한국학교수학회논문집 제 16 권, 제 1 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 16, Number 1, 187-200, March 2013

중학교 기하에 관한 교사의 인지적 지식 분석

하영화[1] · 고호경[2]

본 연구는 수학 교사가 갖추어야 할 지식에 관한 연구의 일환으로, 중고등학교 교사들의 기하 영역에 관한 친숙도와 이해도와의 차이를 분석하였다. 예비 검사와 본검사를 거쳐 중고등학교 교사 80명을 대상으로 설문지와 검사지를 통해 조사가 이루어졌으며, 조사 결과 주어진 내용에 대해 알고 있다고 믿는 친숙도와 그 내용이 성립하는 이유를 설명할 수 있는 이해도와의 차이가 크다는 것이 밝혀졌다. 이러한 결과는 중고등학교 교사와 예비교사 교육에 시사점을 제공해 줄 수 있다.

주요용어: 교사의 내용 지식, 인지적 지식, 기하

Ⅰ. 들어가는 말

인식론은 지식의 성격, 지식의 형성과정, 그리고 지식의 타당성 규정에 관한 문제들을 망라하고 있으며, 그러한 것들이 서로 연관관계를 가지고 하나의 체계를 유지하고 있어서 어떤 인식론에 기반을 두느냐에 따라 지식에 대한 시각, 지식의 형성과 발전에 대한 관점 역시 달라진다 하였다(이현욱, 2004). 또한 그는 인식론에 따라 교사와 학생들이 지식을 가르치고 배우는 양태와 그 효과 역시 달라지는데 오늘날 어떤 개념을 배우거나 평가하는 데 있어서 지식의 단편성과 개념의 정의를 이론적 맥락과 연관 짓지 못하는 것이 문제점이라 지적하고 있다.

무엇을 안다는 것은 무엇이며 어떠한 상태인 경우 그것을 안다라고 할지에 대한 궁금증은 비단 철학자들만의 전유물은 아닐 것이다. 플라톤은 “P는 X를 안다”(P는 어떤 사람, X는 어떤 사실)라는 것이 참이려면 “P는 X를 믿는다”는 것을 수반하는 것 외에도 참다운 지식의 요건으로 충분하기 위해서는 P는 X의 로고스를 제시할 수 있어야 한다고 하였다.

따라서 인지적 지식이란 두 가지가 형태가 있을 수 있다. 본인이 어떤 명제를 안다라고 생각하는 것과 그 지식이 성립하는 이유를 설명할 수 있는 것. 수학에서 어떤 지식의 단편성만을 인식하고 그것을 안다고 하는 것은 진정한 앎의 상태라 말할 수 없다. 그것이 성립함을 이론적 맥락과 연관 지어 설명할 수 있어야 한다.

1) 아주대학교(yhha@ajou.ac.kr)
2) 아주대학교(kohoh@ajou.ac.kr)

본 연구에서는 첫 번째 형태의 안다라고 생각하는 것을 어떤 내용에 대해 ‘친숙한 것’이라고 표현하고, 두 번째의 상태를 어떤 내용에 대해 ‘이해한 것’이라고 하며, 이러한 두 번째의 상태를 어떤 내용을 실제로 아는 상태로 규정하였다.

교사가 전문화된 내용 지식(specialized content knowledge) 즉, 수학적 규칙과 절차를 설명할 수 있는 개념, 사실, 절차, 이유에 대한 지식을 갖고 있는가는 중요한 일이다(Hill 외, 2008). 중학교 2학년 기하 영역에서는 이등변삼각형의 성질들을 활용하여 여러 가지 삼각형과 사각형의 성질들을 파악하고 이를 논리적으로 설명하는 학습이 이루어진다. 따라서 이를 지도하는 교사들은 이와 같은 논증 방법을 도입하여 타당하게 설명할 수 있어야 할 것이다.

이러한 기하 영역에 대한 내용 지식에서의 교사들의 이해 정도를 파악하는 것은 학교 현장에서 기하 학습이 충실히 이루어지는 데 도움이 될 수 있을 것이다. 이를 위해 본 연구에서는 중학교 2학년 기하 영역의 내용 중 ‘안다는 것은 그 근거를 아는 것’을 수반해야 하는 내용으로 선정하고, 이를 설문지와 검사지로 구성하여 교사들이 이 명제에 대한 친숙도와 이해도와의 차이를 분석하고자 한다.

Ⅱ. 교사의 내용 지식에 관한 선행 연구

Hill 외(2005)는 가르치는 일은 학생들에게 용어와 개념을 설명하고, 학생들이 말한 것과 문제를 푼 것들을 해석하며, 교과서에서 특정 주제를 어떻게 다루었는지에 대해 판단하고 잘못된 점이 있다면 이를 바로잡고, 수학교실에서 정확한 표현을 사용하며, 수학적 개념, 연산, 증명들을 학생들에게 제시하는 일이라 판단하고, 이러한 일을 하기 위한 교사의 수학적 지식이 학생의 성취도에 미치는 영향을 조사하였다. 이때 수학 교사들에게 필요한 지식을 수학 교수 지식(Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)이라 명명하고, 이러한 MKT는 수학을 가르칠 때 사용되는 수학적 지식이라 재 개념화하였다. 이때, MKT는 교과지식과 교수지식으로 나뉘는 데, 즉, 범교과적인 성격을 지닌 교수학적 내용 지식(Pedagogical Contents Knowledge, PCK)과 수학 교과의 특성을 고려한 수학교사들의 특정적인 PCK를 모두 포함한다(Ball 외, 2005).

또한 Heather 외(2008)는 정성적 연구를 통하여 학생과 관련된 교수학적 지식(knowledge of content and student, KCS)라는 새로운 개념이 존재함을 피력하고 있다. 따라서 KCS를 포함하는 교수에 대한 수학적 지식(Mathematical Knowledge for Teaching, MKT)의 영역을 제안하고 있다. MKT는 타원형에서 6개의 영역으로 나뉘는데, 이 6개의 영역이 명확하게 구분이 되는 것은 아니지만 “교과관련 지식(Subject Matter Knowledge, SMK)”으로 이름 붙여진 부분은 Shulman이 개념화한 PCK의 바깥에 놓이는 두 요소를 포함한다. 이 두 요소란 수학 영역에서의 일반 내용 지식(common content knowledge, CCK)과 전문화된 내용 지식(specialized content knowledge, SCK)이다. Ball 외(2005)에 따르면, CCK는 수학이 사용되는 다른 분야(professions or occupations)에서 사용되는 방법과 같은 방법으로, 가르치는 방식보다는 일반적인 수학적 지식과 기술을 의미한다고 하였고 이는 수학적인 용어와 그것의 표기, 그리고 수학적인 개념과 사실에 대해 알고 있거나 단순 계산을 통해서 답을 구할 줄 아는 것에 해당된다. 또한 SCK는 수학을 가르치는데 필요한 수학적 지식과 기술을 의미한다. 수학적 개념과 사실을 이해시키기 위한 전형적인 문제를 알고 있는지, 수학적 개

념 또는 사실 간의 연관성을 알고 있는지, 수학적 아이디어를 정확하게 표현할 수 있는지, 수학적 규칙과 절차를 설명할 수 있는 개념, 사실, 절차, 이유에 대한 지식이나 대안적인 방법 등에 해당된다. 다시 말하면, SCK는 수학을 가르치는데 필요한 고유의 수학지식과 기술을 의미한다. 이와 같은 SCK는 학습자에게 직접 가르쳐지지는 않지만 교사가 이해하고 있어야 할 수학 지식으로, 실제 수업 현장에서 교사들의 지식의 폭을 넓히고 더 좋은 수업을 위해 기여할 수 있다고 하였다(김유경・방정숙, 2012).

근래 중등 수학교사가 알아야 할 수학 내용 지식에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. (예, 고상숙・장훈, 2005; 곽주철・류희수, 2008; 신보미, 2008; 강영란・조정수・김진환, 2012). 수학교사들의 수학내용 지식을 학교수학과 연결된 학문적 수학, 학교수학의 과정 지식 중 수학외적 문제해결, 추론과 증명 영역을 중심으로 현직 수학교사들의 수학내용 지식으로 조사 결과 수학외적 문제해결력, 추론과 정당화 관련 문제는 물론 학교수학과 학문적 수학 사이의 연결 관련 문제 모두 타당한 설명을 포함한 정답률에 문제가 있는 것으로 나타났다(조완영, 2011) 이러한 교사의 내용 지식이 교사 양성과정에서의 커리큘럼과 관계있으며, 또한 교사의 재교육과도 연관 지을 수 있다. 이와 같은 의도로 조완영(2011)은 수학교사가 알아야 할 수학내용 지식을 학교수학의 내용지식과 과정지식, 학교수학과 연결된 학문적 수학으로 구분하고, 이를 교육과정과 연결하여 검사지를 개발한 바 있다.

또한 황혜정(2010)은 수학 교과의 내용 지식은 학습자에게 내용 지식을 바르게 전달하는 차원에서 교수 방법 지식, 수업 상황 지식 보다 우선적으로 요구 되는 것이므로 이에 대한 수업 평가 틀을 개발하여 교사의 수업 전문성 향상을 꾀한 바 있다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

예비 검사에서의 연구 대상은 경기도 교육청 위탁 영재 교육 연수를 받고 있는 3년~10년 사이의 경력 교사 18명을 대상으로 이루어졌다. 본 연구는 경력 5년~7년 사이의 경기도 소재 중학교 교사 32명(A집단), 고등학교 교사 30명(B집단)을 대상으로 이루어졌다. 예비 검사에서 교사들이 설문지와 검사지를 모두 작성하는데 대략 15분에서 25분 정도의 시간이 소요되었기 때문에 본검사에서는 설문지와 검사지를 모두 작성하는데 20분의 시간이 주어졌다.

2. 교사의 기하 영역 내용 지식 분석을 위한 문항 선정

중학교 기하의 내용은 점과 선으로부터 시작하여 각, 다각형, 원으로 그 대상이 확대된다. 중학교 2학년 기하 영역에서는 삼각형과 사각형을 다루면서 이등변삼각형의 성질에 대해 다루고 있다. 이등변삼각형의 성질 중에는 선분의 수직이등분선과 관련된 사항이 있다. 선분의 수직이등분선은 반대로 이등변삼각형과 관련지어 설명할 수 있다. 이러한 이등변삼각형의 성질들을 활용하여 여러 가지 삼각형과 사각형의 성질들을 파악하고 이를 논리적으로 설명

하는 학습이 이루어진다.

이와 같은 논증 방법은 중학교 2학년 기하 영역의 교과서에서 제시하고 있는 전형적인 틀이 되고 있으므로, 본 연구에서는 그 내용이 아주 분명하고 간단해서 이러한 내용을 안다는 것은 그 근거를 아는 것을 수반해야 할 정도의 내용들로 선정하여 내용 지식 분석을 위한 문항으로 설문지와 검사지를 구성하였다.

1) 설문 조사

본 연구에서는 중학교 기하 영역에서 필수 내용이 되고 있는 이등변삼각형의 여러 가지 성질을 알고 있는지에 대한 질문을 설문 내용으로 구성하였다. 이러한 설문 조사를 통해 기초적인 기하 내용들에 대해 교사들이 어떠한 내용들을 ‘알고 있다’고 인지하고 있는지를 먼저 파악하고자 하였다.

(1) 설문 조사의 목적

중학교에서 다루는 기하 내용은 많은 부분이 직관적으로 파악될 수 있는 내용으로 구성되어 있다. 따라서 직관적으로 이해가 가능한 대다수의 내용을 친숙하게 생각할 수 있으며 이러한 것을 ‘안다’ 혹은 그 내용을 ‘이해한다’고 여길 수도 있다. 그러나 어떤 기하학적 사실에 친숙한 정도는 반드시 그 사실에 대한 정확한 이해 정도와 비례하지는 않을 수도 있다. 본 연구에서 실시한 설문 조사의 목적은 실제로 아는 것 혹은 이해하는 것에 반해 ‘안다’ 혹은 ‘이해한다’라고 생각하는 친숙도의 정도는 어느 정도인지를 파악하기 위하여 실시하였다.

(2) 설문 내용 및 선정 기준

중학교 기하영역에서 주요하게 활용되는 기본적인 내용으로서 다각형을 포함한 여러 도형들의 성질을 설명하는 데에 활용되고 있는 이등변삼각형의 성질은 먼저 다음과 같은 두 가지를 언급할 수 있다.

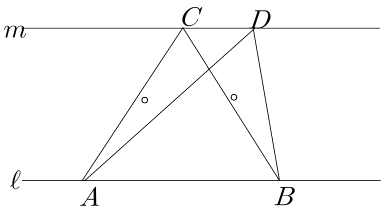
- 이등변삼각형의 두 밑각은 서로 같고, 두 각이 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.
- 이등변삼각형에서, 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분하고, 역으로 밑변의 수직이등분선은 꼭지각을 이등분한다.

본 연구에서는 위와 같은 기하 내용을 활용한 성질들에 대해 교사들이 얼마나 알고 있다고 생각하고 있는지를 파악하기 위하여 다음과 같은 다섯 가지 내용을 설문 내용으로 작성하여 실시하였다:

- 선분의 수직이등분선 작도를 알고 있는가,
- 원의 접선의 정의와 원 위의 한 점에서 반지름에 수직인 직선은 접선이 된다는 사실을 알고 있는가,
- 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지난다는 사실을 알고 있는가,

- 삼각형에서 $\angle B < \angle C$ 이면 $\overline{AC} < \overline{AB}$임을 알고 있는가,

- 오른쪽 그림과 같은 직선과 삼각형에서 ℓ은 A와 B를 지나고, m은 C와 D를 지날 때, ℓ과 m이 평행이고 $AC = BC$이고 $C \neq D$이면 $\angle ACB > \angle ADB$ 라는 것을 알고 있는가를 질문하였다.

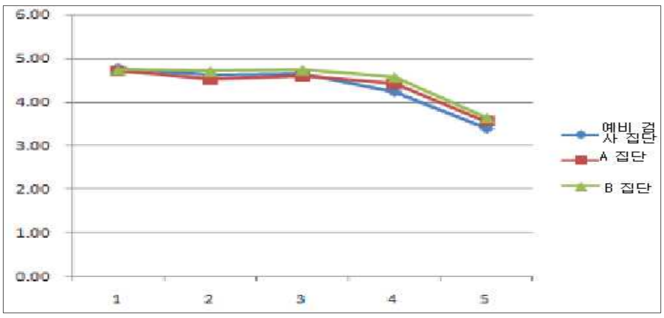


(3) 설문지 구성

설문지는 모두 5개 문항으로 이루어졌으며, 각 문항마다 '전혀 모른다, 잘 모른다, 애매하다, 안다, 확실히 안다'의 5점 척도로 제시되었다. 본 연구에서는 이에 대한 응답 점수를 그 문항 내용에 대한 '친숙도'라 부르기로 한다.

(4) 설문 조사의 결과

설문 조사는 예비 검사나 본 검사 모두 동일한 문항들을 사용하였다. 이에 대한 결과로서 교사군 사이의 성향을 비교해 본 결과는 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 세 집단의 설문 조사 결과

위 그림에서 나타나듯이 설문지에 대한 결과는 3개 교사 집단이 거의 동일한 특성을 지니고 있음을 보여주고 있다. 따라서 설문지 내용에 제시된 명제 내용에 친숙도는 교사 집단에 따라 차이가 없다고 해석해도 될 것이다.

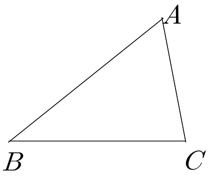
2. 기하 영역 이해도 파악을 위한 검사지

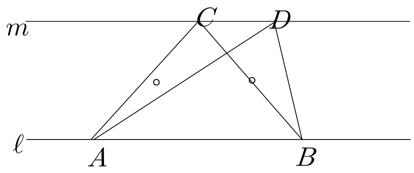
1) 예비 검사를 위한 검사지 내용 및 선정 기준

예비 검사에서는 이등변삼각형의 성질에 관련된 몇 가지 수학 명제를 제시하고 이를 적절한 기술 방법과 논증을 동원하여 설명할 수 있는가를 묻는 문항으로 구성하고자 하였다. 따라서 이를 위하여 설문 조사에 사용된 내용을 그대로 문제로 바꾸어 제시하였다. 검사지에 대한 채점은 한 문항을 5점 만점으로 배정하였고, 문항1과 문항2는 내용을 설명하고 증명할 것을 요구했기 때문에 각각 2개씩의 소 문항으로 나누어 채점하였다. 본 연구에서는 주어진 문항에 대해 이해한 정도를 파악하는 것이 목적이므로 각 문항별 득점을 그 문항의 내용에 대한 ‘이해도’라 부르기로 한다.

검사지는 이미 널리 알려진 명제들이어서 교사들에게 친숙한 내용이지만 정말 이해하고 있는가를 파악할 수 있도록 발문을 구성하였다. 다시 말하면, 주어진 명제가 참임을 전형적인 논증 방법으로 기술하도록 제시함으로써 교사의 명제에 대한 친숙도가 이에 대한 로고스를 설명할 수 있는 수준으로서의 ‘앎’과 일치하는지를 파악하고자 선정한 문제이다.

1) 선분의 수직이등분선을 작도하는 법을 설명하고 증명하라.
2) 원의 접선을 정의하고, 원 위의 한 점에서 반지름에 수직인 직선은 접선이 됨을 증명하라.
3) 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지남을 증명하라.
4) 그림과 같은 삼각형에서 $\angle B < \angle C$ 이면 $\overline{AC} < \overline{AB}$임을 보여라.
5) 그림과 같은 직선과 삼각형에서 ℓ은 A와 B를 지나고, m은 C와 D를 지날 때, ℓ과 m이 평행이고 $AC = BC$이고 $C \neq D$이면 $\angle ACB > \angle ADB$임을 보여라.





2) 예비 검사 결과

예비 검사에서 교사 18명을 대상으로 실시한 검사지에 대한 채점 결과는 아래와 같다. 아래 표에서 나타나듯이 설문결과에서 나타난 친숙도는 문항 5를 제외하고는 모두 높은 반면 이에 대한 성질을 설명하는 문항에 대한 평가 결과는 모든 문항에서 상당히 낮은 점수를 보이고 있는데, 문항 4와 5는 특히 낮은 이해도를 보이고 있다.

<표 Ⅲ-1> 예비 검사 결과

	문항 1		문항 2		문항 3	문항 4	문항 5	합계
설문 결과	4.77		4.63		4.66	4.23	3.40	21.70
검사 결과	4.74	1.37	3.89	1.77	2.66	1.23	0.40	10.20

3. 본 검사지 내용 및 선정 기준

본 검사에서 사용한 검사지는 설문지에서 사용한 명제들에 대한 이해도를 측정하기 위하여 설문지에서 다룬 명제들을 증명해 보도록 발문을 구성하였다. 단지, 예비 검사 결과에 따라 난이도를 조정하기 위하여 문항의 조직 순서와 발문을 수정하였다. 다시 말하면, 먼저, 예비 검사지의 문항 1, 2의 증명은 증명의 단계와 기호를 제시하면 증명이 보다 용이해질 수 있기 때문에 문항에 대한 징검다리 역할을 할 수 있는 힌트를 제공하는 문항으로 바꾸었다.

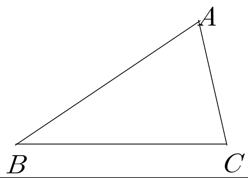
1~2). 직선 ℓ은 선분 AB의 수직이등분선이다.
1) P가 직선 ℓ 위의 임의의 점일 때, $AP=BP$임을 증명하라.
2) 점 Q가 $AQ=BQ$를 만족하면 Q는 직선 ℓ 위에 있음을 증명하라.

또한 예비 검사지의 3번 문항 역시 문항에 대한 힌트를 제공하여 다음과 같이 수정함으로써 보다 쉽게 접근 할 수 있도록 하였다.

3). (1)을 이용하여 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지남을 증명하라.

예비 검사지 문항 4의 ‘삼각형에서 큰 각에 대응하는 변이 크다’는 사실에 대한 증명은 검사에 참여한 교사들 대부분이 실마리조차 잡지 못함으로써 이해도가 아주 낮은 1.23이라는 결과가 나왔다. 따라서 본 검사에서는 이를 보다 쉽게 접근할 수 있도록 주어진 명제와 역명제인 관계에 있으나 서로 동치인 ‘삼각형에서 큰 변에 대응하는 각이 크다’는 명제를 먼저 제시하였다. 이러한 명제를 제공함으로써 원래 주어진 명제의 증명의 실마리를 잡기가 상대적으로 용이할 수 있기 때문이다.

4~5). 오른쪽 그림과 같은 삼각형 ABC에서
4) $\overline{AC}<\overline{AB}$이면 $\angle B<\angle C$임을 보여라
5) 4)를 이용하여, $\angle B<\angle C$이면
$\overline{AC}<\overline{AB}$임을 보여라



마지막으로, 예비 검사지의 문항 5는 평가 점수가 0.40으로 너무나 낮은 이해도를 보이고 있어서 분석에 의미가 없다고 판정하여 본 검사지에서는 제외시켰다.

Ⅳ. 연구 결과 분석

1. 설문지 및 검사지 결과 분석

본 검사에서 사용한 설문지와 검사지의 문항들은 중학교 2학년과 3학년 기하 영역에서 각

과 선분의 수직이등분선, 이등변삼각형, 그리고 원에 관한 기본적인 내용 중에 친숙도가 높은 것들로 구성하였다. 검사지의 1~3번은 선분의 수직이등분선과 관련된 내용으로 이루어진 문항이며, 특히 3번은 원에 관한 기본적인 사항들을 이용하여 해결하는 문항이다.

또한 4번 문항은 삼각형에서 변과 각에 관한 관계를 묻는 내용으로서 이에 대한 명제를 설명할 수 있도록 4번에서는 보조선 등을 이용하여 해결 할 수 있도록 하고 그 다음 5)번에서 더 큰 각의 마주 보는 변이 더 길다는 것을 설명할 수 있도록 단계별로 제시하였다.

이에 대한 A 집단과 B 집단 모두에게 본 검사지로 실시한 분석 결과는 <표 Ⅳ-1>에 제시하였다.

<표 Ⅳ-1> 설문지(친숙도)와 검사지(이해도)에 대한 결과 분석

		문항1	문항2	문항3	문항4	문항5	평균
A 집단	설문지	4.71	4.52	4.58	4.42	3.55	4.36
	검사지	4.00	3.39	2.90	2.03	1.13	2.69
B 집단	설문지	4.73	4.70	4.73	4.57	3.63	4.47
	검사지	4.33	3.33	3.17	3.30	1.50	3.13

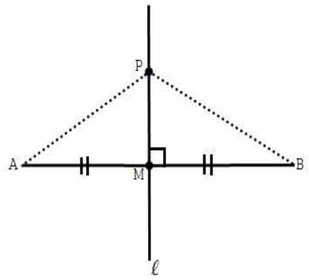
본 검사지에 제시된 문항들은 중학교 2학년과 3학년의 기본적인 기하 영역의 명제로서 검사에 참가한 교사들 대부분 친숙할 수밖에 없는 내용들이다. 따라서 친숙도에 대한 검사인 설문 조사 결과가 A 집단과 B 집단의 평균이 각각 4.36, 4.47로 높게 나오는 것은 어찌 보면 당연한 결과이다. 반면, 높은 친숙도의 결과에 반해 이해도의 평균은 2.69, 3.13에 그쳐, 교사들이 본인이 알고 있다고 인식하는 것과 이에 대해 논리적으로 설명할 수 있는 능력에는 많은 차이가 나타남을 알 수 있다.

문항별 친숙도와 이해도의 차이에서 볼 수 있듯이 문항 1번을 제외하고는 본인이 ‘안다’라고 생각한 친숙도와 그 명제에 대해 실제로 그 이유를 설명할 수 있는 수준인 이해도와는 큰 차이가 나타남을 알 수 있다. 특히 문항 5번은 A 집단과 B 집단에서 모두 친숙도와 이해도에서 예비 검사에서와 마찬가지로 여전히 큰 차이가 나타남을 알 수 있다. 다만, 예비검사에서 3점의 차이가 나타난 것에 비해 본 검사에서는 그 차이가 줄었는데, 그 이유는 문항을 단계별로 제시함으로 인하여 앞의 명제를 힌트로 하여 해결할 수 있었던 것으로 보인다. 이는 향후 교사 교육이나 학생들의 증명 교육에 있어서 시사점을 제공할 수 있으리라 여겨진다.

2. 검사지에 대한 반응 사례 분석

본 절에서는 검사지에 대한 개인적인 답안지들에 대한 분석을 시도하고자 한다. 편의상 A, B집단의 답안지들을 각각 #A와 #B로 표기하고 이를 답안지의 순서대로 번호를 매겼다. 먼저, 문제 1과 문제 2는 선분의 수직이등분선과 관련된 내용으로 이루어진 문항이며, 문제 3을 증명할 때 필요한 단계들로 나누어 놓은 것이다. 먼저, P가 직선 ℓ 위의 임의의 점일 때, $\overline{AP}=\overline{BP}$임을 보이기 위해서는 우선, $\overline{AB}$와 ℓ의 교점을 M이라 하면 $\overline{AM}=\overline{BM}$,

$\angle AMP = \angle BMP = \angle R$, $\overline{MP}$는 공통이므로 $\triangle AMP$와 $\triangle BMP$는 합동이고(SAS), 따라서 $\overline{AP} = \overline{BP}$이 성립함을 보일 수 있다.

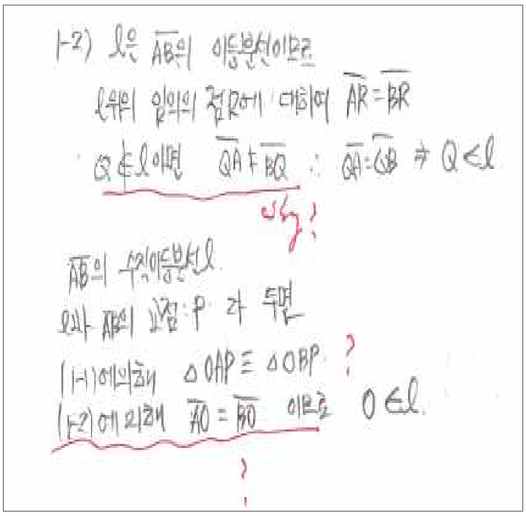


즉, 삼각형의 SAS합동조건을 사용하면 쉽게 증명되는 문제 1은 교사들 대다수가 올바른 증명을 제시했다. 그러나 답안지 <#A:3>, <#A:29>, <#B:2>처럼 그림으로는 거의 자명한 이 사실을 어떻게 논증해야 할지 실마리를 잡지 못하는 경우도 있고, <#A:14>, <#A:22>, <#B:1>처럼 합동조건이 RHS라고 착각하는 결과적으로는 결론을 가정해 버린 경우도 있었다.

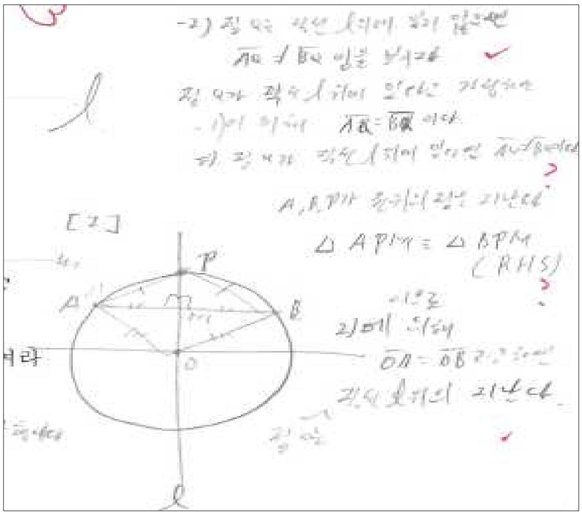
문제 2에서 점 Q가 $\overline{AQ} = \overline{BQ}$를 만족하면 Q는 직선 ℓ 위에 있음을 보이기 위해서는 우선, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$라고 하면, $\overline{AM} = \overline{BM}$이고 $\overline{MQ}$는 공통이므로 $\triangle AMQ$와 $\triangle BMQ$는 합동이다(SSS). 그래서 $\angle AMQ = \angle BMQ = \angle R$이고 $\overleftrightarrow{MQ}$는 $\overline{AB}$의 수직이등분선이다. 따라서 $\overleftrightarrow{MQ} = \ell$이고, Q는 ℓ 위에 있다는 것을 설명할 수 있다. 즉, $\triangle AMQ$와 $\triangle BMQ$ 사이에 SSS조건에 의한 합동을 보이면 직선 MQ가 선분 AB의 수직이등분선이 되고, 수직이등분선이 유일하므로 $\ell = \overleftrightarrow{MQ}$가 되어 증명이 완결된다.

A집단 교사들은 0점에서 5점에 이르는 다양한 수준의 답안을 제시한 반면, B집단 교사들은 0점과 5점 이외에 좌표를 사용하여 해석기하적으로 답안을 작성한 경우가 있다.

문항에 대한 답안지를 살펴보면, <#B:1>, <#B:2>, <#B:20>은 전혀 실마리를 잡지 못하고 답을 제시 못하는 경우도 있다. 또한 오개념을 보이는 답안지들이 있는데, [그림 Ⅳ-1]에서 제시하듯이 답안지 <#A:15>와 <#A:37>은 중요단계를 증명하지 않았거나 불분명한 답변을



[그림 Ⅳ-1] 중요단계가 증명되어 있지 않은 답안 예시

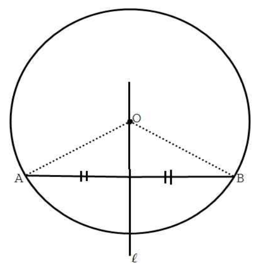


[그림 Ⅳ-2] 명제가 참이면, 그것의 이명제도 참이라는 오류

하였다. [그림 Ⅳ-2]에서 보이는 바와 같이 답안지 <#A:33>은 Q가 ℓ 위에 있지 않다면 $\overline{AQ} \neq \overline{BQ}$라고 생각하고 있다. 이는 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때 그것의 이명제인 $\sim p \rightarrow \sim q$도 참이라고 생각하는 것인데 이는 옳지 않다. 그 외 답안지 <#B:8>, <#B:13>에서는 좌표를 이

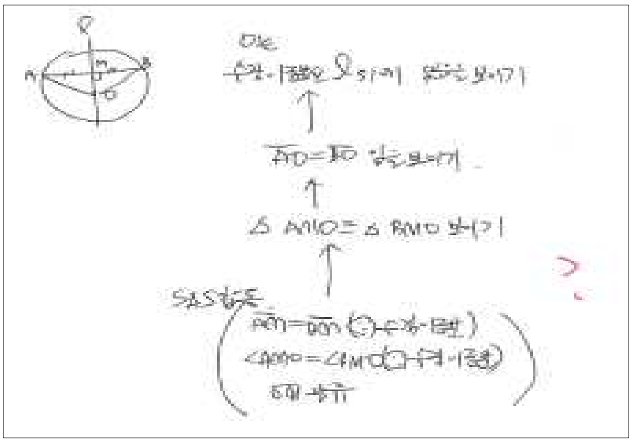
용하기도 하였다. 이다.

원에 관한 기본적인 사항들을 이용하여 해결하는 문항으로서 현의 수직이등분선은 원의 중심을 지남을 증명하는 문제 3은 직선 ℓ을 원 O의 현 AB의 수직이등분선이라 하면, $\overline{AO}$와 $\overline{BO}$가 원 O의 반지름이므로 $\overline{AO}=\overline{BO}$이다. 그러면 문제 1과 2에 의해 O는 ℓ 위에 있다. 즉 ℓ은 O를 지남을 설명할 수 있다.



문제 3의 증명은 문제 2를 이용하여 증명하는 것인데, 내적요소들의 관련성에 의해 증명하는 문제 1과는 달리 명제들 사이의 외적 관련성을 고려해야 하기 때문에 좀 더 증명기술의 숙련을 요한다.

문제 3은 A집단과 B집단의 교사 다수의 답안이 정답을 제시하고 있다. 그러나 답안지 <#A:2>, <#A:3>, <#A:28>, <#B:2>, <#B:9>, <#B:28> 등은 실마리를 잡지 못하고 답안을 제시 못하고 있다. 또한 답안지 <#A:1>, <#A:15>, <#B:5>는 문제 2를 제대로 사용하지 못하는 경우도 있다. 그 외 <#A:30>은 증명은 맞으나 문제 2를 사용하지 않았고, <#B:34>는 [그림 Ⅳ-3]에서와 같이 가정에 이미 결론이 포함되어 있는 오개념을 보이고 있다.



[그림 Ⅳ-3] 가정에 이미 결론이 포함되어 있는 답안

삼각형에서 변과 각에 관한 관계를 묻는 내용으로 직관적으로 이해할 수 있는 내용을 증명을 통해 명제를 설명할 수 있도록 문제 4에서 보조선 등을 이용하여 해결 할 수 있도록 하고 그 다음 문제 5에서 더 큰 각의 마주 보는 변이 더 길다는 것을 설명할 수 있도록 문항을 단계별로 제시하였다.

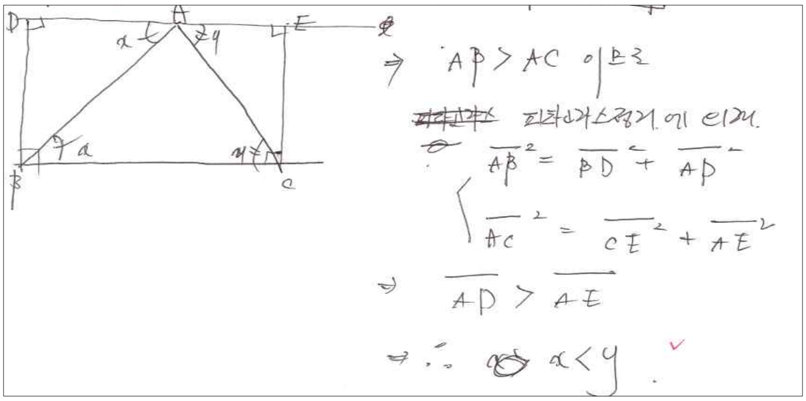
삼각형 ABC에서 변 AB가 변 AC보다 더 길다고 하였을 때, 각 ACB가 각 ABC보다 더 큼을 보여야 한다. 이는 선분 AB가 선분AC보다 더 길기 때문에 쉽게 $\overline{AC}$와 길이가 같도록 $\overline{AD}$를 잡을 수 있다. 그 다음 중학교 기하 영역의 학습 내용 중 가장 난해하면서도 중요한 문제풀이 전략으로 활용되고 있는 보조선을 활용하여 직선 CD를 그을 수 있다. 이 때, 각 BDC는 삼각형 ACD의 외각이므로, 다른 내각 ADC보다 더 크다는 것을 공리적으로 접근 할 수 있다. 또한 여기서 변 AD는 변 AC와 길이가 같으므로 각 ADC는 각 ACD와 크기가 같다는 것을 알 수 있으므로 결론적으로 각 ACD는 각 ABC보다 더 크다

는 것을 어렵지 않게 논증해 낼 수 있는 것이다.

따라서 문제 4번의 증명은 $\overline{AC}<\overline{AB}$라고 하고 변 AB 위에 $\overline{AD}=\overline{AC}$가 되는 점 D를 잡으면 $\triangle ADC$는 이등변삼각형이므로 $\angle ADC=\angle ACD$이다. 그런데, $\angle B=\angle DBC<\angle DBC+\angle DCB=\angle ADC$이고 $\angle ACD<\angle ACB=\angle C$이므로, 따라서 $\angle B<\angle C$임을 보일 수 있다.

마지막으로 문제 5의 증명은 $\angle B<\angle C$라고 하면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이 아니므로 $\overline{AB}\neq\overline{AC}$이다. 만약 $\overline{AB}<\overline{AC}$이면 문제 4의 논리에 의해 $\angle C<\angle B$인데 이는 가정에 모순된다. 따라서 $\overline{AC}<\overline{AB}$가 성립함을 설명할 수 있다.

문제 4, 5는 예비 검사지 문항 4번에 해당되는 문제이나, 변의 길이 사이에 크기 관계가 주어져서 다루기가 더 용이한 명제로 바꾸었던 것이다. 문제 4번과 5번에 대한 두 집단의 평균점수는 각각 (2.03, 1.13)과 (3.23, 1.63)로 저조한 점수를 보였다. 문제 5는 문제 4에서 제시된 명제와의 외적 관련성을 고려해야 하기 때문에 증명의 기술이 필요하다. 그러나 예비 문항 4번 형태로 제시하였을 때에는 정답이 전혀 없었으나, 문제 4번과 같이 제시한 것에 대해서는 A집단에서 3명 그리고 B집단에서 11명이 정답을 제시했다. 또한 답안지 <#B:14>과 같이 문제 4와 5번 모두 모범답안과 같은 답안을 제시한 경우도 있으며, <#B:27>, <#B:29>, <#B:35> 등과 같이 문제 4에 대해 모범답안과 같은 답안을 제시한 경우도 있다. 그러나 다수의 답안이 사인정리를 사용하고 있다. 또한 문제 4에 대해서는 다수의 별해도 있었는데, 이는 답안지 <#A:17>, <#A:31>, <#B:11>, <#B:12>, <#B:21>, <#B:28>, <#B:36> 등이다. 그리고 [그림 Ⅳ-4] 에서와 같이 답안지 <#B:31>는 특이한 해를 보여주기도 하였다.



[그림 Ⅳ-4] 문제 4번의 특이한 정답해

마지막으로 문제 5에 대해서는 A집단에서 1명, B집단에서는 5명이 정답을 제시하고 있다. 그러나 답안지 <#A:1>, <#A:3>, <#A:15>, <#B:5>, <#B:9>, <#B:24> 등은 시도조차 하지 못했으며, <#A:5>, <#A:8>, <#A:16>, <#B:4>, <#B:25>, <#B:33> 등은 사인정리를 이용하였다.

Ⅴ. 나오는 말

Ball 외(2001)는 교사의 지식의 중요성을 말하면서, 교사가 가지고 있는 지식의 수준은 수업 외적인 요인과는 다르게 수학 교수-학습에 직접적인 영향을 끼칠 수 있다고 하였다. 이는 효과적인 교수를 위해 풍부한 교사의 지식이 요구되고 있다는 것이다.

본 연구는 기하 영역에 대한 교사들의 SCK를 파악하기 위한 한 방법으로 '안다'라고 생각하는 친숙도를 알아보기 위하여 설문지를 구성하였고, 그것의 이유와 근거를 논리적으로 설명할 수 있는 이해도, 즉 그 명제를 정말로 알고 있는가를 측정하고자 검사지를 구성하였다.

이등변삼각형의 성질은 다각형을 포함한 평면기하의 여러 가지 사항들을 설명하는 데에 기본적으로 이용된다. 본 연구에서의 설문지과 검사지의 문항들은 중학교 2학년과 3학년 기하 부분에서 각, 선분의 수직이등분선, 이등변삼각형, 그리고 원에 관한 기본적인 내용 중에서 친숙도가 높은 것들로 구성하였다.

우리나라 중학교 기하 영역은 어떤 명제를 타당하게 설명하도록 하는 것이 전형적인 틀이 되고 있으므로 이를 지도하는 중등교사들은 증명에 의한 방법을 도입하여 중학교 기하 명제에 대해 타당하게 설명할 수 있어야 할 것이다. 그러나 본 연구에서 나타난 결과는, 대부분의 교사들은 전반적으로 친숙도에 비해 이해도가 떨어진다고 볼 수 있다. 즉, 익숙하게 생각하는 명제를 안다라고 생각하지만 실제로 아는 것과는 상당한 차이가 나타남을 알 수 있다. 이는 예비교사 교육이나 교사의 재교육 과정에서의 논증교육에 대한 커리큘럼과 교육의 방향을 생각해봐야 하는 결과라 할 수 있다.

또한 검사지에 대한 반응 사례 분석에서 도출된 또 다른 시사점을 제시하면 다음과 같다.

먼저, 예비 검사지에서 대부분의 교사가 전혀 실마리를 찾지 못하는 문제에 대해 본 검사에서는 증명의 단계를 나누어 검사지를 제시하였다. 그 결과 상당수의 교사들이 그 증명과정을 상당한 정도로 수행할 수 있음을 보여주었다. 이는 향후 보다 체계적인 증명 훈련 교육 단계에서의 전략적 사고 교육의 방법으로 활용해 볼 수 있을 것이다.

두 번째, 본 연구에서 제시한 검사지에서와 같이 주어진 사실의 증명이 동치적인 다른 사실의 증명을 필요로 할 때, 대부분의 교사들이 명제의 증명에 있어서 상당히 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 따라서 어떤 명제에서 사실들 사이의 관계를 파악하고 이를 논증에 활용할 수 있는 체계적인 증명 교육이 필요하다.

세 번째, 검사지의 5번 문항에 대한 다수의 답안이 사인정리를 이용하고 있음이 나타났는데, 이는 도형의 시각적인 직접 정보를 파악해서 활용하지 못하고, 그 도형에 관한 암기된 지식에 의존하여 문제를 해결하는 경향을 보여 주는 것이라고도 해석할 수 있다. 기하교육의 교육적 목적과 목표를 단편적인 지식을 적용하기보다 도형의 성질을 직관적으로 파악하고 이를 활용하는 것에 보다 초점을 두고 있다는 것을 상정해 볼 때 현재의 기하 교육이 이러한 교육 목표에 대한 충실한 교육적 활동이 이루어지고 있는지에 대한 반성적 고찰이 이루어져야 할 필요가 있다.

마지막으로 위와 같이 기하의 논증 교육에서 교사의 수학적 지식의 중요성은 강하게 요구되고 있지만, 교사 교육 부분에서 이에 대한 지식을 향상시키기 위한 교수 내용의 본질에 대한 이해나 수학적 지식을 효과적으로 발전시킬 수 있는 방법에 대한 연구는 아직 부족하다고 할 수 있다. 따라서 이에 대한 꾸준한 관심과 지속적인 연구가 뒤따라야 할 것이다.

참고 문헌

고상숙・장훈(2005). 수학교사들의 내용지식이 학생들의 기하 평가에 미치는 영향. 수학교육논문집, 19(2), 445-452.

곽주철・류희수(2008).평면도형에 대한 교사의 PCK와 수업 실제의 비교 분석. 학교수학, 10(3), 423-441.

강영란・조정수・김진환 (2012). 분수 나눗셈의 문장제에 대한 초등 교사들의 전문화된 내용지식(SCK) 분석. 수학교육논문집, 26(3), 301-316.

김유경・방정숙(2012). 초등학교 수학 수업에 나타난 초임교사의 교수학적 내용 지식 분석. 한국학교수학회논문집, 15(1), 27-51.

신보미(2008). 확률에 대한 교사의 교수학적 내용 지식 분석. 학교수학, 10(3), 463-487

이현욱(2004). 교과서 지식의 인식론적 한계와 대안 탐색. 교육학연구, 42(1), 257-275.

조완영(2011) 중등 수학교사의 수학내용 지식. 학교수학, 13(2), 345-362.

황혜정(2010). 교과 내용 지식(SMK)에 초점을 둔 수학 수업평가 기준 고찰. 한국학교수학회논문집, 13(1), 45-67.

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge*. In V. Richardson (Ed.), Handbook of research on teaching. New York: Mcmillan.

Ball, D. L., Hill, H. C. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43-46.

Hill, H. C., Ball, D.& Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge : Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39(4), 372-400.

Shulman, L. S.(1987). Knowledge and Teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Analysis of teacher's cognitive knowledge about the middle school geometry

Ha, Young Hwa[3)] Ko, Ho Kyoung[4)]

Abstract

This study, as part of the research on mathematics teacher knowledge analyzed the differences in understanding and familiarity on geometric knowledge of middle-high school teachers. Through this study, survey was carried out using a questionnaire and examination for 80 middle-high school teachers. As the result, differences between familiarities about believing in knowing about the proposition, and actually understanding why the proposition is established, was big. These results can provide us implications on the education of teachers and pre-service teachers of middle-high school.

Key Words : Content Knowledge, Cognitive Knowledge, Geometry

3) Ajou university (yhha@ajou.ac.kr)
4) Ajou university (kohoh@ajou.ac.kr)