

## 정폭도형을 활용한 초등수학영재 프로그램 개발 및 적용 결과 분석 연구

백경화<sup>1)</sup> · 조영미<sup>2)</sup>

본 연구는 ‘정폭도형’을 소재로 초등 수학영재 프로그램을 개발·적용 하는데 그 목적을 두었다. 이를 위해 정폭도형에 관한 이론을 정리하였다. 다음으로 초등학교 수학 영재 교육 프로그램을 구안하고 예비실험 결과를 토대로 프로그램을 수정·보완하여 최종적으로 프로그램을 구체화하였다. 이 프로그램은 작도와 GSP 프로그램을 접목한 수업 형태로도 개발 가능할 것으로 보이며, 특히 과학·기술·예술적인 면을 연결한 융합교육 프로그램으로 적용·발전시킬 수 있을 것으로 기대된다.

주요용어 : 영재 프로그램 개발, 정폭도형, 필로다각형

### I. 서론

국가적 필요성과 개인의 요구에 의해 우리나라의 영재 교육은 꾸준히 발전해 왔으며 현재에도 관심의 대상이 되고 있다. 예컨대 대전광역시교육청은 2012년까지 영재교육대상자 비율을 3%로 확대하는 것을 목표로 ‘아인슈타인 123 프로젝트’를 진행하였다. 이처럼 각 지역에서 영재교육의 양적 증가는 구체적으로 드러나 현실로 나타나고 있다. 한편 영재교육의 현황을 질적인 측면에서 바라보면, 그동안 적지 않은 변화가 있었다. 초창기에는 한국교육개발원을 중심으로 영재교육 프로그램이 개발·보급되었다면, 최근에 들어서는 각 시도교육청이나 영재교육진흥을 둔 대학원 과정을 통해 많은 프로그램이 개발되어 다양한 프로그램이 만들어지게 되었다.

양적으로나 질적으로나 영재교육은 꾸준히 발전되어 왔다. 그런데 최근 들어 융합인재교육, 특히 STEAM교육이 대두되면서 새로운 프로그램의 개발이 절실했다. 이 논문에서는 이러한 문제의식 아래 정폭도형이라는 주제로 융복합적인 측면이 부각된 프로그램을 개발하고자 하였다.

---

1) 대전구봉초등학교, bkh100@hanmail.net  
2) 공주교육대학교, ymcho@gjue.ac.kr

그동안 국내에서 몇몇 연구를 통하여 정폭도형이 소개되었다. 이천두(2004)는 ‘정폭도형의 이해와 활용에 관한 연구’에서 정폭도형의 개념을 소개하고 중등수학에 도입하기 위한 방안을 제시하였다. 문주경(2010)은 ‘교구를 활용한 수학수업: 중등과정을 중심으로’에서 정폭도형 교구를 활용하는 아이디어를 제시하였다. 이 두 연구는 공통적으로 중등 수학에 정폭도형을 활용하고자 하였다. 이에 대해 초등학교 수준에서 정폭도형을 적용해 본 연구는 찾아보기 어렵다. 이 연구에서는 초등학교 영재교육에서 다룰 수 있을 정도로 정폭도형의 내용을 정련하여 수업을 구안하고 이를 직접 실행하여 그 결과를 분석, 보고하였다.

본 연구에서 초등수학영재 아이들에게 적합한 프로그램을 개발하고자 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다. 먼저 정폭도형에 대한 이론을 살펴본다. 둘째, Renzulli의 3부 심화학습 모형에 따른 초등학교 수학 영재 교육 프로그램을 구안한다. 셋째, 개발된 프로그램을 적용하고 학생들의 반응을 조사, 분석한다.

이를 통해 다음과 같은 효과를 기대할 수 있을 것이다. 첫째, 정폭도형은 근래에 일반 학급 교육과정까지 영향을 주고 있는 STEAM의 주제로 개발될 수 있는 소재이다. 정폭도형이라는 개념은 공학자의 필요에 의해 만들어진 것이다. 수학적 지식이 기술과 어떻게 연결될 수 있는지를 소박하게 경험할 수 있으며, 산출물을 만드는 과정에서 예술적인 면을 접목해 볼 수 있다.

둘째, 정폭도형이라는 주제는 학생들의 고정관념을 깨면서 생각의 전환을 가져다주는 과제가 된다. 정폭도형, 즉 폭이 일정한 도형이라고 하면 원을 쉽게 떠올리며 원뿐이라고 생각하기 쉽다. 그런데 뿔로삼각형 역시 정폭도형이다. 따라서 정폭도형을 다룸으로써 고정관념을 깨면서 생각의 전환을 일으키는 경험을 가져볼 수 있다.

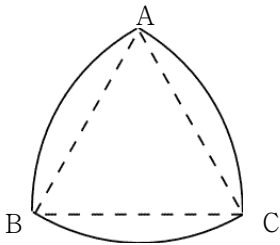
## II. 정폭도형에 관한 이론적 배경

### 1. 프란츠 뿔로와 뿔로삼각형

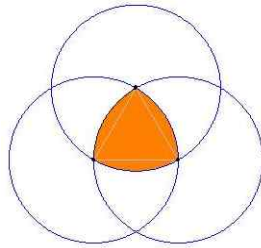
뿔로(Franz Reuleaux, 1829~1905)는 독일의 기계학자이다. 그는 기계공학의 확립에 큰 역할을 수행하였을 뿐 아니라 공업 후진국이었던 독일 공업의 진흥에 노력하였다. 뿔로는 아헨 근처 기계공장 주인의 아들로 태어나 칼스푸에의 고등기술학교에서 공부하고, 신진 기계학교수 레텐바허의 지도를 받으면서 기계설계와 기구의 운동에 흥미를 가졌다. 1856년 그는 27세의 나이로 취리히 고등기술학교의 교수가 되어 기계운동학을 만들어서 강의를 시작하였다. 1856년부터 1864년까지 취리히 공업학교에서 연구하는 동안 이론운동학의 기초를 닦았다. 1868년 베를린 왕립고등기술학교(후의 공과대학) 학장에 취임하였고, 독일공업의 발전에 기여하였다. 그의 주요저서로는 『이론운동학』(1875)이 있다(양보석 외, 2004).

뿔로는 공학적인 형태의 하나로 뿔로삼각형을 고안하였다. 뿔로삼각형은 ‘너비 또는 폭이 일정한 곡선도형’이다. 뿔로삼각형은 다음과 같이 순서로 그릴 수 있다. 세 변의 길이가 같은 삼각형, 즉 정삼각형 ABC를 그린다. 점 A를 중심으로 다른 두 점 B, C가 연결되도록 컴퍼스로 삼각형의 한 변의 길이와 같은 호를 그리면 호 BC가 된다. 같은 방법으로 점 B,

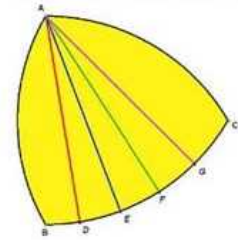
점 C를 중심으로 각각 호 CA, 호 AB를 그릴 수 있다. 이렇게 그린 세 개의 호 AB, BC, CA로 둘러싸인 삼각형 모양이 펠로삼각형이다.



[그림 1] 펠로삼각형



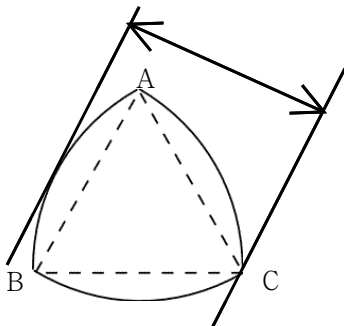
[그림 2] 펠로삼각형 작도 방법



[그림 3] 폭이 일정한 펠로삼각형

이 펠로삼각형의 특징을 살펴보면, 각 꼭짓점으로부터 맞은 편 호에 이르는 거리가 일정하다는 것을 알 수 있다. 예를 들어([그림 3] 참조), 호 BC 위의 임의의 점을 D, E, F, G라 하고 선분 AD, AE, AF, AG의 길이를 재어 보자. 모두 정삼각형 ABC의 한 변의 길이로 그 길이가 같다.

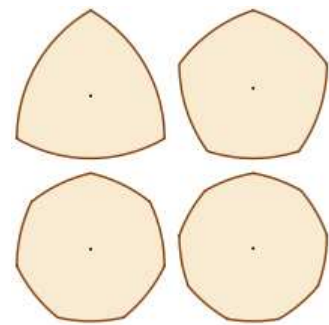
## 2. 정폭도형



[그림 4] 폭이 일정한 펠로삼각형

‘정폭도형’(curves with constant width)은 ‘너비 또는 폭이 일정한 곡선도형’을 말한다. 흔히 접하는 도형 중에서 정폭도형의 대표적인 예가 원이다. 원은 폭이 지름으로 항상 일정한 도형이기 때문이다.

펠로삼각형 역시 ‘너비 또는 폭이 일정한 곡선도형’이다. 예를 들어, 삼각형의 한 꼭짓점과 마주보는 호 위의 임의의 한 점을 지나는 평행선을 그렸을 때, 그 평행선 사이의 거리는 항상 일정함을 알 수 있다. 따라서 펠로삼각형은



[그림 5] 펠로다각형  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Barbier%27s\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Barbier%27s_theorem)

정폭도형이다.

한편 정삼각형에서 출발하여 펠로삼각형을 만든 것처럼, 정오각형, 정칠각형 등으로 너비가 일정한 도형을 만들 수 있는데 이렇게 만들어진 도형은 각각 펠로오각형, 펠로칠각형 등으로 불린다. 이 도형들을 총칭해서 보통 ‘펠로다각형’이라고도 한다. 따라서 원과 펠로다각형을 정폭도형의 대표적인 예로 볼 수 있다([그림 5]).

### 3. 정폭도형의 쓰임

정폭도형의 쓰임은 다양하다. 먼저 흔히 정삼각형, 정사각형 모양은 맨홀구멍에 빠지지만 원은 빠지지 않는 것으로 알고 있다. 그런데 뿔로다각형 모양의 맨홀뚜껑 역시 구멍에 빠지지 않는다. 원과 뿔로다각형은 어떤 공통점이 있을까? 맨홀 뚜껑이 원 모양으로 되어 있는 것은 원은 어느 방향으로 폭을 재어도 그 폭이 일정하기 때문이다. 원에서는 지름이 폭이 된다. 폭이 일정하기 때문에 원 모양으로 구멍과 뚜껑을 만들면 이런 맨홀 뚜껑은 구멍 속으로 빠지지 않는다. 같은 식으로 폭이 일정한 뿔로다각형 역시 원과 모양은 다르지만 공통된 성질을 가지고 있어 맨홀뚜껑으로 사용될 수 있다([그림 9]).

둘째, 원 모양의 바퀴가 일정한 높이를 유지하면서 굴러가듯이, 뿔로다각형을 바퀴로 사용해도 일정한 높이로 굴러갈 수 있다. 이는 폭이 일정하기 때문에 가능하다([그림 6]).

셋째, 동전 모양에 사용된다. 예로 영국의 기념주화 중에는 뿔로칠각형이 있다([그림 7]).

넷째, 기타의 '피크' 역시 정폭도형이다. 피크는 기타를 튕길 때 손톱을 대신해서 줄을 튕기거나 훑어 내는 역할을 하는 얇고 탄력 있는 소재의 보조도구이다. 이 피크의 모양은 대부분 뿔로삼각형이다. 피크는 손이 다치지 않게 모서리가 완만한 곡선의 모양을 지닌 삼각형 형태인데, 꼭짓점 쪽의 좁은 부분은 줄을 튕길 때 사용하고 넓은 쪽은 안정적으로 손에 쥌 수 있어 상당히 편리하다([그림8]).



[그림 6] 바퀴가 뿔로다각형인 자전거  
[http://www.china.org.cn/china/photos/2009-05/07/content\\_17738257.htm](http://www.china.org.cn/china/photos/2009-05/07/content_17738257.htm)



[그림 7] 뿔로칠각형 모양의 주화  
<http://www.coins-of-the-uk.co.uk/pics/dec/50/index.html>



[그림 8] 기타 피크



[그림 9] 뿔로삼각형 모양의 맨홀뚜껑  
<http://www.maa.org/FoundMath/08week21.html>



[그림 10] 뿔로칠각형 모양의 주화 방켈엔진 기념우표  
<http://www.s-line.de/homepages/ebener/W.htm>

여섯째, 앞서 언급했듯이 정폭도형의 대표적인 예는 19세기 독일의 공학자 프란츠 뵐로의 이름을 딴 '뵐로삼각형'이다. 이 정폭도형은 그 이전에도 알려져 있었지만, 뵐로가 기계공학에 구체적으로 응용함으로써 사람들의 관심을 끌게 되었다. 뵐로삼각형은 나중에 방켈 엔진의 기초가 됐다. 이 엔진은 1950년대 펠릭스 방켈에 의해 개발된 회전식 엔진으로 안쪽에 뵐로삼각형이 회전할 수 있도록 돼 있다. 'Wankel Spider'라는 이름의 이 소형 2인승 로드스터는 뒷자리에 사상 최초로 싱글 로터리 피스톤 방식의 로터리엔진을 탑재하였다([그림 10]).

일곱째, 필라델피아 소방국은 1950년대부터 소화전의 마개를 뵐로삼각형 모양으로 만들었다고 한다. 이 소화전의 마개는 꼭짓점에서 맞은편 변 사이의 거리가 일정한 곡선으로 되어 있어서 보통의 렌치로는 미끄러질 뿐 돌릴 수가 없다. 소방수들은 소화전을 사용하기 위해 특수한 모형의 렌치를 가지고 다닌다.

#### 4. 바르비에의 정리

뵐로다각형, 즉 정폭도형과 관련하여 바르비에의 정리(Barbier's theorem)가 있다. 이는 정폭도형 또는 정폭곡선(curves of constant width)에 관한 기하학의 초등적인 정리로, 프랑스 수학자 조제프에밀 바르비에(Joseph-Émile Barbier)의 이름이 붙어 있다. 이는 “폭이  $L$ 인 정폭곡선의 둘레는  $\pi L$ 이다”라는 정리이다. 원은 정폭곡선이므로, 원 지름이  $L$ 일 때 둘레가  $\pi L$ 이라는 것은 바르비에의 정리의 특수한 결과이다. 뵐로삼각형이나 나아가 뵐로다각형과 같은 일반적인 정폭곡선에 대해서도 바르비에의 정리는 성립한다<sup>3)</sup>.

### Ⅲ. 정폭도형을 활용한 수학 영재교육 프로그램 개발

#### 1. 수학영재 교육 프로그램 개발 기준

정폭도형을 활용한 수학 영재 프로그램을 개발하기 위해 최종현(2004), 김양권(2009)이 제시한 준거를 참조하여 개발 기준을 다음과 같이 정하였다.

- ① 전통적인 학습 경험에 비해 수준이 높고, 정교하며 내용이 깊이 있고 추상적일 것
- ② 같은 주제에 대한 활동을 흥미로운 활동에서 점차 깊이 있는 탐구가 필요한 활동으로 단계적으로 구성하면서 각 활동에는 연계성이 있도록 구성할 것
- ③ 고차원적인 수학적 사고능력을 기를 수 있는 자료일 것
- ④ 학생의 자기 주도적인 탐구활동에 비중을 두어 개발할 것

3) <http://ko.wikipedia.org/wiki/>

- ⑤ 다양한 활동 속에서 수학적 추측을 하고 탐구하며 수학적으로 의미 있는 의사소통 과정에 참여하면서 스스로 사고를 체계화 하고 명확하게 할 수 있도록 함

## 2. 개발 프로그램의 차시별 개요

<표 1> 프로그램 차시별 개요

단계	주제	주요 내용 및 활동	소요 시간
1부 심화	정폭도형 개념 알아보기	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 활동 1 : 맨홀뚜껑은 왜 원 모양일까?</li> <li>- 여러 가지 맨홀 뚜껑 탐구하기</li> <li>- 맨홀 뚜껑으로 적절한 뚜껑 찾기</li> <li>- 맨홀 뚜껑이 되기에 알맞은 조건 탐구하기</li> <li>- 폭이 일정한 도형이 '정폭도형'이라는 개념 다지기</li> <li>· 활동 2 : 뿔로삼각형 개념과 성질 탐구하기</li> <li>- 뿔로삼각형 소개하기</li> <li>- 뿔로삼각형이 쓰이고 있는 예 찾아보기</li> </ul>	80
2부 심화	정폭도형 작도하기	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 활동 1 : 뿔로삼각형을 작도하기</li> <li>- GSP를 활용해서 뿔로삼각형 작도하기</li> <li>- 뿔로삼각형이 정폭도형임을 정당화해보기</li> <li>· 활동 2 : 다른 뿔로다각형을 찾아보기</li> <li>- 뿔로다각형이 될 만한 정다각형 찾기</li> <li>- 뿔로다각형이 될 수 있는 조건 알아보기</li> </ul>	80
3부 심화	정폭도형과 놀이	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 활동 1 : 뿔로삼각형을 이용하여 물러를 만들어 굴러 보자.</li> <li>- 2개의 뿔로삼각형 중심에 축 끼워보기</li> <li>- 뿔로삼각형 물러 굴러보기</li> <li>· 활동 2 : 뿔로다각형을 이용한 산출물을 만들어 보자.</li> <li>- 뿔로다각형을 이용한 산출물 계획하기</li> <li>- 산출물 만들어 발표하기</li> <li>- 평가하기</li> </ul>	80

## IV. 프로그램 적용 결과 및 분석

### 1. 연구 대상 및 자료 수집 방법

#### 1) 연구대상

본 연구에서는 2011년 10월에 대전 G초등학교 영재학급 5학년 학생 17명을 대상으로 예비실험을 통해 적용을 하였고, 2012년 11월에 대전 G초등학교 영재학급 5학년 학생 19명을 대상으로 본 수업을 진행하였다. 정폭도형의 개념을 바탕으로 추출한 학습 요소를 바탕으로 교수·학습 자료의 원형을 만들어, 이를 토대로 예비실험을 하고 결과와 개선점을 바탕으로 수정 보완하여 본 수업에 적용 후 최종본의 교수·학습 자료를 만들었다.

## 2) 자료수집 방법

### (1) 관찰

본 연구에서는 연구자가 수업의 실행자이며 동시에 수업의 관찰자가 되는 참여관찰을 실시하였다. 참여관찰은 연구자가 수업의 실행자이기 때문에 객관적이기 어렵고 세세한 부분을 놓칠 수 있어 참관 교사의 도움을 받는 것이 이상적이다. 하지만 이는 현실적으로 실행하기에 어려운 부분으로 본 연구는 연구자가 수업을 하면서 관찰을 하는 형식으로 진행하였다(우정호 외, 2006).

### (2) 면담

면담은 사례 연구의 대상인 현상을 이해하는 데 필요한 정성적 자료의 주요 원천이다. 면담은 진행 형식과 계획의 구조화 정도에 따라 비 구조화된 면담, 반 구조화된 면담, 구조화된 면담으로 나눌 수 있다. 일반적으로 사례연구에서는 반 구조화된 면담을 사용한다(우정호 외, 2006).

본 연구에서는 모든 아동을 대상으로 개별 면담을 하지 않고, 활동지나 참여관찰 양식에서 나타나는 내용을 바탕으로 특별한 양상을 보이는 학생이나, 연구 결과가 자료에 잘 나타나지 않는 경우에 한해 면담을 실시하였다.

### (3) 기록물 수집

본 연구에서 나타난 기록물은 학생들이 수업에서 활용한 활동지와 수업 이후에 이루어진 자기 평가 자료, 연구자의 참관 일지, 사진 자료 등이 있다. 학생들의 성취 정도를 분석하기 위해 활동지와 사진 자료 등을 주로 분석하였으며, 교수·학습 자료의 타당성을 평가하기 위해 프로그램 적용 후 학생들의 설문 형식의 평가 자료를 분석하였다.

## 2. 개발 프로그램 적용 결과 및 분석

### 1) 1 부 심화 : 정폭도형 개념 알아보기

본 활동의 주요 목표는 정폭도형에 대한 개념을 확립하는데 있다. 가장 많은 예로 사용되고 있는 맨홀뚜껑을 탐구함으로써 정폭도형이 되기 위한 조건을 찾고자 하였다.

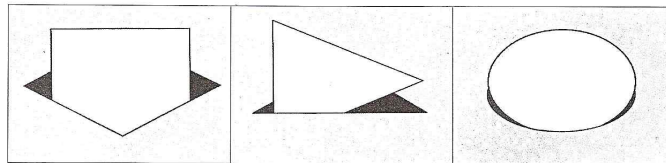
#### (1) 활동 1 : 다양한 모양의 맨홀뚜껑으로 정폭도형 이해하기

우리 생활 속에는 수학이 녹아있고, 생활주변에서 볼 수 있는 소재들이야말로 수학에 대해 흥미를 가지고 탐구할 수 있도록 하는 가장 쉬우면서도 효과적인 방법이라고 볼 수 있다. 도형 그림을 보여주면서 맨홀뚜껑으로 적절한 것을 선택하고 그 이유를 설명해 보라고 하였다. 이는 정폭도형의 핵심적인 성질인 ‘폭이 일정하다’는 것을 학생 스스로 파악하게 하려는 것이다. 다음은 학생의 활동지의 일부이다.

수제	원을 품은 삼각형-2. 정폭도형 알아보기	이름	
학습목표	다양한 모양의 맨홀뚜껑으로 정폭도형을 이해 할 수 있다.		

#### 활동1 다양한 모양의 맨홀뚜껑으로 정폭도형 이해하기

가. 다음 중 맨홀뚜껑으로 적당한 것을 어떤 것이고 그 이유는 무엇인가요?



순 원 모양이다. 왜냐하면 삼각형이나 사각형은 구멍안에 뚜껑이 들어갈수 있는데 원 모양은 구멍안에 뚜껑이 들어가지 않는 구조인 정폭도형이기 때문이다. 일변의 길이가 다른데 길이보다 짧아서.

나. 위에서 탐구한 것처럼 맨홀뚜껑이 되기 위한 조건은 무엇인가요?

맨홀뚜껑이 되기 위한 조건은 어느 방향에서든 폭이 일정해야 한다.

다. 위 내용을 종합해서 정폭도형을 정의해 보자.

**정폭도형이란?**  
정폭도형은 도형과 접하는 두 평행선 사이의 거리가 항상 일정한 도형

[그림 10] 다양한 모양의 맨홀뚜껑으로 정폭도형 도입하기



학생들은 맨홀뚜껑이 되기 위한 조건으로 다음과 같이 제시하였다.

S1 : 맨홀뚜껑이 되려면 어느 방향에서도 폭이 일정해야한다.

S2 : 어느 방향에서든 폭이 일정해야한다.

위 활동에서 탐구한 결과를 종합해서 정폭도형을 다음과 같이 정의하는 활동을 하였다: 정폭도형은 도형과 접하는 두 평행선 사이의 거리가 항상 일정한 도형으로, 이때 두 평행선 사이의 거리를 폭이라고 한다. 여기서 정폭도형을 정의하기 위해서는 ‘평행’의 개념을 확실히 이해할 필요가 있기 때문에 그것을 돕기 위한 보조적인 설명을 하였다.

## (2) 활동 2 : 윗로삼각형 개념과 활용 사례 알아보기

### ① 윗로삼각형에 대해 알아보기

본 연구의 중심이 되는 윗로삼각형에 대해 알아보는 활동이다. 정폭도형을 정의한 후 ‘원 이외의 정폭도형은 없을까?’라는 질문을 던진 후 학생들에게 윗로삼각형을 보여주면서 이 역시 정폭도형임을 확인해보도록 하였다. 원 이외의 정폭도형을 학생들 스스로 발견해보도록 하는 것은 무리가 있다고 판단했기 때문이다.

학생들에게 다음 그림과 같은 윗로삼각형에 대해 알아보고 그 결과를 정리해 보도록 하였다.

S1 : 안에 있는 삼각형은 정삼각형이고 삼각형 주위에 일정한 도형이 둘러싸여 있습니다.

S2 : 원과 삼각형이 합쳐진 것이다. 폭이 7.2cm로 모두 같다.

S3 : 위 도형을 만들려면 정삼각형만 가능하다. 정폭도형은 곡선이 꼭 들어가야 한다.

S4 : 원+삼각형=정폭도형

이 활동에서 유의한 점은 정폭도형의 정의를 엄두에 두지 않고 자유로운 탐색을 하는 것이었다. 직관적인 관찰에 의한 탐구를 하는 학생들이 대부분이었고, 학생들의 답변을 보면, 정폭도형이 되기 위해서는 호 또는 곡선이 있어야 한다는 것을 인지하고 있다는 것을 알 수 있다.

### ② 인터넷을 활용하여 윗로삼각형이 활용된 사례 알아보기

학생들이 스스로 검색해서 윗로삼각형이 쓰이고 있는 예를 찾아보는 활동으로 구성된 다음 간단한 프리젠테이션을 하도록 하였다. 모듈별로 진행된 이 활동은 모듈별 의사소통 정도와 협력하는 태도 형성에 효과적인 방법이 되었으며, 스스로 찾아보는 과정을 통해 정폭도형에 대해 많은 것을 접할 수 있는 기회가 되었다. 다음은 학생들이 탐구한 내용을 프리젠테이션한 자료이다.



[그림 11] 학생들이 제시한 프리젠테이션 자료

다음으로 뿔로삼각형이 사용된 맨홀뚜껑과 동전을 예로 들어, 뿔로삼각형의 장점이 무엇인지를 생각해보도록 하였다.

- S1 : 뿔로삼각형은 원의 면적보다 작기 때문에 비용이 덜 든다.
- S2 : 무게가 덜 나간다.
- S3 : 뿔로삼각형으로 동전을 만들면 원은 잘 굴러가지만 뿔로삼각형은 많이 굴러 가지 않아 쉽게 찾을 수 있다.
- S4 : 면적이 적어서 쉽게 가지고 다닐 수 있다.

이 활동에서는 모듈별 탐구 및 학생 주도 학습으로 진행하였다. 학생 주도로 이루어지는 활동답게 스스로 탐구하고 모듈별로 협력하여 결과를 정리하면서 교사가 의도하지 않는 부분의 지식도 찾게 되고 더 적극적으로 참여하려는 모습이 보여서 효과적이었다. 특히 조별로 만든 자료를 발표하는 경험을 통해서 모듈 간 자료를 서로 비교하며 생각을 넓혀갈 수 있는 기회가 되었다.

## 2) 2부 심화 : 정폭도형 작도하기

### (1) 활동 1 : 뿔로삼각형을 작도하기

정폭도형 작도하기의 주된 활동은 뿔로삼각형과 뿔로오각형을 GSP프로그램으로 작도하고 정폭도형임을 증명하는 활동으로 구성하였다. 자와 눈금 없는 자료 작도할 수도 있지만, 여기에서는 GSP를 이용해서 정폭도형을 작도하였다. GSP프로그램의 필수 기능만 지도 해 준 후 스스로 해결 방법을 찾아 주도적인 학습이 되도록 하였으며, 정삼각형은 기본 작도 방법을 기본적으로 사용하도록 하고 수준에 따라서 사용자 도구모음을 이용하도록 하였다. 정오각형 작도가 목적이 아니므로 정오각형은 사용자도구모음에 있는 정오각형을 사용하도록 하며 이로부터 출발하여 뿔로오각형을 그리도록 하였다. .

### (2) 활동 2 : 다른 뿔로다각형을 찾아보기

뿔로오각형 탐구 활동 후에 정다각형 범위 안에서 정폭도형이 될 수 있는 도형의 조건을 찾아보았다. 정폭도형이 되기 위해서는 정삼각형, 정오각형과 같이 홀수 각이어야 하는 데 그 이


유는 꼭짓점과 마주보는 변이 있어야 호를 그릴 수 있기 때문이다. 다시 말해 짝수각형인 경우 꼭짓점끼리, 변끼리 마주보고 있기 때문에 한 꼭짓점을 중심으로 하는 호를 그릴 수 없는 것이다. 이 활동 후에 정폭도형이 될 수 있는 도형이 홀수 변을 가진 정다각형이고 그 개수가 무한함을 알았다. 이러한 다각형을 펠로다각형으로 부른다는 것을 알려주었다.

### 3) 3부 심화 : 정폭도형과 놀기

#### (1) 활동 1 : 펠로다각형 롤러 만들기

제1부와 2부의 학습을 통해 학생들은 정폭도형의 정의와 그 성질을 알아보았으며, 펠로다각형을 그릴 수 있게 되었다. 배운 내용을 바탕으로 제3부에서는 산출물을 만들어보는 시간을 갖도록 하였다. 먼저 학생들이 공동의 산출물을 만들어 보고 이후 모둠별로 창의적인 산출물을 만들어보도록 하였다. 모든 모둠이 함께 만든 공동의 산출물로는 ‘휴지 심을 활용한 롤러 만들기’였으며, 그 과정은 다음과 같았다.

<표 2> 휴지 심을 이용한 롤러 만들기

<p><input type="checkbox"/> 준비물 : 휴지 심, 두꺼운 도화지, 펠로다각형 도안, 풀, 마찰력 있는 판</p> <p><input type="checkbox"/> 만드는 방법</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- 작도한 펠로다각형을 두꺼운 도화지에 옮겨 오려낸다.</li> <li>- 휴지 심을 중심에 잘 맞추어 양쪽에 고정시킨다.</li> <li>- 마찰력이 있는 곳에 굴러보면서 탐구해 본다.</li> </ul> <p><input type="checkbox"/> 주의할 점</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>· 롤러가 굴러가기 위해서는 마찰면이 필요하다.</li> <li>· 두 개 이상의 롤러를 굴리려면 두 롤러를 연결할 만한 무게감 있는 직사각형의 물체가 필요하다.(본 실험에서는 12색 유성매직 판을 이용하였다.)</li> <li>· 실험결과가 잘 나오게 하려면 휴지 심을 펠로다각형 중심에 잘 맞춰서 고정시켜야 한다.</li> </ul>	
--	---

#### (2) 활동 2 : 모둠별 산출물 만들기

예비수업에서 <펠로다각형 바퀴를 단 자동차 만들기> 라는 제한된 산출물 만들기를 실시하였다. 그 자체로도 만족해하는 학생들이 많았지만 본수업에서는 조금 더 학생들에게 스스로 만들어 낼 수 있는 기회를 주고자 하였다.

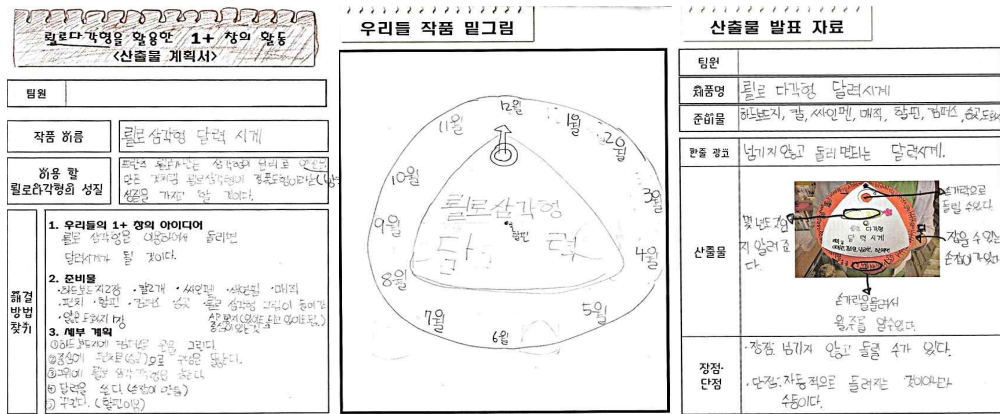
펠로다각형의 성질을 이미 원이라는 도형이 상당부분 갖추고 있기 때문에 펠로다각형을 이용하는 대신 쉽게 원을 이용할 수도 있다. 따라서 산출물 만들

<표 3> 조별 산출물 내용

조	산출물
A	펠로다각형을 활용한 자동차
B	펠로삼각형을 활용한 달력시계
C	펠로다각형을 활용한 자동차
D	-맨홀뚜껑 -펠로삼각형을 활용한 작도기 -펠로삼각형을 활용한 빗자루

기에서 원은 제외하는 것으로 하고 뿔로다각형을 활용한 산출물을 만드는데 주목하도록 하였다. 모둠별 산출물의 내용은 <표 3>과 같았다.


위 산출물에서 특기할 만한 것은 B모듬의 작품이다. B모듬의 뿔로삼각형 달력시계는 월과 날짜가 쓰여진 원 안에 뿔로삼각형을 원의 중심과 맞추어 핀으로 고정 시킨 후 뿔로삼각형의 한 쪽에 구멍을 내 돌릴 수 있도록 한 작품이다.



[그림 12] B모듬의 산출물 제작 과정

작품을 주로 고안한 학생과 면담을 해 보았다. 정폭도형은 폭이 일정하기 때문에 돌려도 원을 벗어나지 않는다는 아이디어를 적용하였다고 하였다. 또한 달력은 매일 또는 매월 넘겨야 하지만 이 달력은 넘기지 않아도 되는 편리함이 장점이라고 하였다. 물론 원에 내접하는 삼각형으로 해도 똑같은 효과를 볼 수 있다. 하지만 원에 내접하는 삼각형에 대해서는 선수 학습에 해당하는 내용이기 때문에 정폭도형의 성질을 이용한 아이디어 자체는 가치가 있다고 보아진다. 산출물 발표 시 “직접 돌려야 하기 때문에 불편할 것 같다. 매일 돌려야 해서 불편할 것 같다.”와 같은 지적과 반대로 “넘기지 않아도 된다. 달력보다 편할 것 같다. 창의성이 뛰어나다”와 같은 장점을 이야기 한 학생들도 있었다.

다음으로 D모듬은 정폭도형을 쉽게 작도할 수 있는 자와 뿔로삼각형으로 만든 빗자루를 만들었다. 아이디어를 낸 학생은 뿔로삼각형 작도기는 일반 삼각자나 각도기처럼 뿔로삼각형을 작도하는 자를 만들면 일일이 작도하지 않아도 작도가 가능하다는 아이디어와, 뿔로삼각형 빗자루는 원래 삼각형 변에서 추가된 호 넓이만큼 폭이 넓은 점에 착안해서 빗자루를 만들면 효율적인 것이라는 아이디어를 적용하였다.

산출물 발표 자료	
팀원	시혜, 정진규
제품명	뿔로삼각형과, 뿔로삼각형 빗자루, 뿔로삼각형 빗자루
준비물	노란 비닐, 실, 클로도화지, 깎대개,
한줄 광고	뿔로 삼각형을 이용해 더 다양한 용도로 사용할 수 있다
산출물	 <p>평범한 나뭇가지보다 공기 저항을 많이 받는다.</p> <p>이제 뿔로삼각형을 그려주세요.</p> <p>평범한 빗자루보다 먼지가 많이 잡히게 할 수 있다.</p>
장점·단점	보통 삼각형 보다 더 간편하게 할 수 있다

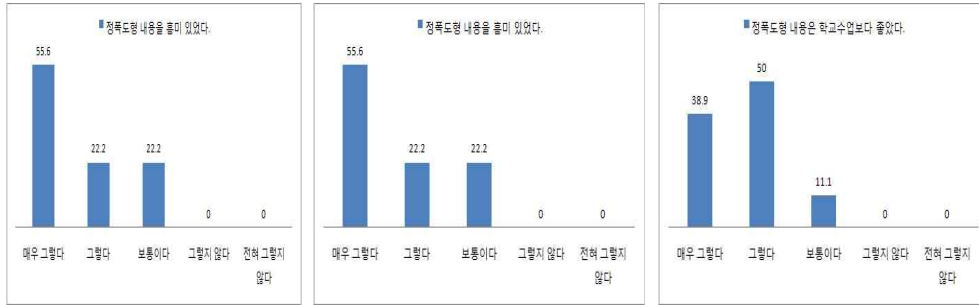
[그림 13] D모둠 산출물 발표지

이 산출물의 아이디어를 주로 낸 D모듬의 학생은 가정에서 부모님과 산출물에 대한 의견을 나누고 사전 실험을 해 볼 정도로 의욕을 보였으며, 친구들에게 가장 좋은 평가를 받았다. 일반 빗자루는 바닥과 닿는 면이 직선으로 되어있지만 뿔로삼각형 빗자루는 호 부분이 더 해서 바닥과 닿는 면이 넓어 많이 쓸 수 있다는 아이디어에 많은 점수를 주었다. 하지만 다른 학생이 가운데 부분은 넓지만 양 끝 부분이 바닥에 닿지 않아 효율적이지 않을 것 같다는 지적을 하였다. 한편 뿔로삼각형 작도기는 직접 시범을 보여 달라고 해서 직접 보여주었더니 그럴듯하다는 반응을 보였다. 엄밀하게 보면 정확한 정폭도형을 그리기엔 적절하지 않지만 이러한 산출물을 만들어 내기 위해 정폭도형의 성질을 이해하고 응용하려고 한 점은 높이 살만하였다.

### 3. 프로그램 결과 분석 및 개선 방향

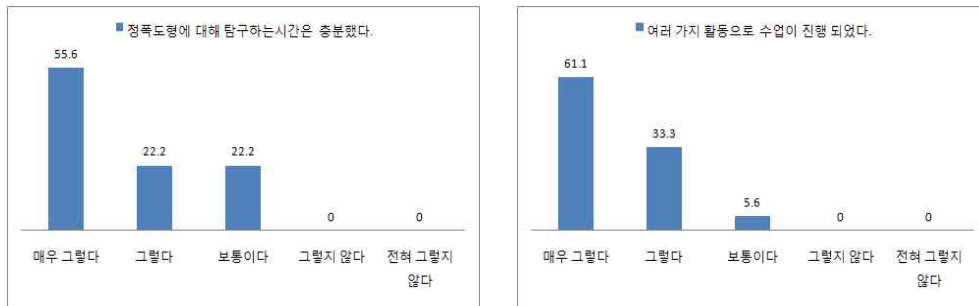
#### 1) 결과 분석

프로그램 적용 후 프로그램의 목적과 관련해서 의미 있는 설문을 중심으로 그 결과를 분석해 보았다. 아래 그래프는 마지막 시간 수업에 참여한 18명 학생들의 설문 결과를 분석한 내용이다.



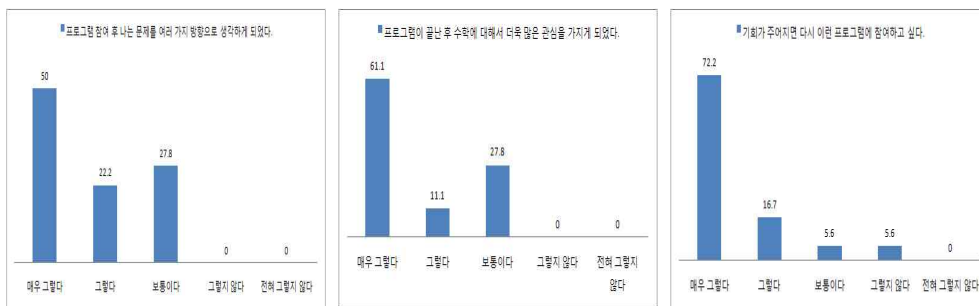
[그림 14] 설문결과 분석 그래프(1)

정폭도형에 관한 프로그램을 내용면에서 보면 위에서 보는 바와 같이 흥미를 보인 학생이 14명으로 78% 학생이 흥미를 보인 주제임을 알 수 있다. 학교수업보다 좋은지를 묻는 문항에서는 <그렇지 않다>와 <전혀 그렇지 않다>를 응답한 학생이 없어 대체로 만족해하였음을 알 수 있다.



[그림 15] 설문결과 분석 그래프(2)

다음으로 수업 활동에 대한 설문 결과를 분석해 보면 18명의 학생 중 17명에 해당하는 94% 학생들이 여러 가지 활동으로 수업이 진행되었다고 평가하였다. 탐구 과제에 맞게 개별 탐구, 모둠 활동, 발표 및 토의, 프리젠테이션, 산출물 만들기 등의 활동이 학습 주제를 탐구하는 데 효과적이었던 것으로 보인다.



[그림 16] 설문결과 분석 결과(3)

‘프로그램 참여 후 문제를 여러 가지로 생각하게 되었다’에 긍정적으로 답한 비율이 70%를 웃돌았으며, ‘프로그램 끝난 후 수학에 대해서 더욱 많은 관심을 가지게 되었다’에 긍정적인 응답 비율 역시 70%를 웃돌았다. ‘기회가 주어지면 다시 이런 프로그램에 참여하고 싶다’는 응답 비율은 88%에 이르러, 학생들이 참여도와 만족도가 높음을 알 수 있었다.

## V. 결론 및 제언

본 연구는 정폭도형에 대한 이론을 바탕으로 초등수학영재프로그램을 개발하고 적용 및 결과를 분석하여 그 활용방안을 모색해 봄으로써 정폭도형을 소재로 한 영재교육프로그램의 활용 가능성을 연구하는 데 목적을 두고 있다. 본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 정폭도형에 대한 이론을 고찰하여 프로그램 개발 가능성을 탐구하고, 초등수학영재학생들에게 어떤 의미를 가질 수 있는지 살펴보았다.

둘째, 윗로삼각형 탐구를 바탕으로 정폭도형의 개념을 도입하고, 우리 주변에서 쓰이고 있는 정폭도형을 찾아봄으로써 수학이 실생활과 밀접한 관련이 있다는 것을 느낄 수 있도록 했다.

셋째, 정폭도형 이론을 토대로 초등수학영재 프로그램을 개발하고 예비실험을 한 후에 수정 보완하여 본 수업을 실시하였다. 학생들은 정폭도형의 개념과 주요 특징을 알고 여러 가지 산출물을 만들어 보았다.

이 프로그램 적용 결과 다음과 같은 의의를 가질 것으로 기대된다.

첫째, 개발된 프로그램 및 학습 자료는 단위 학급 학생들 수준에 맞는 학습 프로그램으로 난이도 조절이 가능하고 다양한 활동을 할 수 있을 것이라는 가능성이 보였다.

둘째, 개발된 프로그램은 현행 교육과정에 근거한 것으로 일반학급에서 심화 형태로 적용할 수 있으며, 작도와 GSP프로그램을 접목한 수업 형태로 개발 가능하여 다양한 방향으로 활용가능 할 것이다.

셋째, 정폭도형이 가지고 있는 수학적 요소들을 탐구하는 과정에서 분석적·종합적으로 사고하는 힘이 생기고, 수학적 의사소통 능력 향상에 도움이 될 것이다.

넷째, 또한 현재 대두되고 있는 STEAM형 과학·기술·예술적인 면을 융합한 프로그램으로 적용·발전시킬 수 있을 것이다.

## 참고 문헌

- 교육과학기술부 (2011). 수학교과서 3-2. 두산동아.
- 교육과학기술부 (2011). 수학교과서 6-1. 두산동아.
- 교육과학기술부 (2011). 초등학교 교사용 수학지도서 3-2. 두산동아.

- 교육과학기술부 (2011). 초등학교 교사용 수학지도서 6-2. 두산동아.
- 김양권 (2009). 초등수학 영재를 위한 도형수 과제의 수준별 교수-학습 자료 개발에 관한 연구. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 김지영 (2010). 초등수학 영재교육 대상 학생의 작도 정당화 과정 분석. 석사학위논문. 서울 교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 노승혜 (2010). 초등학교 일반학급에서 영재에게 활용 가능한 수학 프로그램 개발에 관한 연구. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 대전광역시교육청 (2011). 주제탐구 융합인재교육(STEAM) 교수·학습 지도 자료.
- 문주경 (2010). 교구를 활용한 수학수업 : 중등과정 중심으로. 계명대학교 교육대학원 석사학위논문.
- 박지영 (2010). 초등 수학 영재를 위한 폴리큐브 교수·학습 자료 개발 연구. 석사학위논문, 경인교육대학교 교육대학원.
- 양보석·이연원·김선진 역 (2004). 기계공학의 역사. 서울 : 인터비전.
- 우정호 외 (2006). 수학교육학연구방법론. 서울 : 경문사.
- 이천두 (2004). 정폭도형의 이해와 활용에 대한 연구. 석사학위 논문, 신라대학교 교육대학원.회
- 최종현 (2004). 주제 탐구형 수학 영재 교수·학습자료 개발에 관한 연구. 경인교육대학교 석사학위논문.



## The Program Development with Curve of Constant Width for the Math-Gifted in Elementary school

Kyung Hwa, Baek<sup>4)</sup>, Cho, Youngmi<sup>5)</sup>

### Abstract

This study intends to develop and apply elementary mathematics program for gifted students based on a 'constant width shape' in order to keep pace with the STEAM education which is becoming the main issue and therefore, it set up research subject as follows; To introduce constant width shapes through 'a circle' which is a constant width shape under present education process and based on this, to search a theory about constant width shapes and reuleaux triangles. To arrange an elementary mathematics program for gifted students according to the part 3 enrichment study model of Renzulli. To revise · supplement the program on the basis of field application result twice and then to materialize the program. It is expected that the developed program and study data will suggest mathematical ideas and direction of materials development in education sites of elementary mathematics program for gifted students.

Key Words: Curve of Constant Width, Reuleaux triangles

---

4) Daejeon Gubong Elementary School (bkh100@hanmail.net)

5) Gongju National University of Education (ymcho@gjue.ac.kr)