는 같지만...
E학생: [$(86/13 - 24/75) - (75/13 - 24/86) = 11/13 - 24(1/75 - 1/86) > 0$, $86/13 - 24/75$]

## V. 결론

'추론'은 수학교육에서 매우 중요한 키워드이다. 수학의 주요한 네 측면을 언급할 때도 개념적, 알고리즘적, 문제해결적 측면과 더불어 추론적 측면을 강조한다. 더구나 나머지 세 영역이 추론과 매우 밀접하게 연결되기 때문에 추론은 수학교육에서 가장 중요한 영역일 수밖에 없다. 특히, NCTM이 '1980년대 수학교육은 문제해결 중심이 되어야 한다'고 권고한 이후로 수학교육에서 문제해결 교육이 부각되면서 추론의 중요성이 더욱 더 강조되었다. 다시 말해서, 학습자의 문제해결 능력을 키우기 위해서는 그들의 추론 과정을 분석하는 것이 필수적이다. 이는 명제적 지식보다는 방법적 지식 중심, 결과보다는 과정을 중시하는 현대 수학교육의 흐름을 감안할 때, 당연한 접근 방법이다.

이런 점을 감안하여, 본 연구에서는 문제해결 과정에서 나타나는 학생들의 추론 특성을 알아보고자 했다. 이를 위해, 다섯 명의 고등학생들을 연구참여자로 선정하여 이들에게 다양한 전략적 접근이 가능한 개방형 과제를 부과한 후, 그들의 문제해결 과정을 관찰하였다. 연구참여자들은 스스로 생각한 해결 전략을 마음껏 시도할 수 있었으며, 결과에 대한 수학적 근거를 요구하거나 전혀 해결의 실마리를 찾지 못할 때 힌트를 주는 것을 제외하고는 연구

자의 개입을 최소화하려고 노력했다. 연구참여자들의 문제해결 전 과정은 비디오, 오디오 기법을 활용하여 모두 기록되었으며 그들이 작성한 답안지와 연계하여 분석함으로써 다음을 확인하였다.

우선, 학생들은 과제를 접할 때 성급하게 계산을 시도하는 경향이 있다. 이는 'E학생'을 제외한 모든 연구참여자들에게서 공통적으로 나타난 현상으로 쉬운 문제를 어렵게 해결하는 요인이 되었다. 예를 들어, '문제1,2'의 경우 최소 혹은 최대 분수식을 만들기 위해서는 분모에 어떤 수가 들어가야 하는지가 자명하며 '단위의 합'으로서의 분수의 의미를 생각하면 구체적인 계산과정이 필요하지 않은데도 학생들은 계산에 집중하는 모습을 보여주었다.

둘째, 학생들은 스스로 선택한 전략의 결과에 대해 수학적 근거를 고려하여 정당화하기보다 정답을 구했는지에 대해 더 관심이 많다. 이런 특성 때문에 학생들은 일관된 전략을 적용하지 못하고 여러 방법을 반복적으로 시도하는 비효율적인 모습을 보여주었다.

셋째, 학생들은 문제해결에 필요한 두 가지 이상의 조건을 동시에 고려하지 못하는 경향이 있다. 예를 들어, 최소 뺄셈 분수식의 경우 통분했을 때 분자가 작고 분모는 커야하는데도 분자의 경우만 고려하여 문제해결에 실패한 경우가 이에 해당된다.

넷째, 학생들은 과제와 관련된 선행지식을 활용하는데 능숙하지 못하다. 예를 들어, 분배법칙을 활용하면 $86\times75=(85+1)\times75$이고 $85\times76=85\times(75+1)$이므로 계산하지 않고도 비교가능하고 $8/5-7/6$와 $8/5-6/7$ 중 어느 것이 더 크게 되는지는 자명한데도 두 식을 통분하여 크기를 비교하였다. 이런 특성은 차이만 있을 뿐 모든 연구참여자들에게서 발견되었다.

다섯째, 학생들은 지나친 일반화로 문제해결에 어려움을 겪을 수 있다. 'E학생'은 다른 연구참여자들과 달리 문제해결 초기부터 증명 추론에 집중하였다. 모든 문제가 구체적인 수로 주어졌음에도 풀이를 시작하자마자 문자로 바꾸어 일반화된 식으로 조건에 맞는 식을 찾으려고 했다. 구체적인 것에서 일반적인 것으로 진행되는 보통의 경우와 달리 이 학생은 일반적인 식에서 구체적인 식으로 나아가는 추론 특성을 보여주었다. 이런 특성으로 인해 'E학생'은 쉽게 해결할 수 있는 문제를 어렵게 해결하고 '문제7'은 아예 답을 구하지 못했다.

여섯째, 문제해결 과정에서 학생들은 대부분 모방적 추론에 의지한다. 주어진 과제를 해결하는데 필요한 일반적인 해법 혹은 공식이 없어 창의적인 추론이 가능하나 모든 연구참여자들에게서 창의적인 수학적 추론(CMR)은 나타나지 않았다. 뿐만 아니라, 연구참여자들은 스스로 선택한 전략에 대해 명확한 수학적 근거를 제시하지 못해 그럴듯한 추론(PR)을 사용했다고 보기도 어려웠다.

문제해결 능력은 각 문제 유형에 대한 해법을 숙달시키는 것보다 다양한 전략을 활용한 탐구과정에서 증진될 가능성이 더 높다. 또한, 정보적 지식에 의한 결과중심적 학습보다 방법적 지식에 의한 과정중심적 학습에 의해 학생들의 탐구력이 더 증진된다고 볼 수 있다. 이런 입장에서 보면, 학생들의 문제해결 과정을 미시적으로 관찰하여 분석함으로써 그들이 문제해결 과정에서 어떤 어려움을 겪는지, 그들의 학습 특성은 무엇인지를 지속적으로 살펴 교수-학습에 적극 활용할 필요가 있다.

# 참고 문헌


강옥기 외 (2012). 수학교육학 신서. 교우사.

교과부 (2011). 수학과 교육과정. 교과부.

Adams, R. (1995). Calculus: *A Complete Course,* Addison-Wesley, third edition.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergratduate mathematics education. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II, CBMS issues in mathematics education* (pp. 1 - 32). American Mathematical Society.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 27 - 44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bergqvist, T., Lithner, J., & Sumpter, L. (2007). Upper secondary students task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.*

Boesen, J., Lithner, J., & Palm, T. (2005). *The mathematical reasoning required by national tests and the reasoning actually used by students.* Research Reports in Mathematics Education 4, Dept. of Mathematics, Umeå University.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics. Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students? *Proceedings of 2002 international conference on mathematics: Understanding proving and proving to understand* (pp. 61 - 77).

Hanna, G. and Jahnke, N: 1996, 'proof and Proving'. in A. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 877-908

Harel,G. (2006).Mathematics education research, its nature and its purpose:Adiscussion of Lester's paper. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik,* 38(1), 58 - 62.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM Standards. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research companion to principles and standards for school mathematics(pp.5-26).* Reston, VA: NCTM

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning and familiar procedures. International *Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31, 83 - 95.

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning in task solving. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 165 - 190.

Lithner, J. (2002). Lusten att lära, Osby (The motivation to learn, Osby). Skolverkets nationella kvalitetsgranskningar (*Quality inspections of the Swedish National Agency for Education*), in Swedish.

Lithner, J. (2003). Students mathematical reasoning in university textbook exercises.

*Educational Studies in Mathematics,* 52, 29 - 55.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior,* 23, 405 - 427.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning, *Educational Studies in Mathematics,* 67, 255-276.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston. VA: The Council.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165 - 190.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (Vols. I and II). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1957). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Garden City: Doubleday.

Polya, G. (1971). *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando, FL: Academic.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher,* 26(3), 9-15.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *28th Conference of the international group for the psychology of mathematics education*. vol. 4 (pp. 281 - 288). Bergen.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 227 - 236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

# High School Students' Reasoning Characteristics in Problem Solving

Kang, Yun Soo[12) · Kim, Min Ju[13)

## Abstract

The purpose of this paper is to investigate high school students' reasoning characteristics in problem solving. To do this, we selected five high school students as participants and presented them some open problems which allow diverse solving approaches, and recorded their problem solving process. Through analyzing their problem solving process relate to their solution, we found the followings:

First, students quickly try to calculate without understanding the given problem.

Second, students concern whether their solution is right or not rather than consider mathematical warrants for the results of their strategies.

Third, students have difficulties to consider more than two conditions at the same time necessary to solve problem.

Forth, students are not familiar to use precedence knowledge relate to given tasks.

Fifth, students could have difficulties in problem solving because of easy generalization.

Key Words : Problem Solving, Reasoning, High School Students' Reasoning Characteristics

12) Sunchon National University (yskang@sunchon.ac.kr)
13) Graduate School of Sunchon National University (mjkim@sunchon.ac.kr)