

# 모서리 경계조건을 만족하는 접지된 2개 유전체층 위의 도체띠 격자구조에 의한 TE 산란의 해

## Solution of TE Scattering by a Conductive Strip Grating Over the Grounded Two Dielectric Layers with Edge Boundary Condition

윤의중\*

Uei-Joong Yoon\*

### 요 약

본 논문에서는 모서리 경계조건을 만족하는 접지된 2개의 유전체층 위의 완전도체띠 격자구조에 의한 TE (Transverse Electric) 산란 문제를 수치해석 방법인 FGMM (Fourier Galerkin Moment Method)를 이용하여 해석하였다. TE 산란에 대하여 유도되는 표면 전류밀도는 스트립 양 끝에서 0의 값이 기대되며, 이때 도체띠에 유도되는 표면 전류밀도는 2종 Chebyshev 다항식과 적절한 모서리 경계조건을 만족하는 함수의 곱의 급수로 전개하였다. 수치결과들은 기존 논문들과 비교하여 급속한 수렴해와 좋은 일치율을 보였다.

### Abstract

In this paper, the TE (Transverse Electric) scattering problems by a perfectly conducting strip grating over a grounded two dielectric layers with edge boundary condition are analyzed by applying the FGMM (Fourier Galerkin Moment Method). For the TE scattering problem, the induced surface current density is expected to the zero value at both edges of the strip, then the induced surface current density on the strip is expanded in a series of the multiplication of the Chebyshev polynomials of the second kind and the functions of appropriate edge boundary condition. The numerical results shown the fast convergent solution and good agreement compared to those of the existing papers.

Key words : TE scattering, Chebyshev polynomials of the second kind, Edge boundary condition, FGMM.

### I. 서 론

격자구조 (Strip Grating)에 의한 산란문제는 광학, 필터, 레이더, 안테나 및 전자기학의 이론 및 응용분야에서 널리 이용되어 왔으며, 격자구조에 대한 반사나 투과 현상을 취급하기 위해서 여러 연구자들에 의

해서 많은 관심을 가져왔다 [1]-[9]. 격자구조에 도체를 사용한 기본 문제로서 Richmond [2]는 자유공간상에서 스트립에 유도되는 미지의 유도전류를 간단히 Fourier 급수로 전개하여 FGMM (Fourier Galerkin Moment Method)을 이용하여 수치해석하였으며, 자유공간상에서 저항띠를 가진 경우는 파수영역에서

\* 가천대학교 의공학과(Dept. of Biomedical Engineering, Gachon University)

· 제1저자 (First Author) : 윤의중(Uei-Joong Yoon), Tel : +82-32-820-4252, email : [ujyoon@gachon.ac.kr](mailto:ujyoon@gachon.ac.kr) )

· 접수일자 : 2012년 10월 26일 · 심사(수정)일자 : 2012년 10월 26일 (수정일자 : 2013년 4월 18일) · 게재일자 : 2013년 4월 30일

<http://dx.doi.org/10.12673/jkoni.2013.17.2.183>

SGMM (Spectral Galerkin Moment Method)을 이용하여 수치해석하였다 [3]. 또한 도체띠 (Conductive Strip) 격자구조에 의한 산란 문제에 대해 유전체 접지층 위에 도체띠를 가지는 경우에 대해 수치방법중의 하나인 PMM (Point Matching Method)을 이용하여 수치 계산하였으며 [4], 그 후 저항띠 문제를 FGMM을 이용하여 수치해석한 바 있다 [5].

TE (Transverse Electric)산란 문제를 취급함에 있어, 저항띠에 유도되는 전류밀도를 sine 함수와 cosine 함수로 나누어 수치해석하였으며 [6], 그 후 전류밀도를 간단한 지수함수를 사용하여 접지된 1개의 유전체 층의 문제와 접지된 2개의 유전체 층위의 문제 [7]-[9] 를 수치해석한 바 있다.

본 논문에서는 TE 산란문제의 경우 접지된 2개의 유전체 층위에 매우 얇은 완전도체띠가 주기적으로 배열되어 있을 때, 도체띠의 양끝에서 전류밀도의 크기가 0의 값이 예측되므로 전류밀도를 모서리 경계 조건을 만족하는 함수와 2중 Chebyshev 다항식의 곱의 급수로 전개하고자 한다.

II. 문제의 구조에 대한 전자계 해석

그림 1에서 TE 평면파 (Plane Wave)가 가장자리에 나란하게  $\phi$ 의 각도로 비스듬히 입사하고, 접지된 2개의 유전체 층위에 도체 띠가  $y$ 방향으로 무한하며, 도체띠 격자는  $x-y$ 평면상에 있고  $x$ 방향으로 주기적으로 배열되어 있다. 또한 영역-1과 2의 비유전율은  $\epsilon_{r1}$  및  $\epsilon_{r2}$  [F/m], 스트립 주기  $s$ , 스트립 폭  $w$ ,  $h$ 는 스트립폭의 반 ( $h= w/2$ ), 영역-1과 2의 유전체 두께는  $t_1$  및  $t_2$ , 전체 두께  $t = t_1 + t_2$ 로서 단위는 파장  $[\lambda]$ 이다. 이때 영역-0에서 입사 자계  $\overline{H}^i$ 와 입사 전계  $\overline{E}^i$ 는 다음과 같다 [9].

$$\overline{H}^i = \hat{a}_y H_0 e^{-jk_0 x \sin \phi} e^{jk_0 z \cos \phi} \quad (1)$$

$$\overline{E}^i = -(\hat{a}_x \cos \phi + \hat{a}_z \sin \phi) \cdot \frac{H_0}{\omega \epsilon_0} k_0 e^{-jk_0 x \sin \phi} e^{jk_0 z \cos \phi} \quad (2)$$

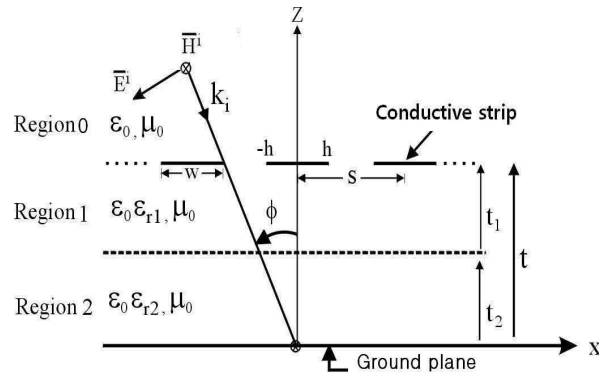


그림 1. 문제의 구조  
Fig. 1. Structure of the problem

식 (1)과 (2)에서  $\hat{a}_x, \hat{a}_y$  및  $\hat{a}_z$ 는  $x, y$  및  $z$  방향의 단위벡터를 의미하며, 전파상수  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ , 고 유임피이던스  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$ ,  $\mu_0$ 와  $\epsilon_0$ 는 자유공간의 투자율 및 유전율,  $H_0$ 는 입사자계의 진폭으로 크기는 1로 정규화하고 수식전개시 생략한다. 영역-0에서의 산란자계  $\overline{H}^s$ 와 산란전계  $\overline{E}^s$ 는 평면파의 합으로 다음과 같이 표현할 수 있다 [9].

$$\overline{H}^s = \hat{a}_y e^{-jk_0 x \sin \phi} \sum_n A_n e^{-j\gamma_n(z-t)} e^{-j2n\pi x/s} \quad (3)$$

$$\overline{E}^s = \hat{a}_x \frac{e^{-jk_0 x \sin \phi}}{\omega \epsilon_0} \sum_n A_n \gamma_n e^{-j\gamma_n(z-t)} e^{-j2n\pi x/s} \quad (4)$$

여기서  $A_n$ 은 구해야 할 미지의 계수,  $\beta_n = k_0 \sin \phi + 2n\pi/s$ ,  $\gamma_n$ 는 자유공간상의 전파 모드 (Propagation Mode)와 감쇠모드 (Evanescent Mode)로 구분하여 다음과 같이 표시할 수 있다 [9].

$$\gamma_n = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \beta_n^2}, & k_0^2 \geq \beta_n^2 \\ -j \sqrt{\beta_n^2 - k_0^2}, & k_0^2 < \beta_n^2 \end{cases} \quad (5)$$

영역-1과 영역-2의 접선성분의 전체 자계  $\overline{H}_t^i$ 와

전계  $\overline{E}_i^t$ 는 미지의 급수들의 합으로 표현할 수 있다.

$$\overline{H}_i^t = \hat{a}_y e^{-jk_0 x \sin \phi} \sum_n \cdot \quad (6)$$

$$(B_{ni} e^{-j\eta_{ni} x} + C_{ni} e^{j\eta_{ni} x}) e^{-j2n\pi x/s}$$

$$\overline{E}_i^t = -\hat{a}_x \frac{e^{-jk_0 x \sin \phi}}{\omega \epsilon_0 \epsilon_{ri}} \sum_n \eta_{ni} \cdot \quad (7)$$

$$(B_{ni} e^{-j\eta_{ni} x} - C_{ni} e^{j\eta_{ni} x}) e^{j2n\pi x/s}$$

식 (6)과 식 (7)에서  $i$ 는 유전체 영역-1과 2를 의미하며,  $B_{ni}$ 와  $C_{ni}$ 는 구해야 할 미지의 계수,  $\eta_{ni}$ 는 다음과 같이 유전체 층에서 2가지 모드로 구분하여 표시할 수 있다.

$$\eta_{ni} = \begin{cases} \sqrt{k_i^2 - \beta_n^2}, k_i^2 \geq \beta_n^2 \\ -j \sqrt{\beta_n^2 - k_i^2}, k_i^2 < \beta_n^2 \end{cases}, i = 1, 2 \quad (8)$$

식 (8)에서  $k_i = w \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ri}} = k_0 \sqrt{\epsilon_{ri}}$ ,  $i$ 는 유전체 영역-1과 2를 의미한다. 그리고  $z=0$ 인 접지평면에서 접선성분의 전체전계는 사라져야 하며, 또한 영역-0과 1의 경계면인  $z=t$ 에서 접선성분의 자계 및 전계는 연속이므로, 경계조건들을 정리하면  $B_{n2}$ 를  $A_n$ 의 항으로 표현할 수 있다 [9].

$$B_{n2} = \frac{\epsilon_{r1} (A_n \gamma_n - k_0 \cos \phi e^{jk_0 t \cos \phi} \delta_n)}{\eta_{n1} (e^{-j\eta_{n1} t} - p_{n1} e^{j\eta_{n1} t})} \quad (9)$$

$$p_{n1} = \frac{1 + j \frac{\epsilon_{r1} \eta_{n2}}{\epsilon_{r2} \eta_{n1}} \tan(\eta_{n2} t_2)}{1 - j \frac{\epsilon_{r1} \eta_{n2}}{\epsilon_{r2} \eta_{n1}} \tan(\eta_{n2} t_2)} \cdot e^{-j2\eta_{n1} t_2} \quad (10)$$

식 (9)에서  $\delta_n$ 는  $n=0$ 일 때만 1,  $n \neq 0$ 의 경우는 0인 Kronecker delta함수,  $z=t$ 인 경계면에서 도체띠에 유도되는 전류밀도는 기저함수  $G_p(x)$ 의 급수로 미지의 계수를 포함한 식으로 전개하였다.

$$\overline{J}_x(x) = \hat{a}_x e^{-jk_0 x \sin \phi} \sum_p f_p G_p(x) \quad (11)$$

식 (11)의  $f_p$ 는 구해야 할 미지의 계수이며, 본 논문은 TE 산란의 경우이므로 도체띠에 유도되는 전류밀도는 도체띠의 양끝에서 0의 값이 예측되므로 기저함수를 적절한 모서리경계조건을 만족하는 함수와 직교다항식의 일종인 제2종 Chebyshev 다항식의 곱의 급수로 전개하였으며, 그 이유는 다음에 구하게 될 식(15)의 적분방정식에 대해 적분 테이블을 이용할 수 있기 때문이다 [10].

$$G_p(x) = \sqrt{1 - (x/h)^2} U_p(x/h) P_x(-h, h) \quad (12)$$

식 (12)에서  $P_x(-h, h)$ 는 도체띠 구간에서 1, 이외의 구간에서는 0이며, 영역 0에서 유도 전류밀도와 자계와의 관계식( $\overline{J} = \hat{a}_z \times \overline{H}$ )에 대해 식 (1), (3), (6), (11)을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sum_n [B_{n2} (e^{-j\eta_{n1} t} + p_{n1} e^{j\eta_{n1} t}) - e^{jk_0 t \cos \phi} \delta_n A_n] \cdot e^{-j2n\pi x/s} = \sum_p f_p G_p(x) \quad (13)$$

$$p = 0, 1, \dots, M, n = 0, \pm 1, \dots, \pm N.$$

식 (13)의 양변에  $e^{j2n\pi x/s}$ 를 곱하고  $-h < x < h$  구간에서 양변을 적분한 후 식 (9)의  $B_{n2}$ 를 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다 [10].

$$A_n = \frac{1}{s} \sum_{n=-N}^N f_p \frac{U_{pn}}{P_{n3}} + e^{k_0 t \cos \phi} \frac{P_{n4}}{P_{n3}} \delta_n \quad (14)$$

$$U_{pn} = \int_{-h}^h \sqrt{1 - (x/h)^2} U_p(x/h) e^{j2n\pi x/s} dx \quad (15)$$

$$p_{n2} = \frac{(1 + p_{n1}) - j(1 - p_{n1}) \tan(\eta_{n1} t)}{(1 - p_{n1}) - j(1 + p_{n1}) \tan(\eta_{n1} t)} \quad (16)$$

$$p_{n3} = \epsilon_{r1} \gamma_n \frac{P_{n2}}{\eta_{n1}} - 1 \quad (17)$$

$$p_{n4} = k_0 \cos \phi \epsilon_{r1} \frac{P_{n2}}{\eta_{n1}} + 1 \quad (18)$$

또한  $z = t$  인 도체띠의 경계면인 영역 1에서 입사 전계와 산란전계의 합인 전체전계는 도체띠에서 사라져야 하므로 다음과 같은 완전도체 경계조건을 만족해야 한다 [4][9].

$$\overline{E^i} + \overline{E^s} = 0 \tag{19}$$

식 (19)에 대해 식 (2), (4)를 대입하여 정리한 후, 양변에  $U_q(x/h)$ 를 곱하고,  $-h < x < h$  구간에서 적분하면 다음 식을 얻는다.

$$\sum_n A_n \gamma_n U_{qn}^* = k_0 \cos \phi e^{jk_0 t \cos \phi} U_q \tag{20}$$

$$U_{qn}^* = \int_{-h}^h U_q(x/h) e^{-j2\pi n x/s} dx \tag{21}$$

$$U_q = \int_{-h}^h U_q(x/h) dx \tag{22}$$

여기서 표시 ‘\*’는 공액복소수(complex conjugate)를 의미하며, 식 (20)에 식 (14)의  $A_n$ 을 대입하면 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{p=0}^M f_p Z_{pq} = V_q \tag{23}$$

$$Z_{pq} = \frac{\eta_0}{s k_0} \sum_{n=-N}^N \left( \frac{U_{pn} \gamma_n}{p_{n3}} \right) U_{qn}^* \tag{24}$$

$$V_q = \frac{\eta_0}{k_0} e^{jk_0 t \cos \phi} \left[ k_0 \cos \phi U_q - \sum_{n=-N}^N \left( \frac{p_{n4} \gamma_n \delta_n}{p_{n3}} \right) U_{qn}^* \right] \tag{25}$$

### III. 수치계산 결과 및 검토

수치계산을 위해서는 식 (24)과 식 (25)의 계산 결과를 식 (23)에 대입하여 미지의 계수  $f_p$ 를 구한 후

식 (14)에 대입하여 기하광학적 반사전력을 계산한다. 기존 논문의 경우 [9], 도체띠에 유도되는 표면 전류밀도를 수치계산하기 위해 기저함수를 지수함수의 급수로 전개한 경우는 식 (23)의 정방행 매트릭스  $Z_{pq}$ 의 행의 크기가  $p = [-M:M]$ 를 가지나, 기저함수를 도체띠의 양끝에서 0으로 수렴하는 적절한 모서리 경계조건과 직교다항식의 일종인 2종 Chebyshev 다항식의 곱의 급수로 전개한 경우는  $p = [0:M]$ 를 가지므로 정방행 매트릭스의 크기는 지수함수를 사용한 기존 논문보다 거의 반정도로 크기가 작아지므로 역변환시 수치해석 시간을 절약할 수 있다는 것이 기존 논문 [9]과 차별화 된다.

그림 2는 본 논문에서 제안한 방법인 모서리 경계조건을 만족하는 함수와 2종 Chebyshev 다항식의 곱의 급수로 전개한 본 논문의 경우와 기존의 기저함수를 지수함수 [9]로 사용한 경우에 대한 정규화된 반사전력의 크기를 비교하였을 때 빠르게 수렴함을 알 수 있으며, 그림 2에서 사용된 격자상수는  $s = 1.2$ ,  $w = 0.8$ ,  $h = 0.4$ ,  $t_1 = t_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ 이고, 본 논문에서 사용된 행렬의 크기는 각각  $p = 10$ ,  $N = 100$ 으로 한정하였다.

그림 3은 수직 입사의 경우, 전류밀도의 크기가 좌우대칭이고 도체띠의 양 끝에서 거의 0으로 수렴함을 알 수 있으며, 이는 모서리경계조건을 만족하는 식 (12)을 사용했기 때문에 얻어진 결과로서 수치해석의 타당성을 입증하였으며, 격자상수는  $s = 1.2$ ,  $w = 0.8$ ,  $h = w/2$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 3$ ,  $t_1 = 0.2$  일 때  $t_2$ 의 값을 증가시키면 도체띠에 유도되는 전류밀도의 크기가 점점 작아지는 것을 확인하였다.

그림 4는 수직 입사의 경우, 격자상수는  $s = 1.2$ ,  $w = 0.8$ ,  $h = w/2$ ,  $t_1 = t_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$  일 때  $\epsilon_{r2}$ 의 값이 클수록 반사전력이 증가하였으며, 반사전력의 최하위 변곡점들에서는 스트립 폭이 증가하는 방향으로 이동하였고 표시 “□”는 동일한 격자상수일 때 기존의 논문 [4] 및 표시 “●”는 기존의 논문 [9]의 계산결과와 일치하여 수치계산의 타당성을 확인하였다.

그림 5는 입사각이 60도의 경우, 격자상수가  $s = 1.2$ ,  $w = 0.8$ ,  $h = w/2$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 3$ ,  $t_1 = 0.15$  일때, 유전체 층의 두께  $t_2$ 의 값이 증가하면 반사전력의 값이 증가하였고 표시 “●”는 동일한 격자상수를 적용

했을 때 기존논문 [9]의 계산결과와 일치하였다.

그림 6은 입사각에 따른 반사전력을 계산한 것으로 격자상수는  $s = 1.2$ ,  $w = 0.7s$ ,  $\epsilon_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r2} = 2$ ,  $t_1 = 0.4$  일 때, 접지평면과 인접한 유전체 층의 두께  $t_2$ 의 값을 증가시켜 계산한 결과로서 전반적으로 입사각이 10도와 43도 사이와 55도에서 65도 사이의 부근에서  $t_2$ 의 값이 클수록 반사전력의 값들이 크게 나타났으며, 표시 “●”는  $t_1 = 0.4$ ,  $t_2 = 0.45$ 의 경우 동일한 격자상수를 적용했을 때 기존 논문의 계산결과 [9]와 일치하였다.

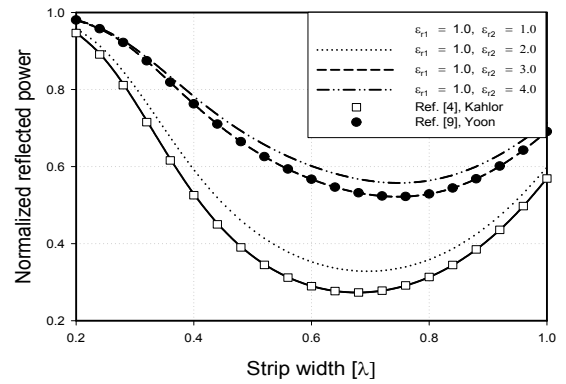


그림 4. 스트립 폭에 대한 정규화된 반사전력의 변화  
Fig. 4. Variation of the normalized reflected power for strip width

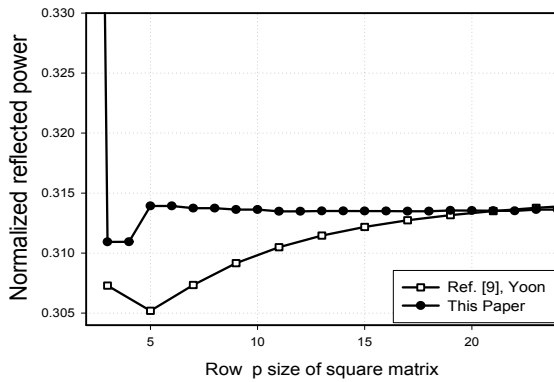


그림 2. 정방형 행렬의 행 p의 크기에 따른 수렴 곡선  
Fig. 2. Convergence curve according to row p size of square matrix

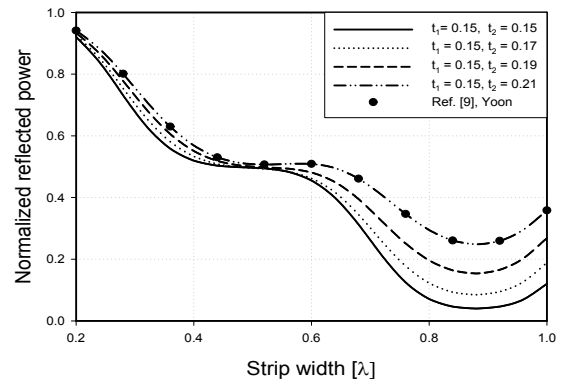


그림 5. 스트립 폭에 대한 정규화된 반사전력의 변화  
Fig. 5. Variation of the normalized reflected power for strip width

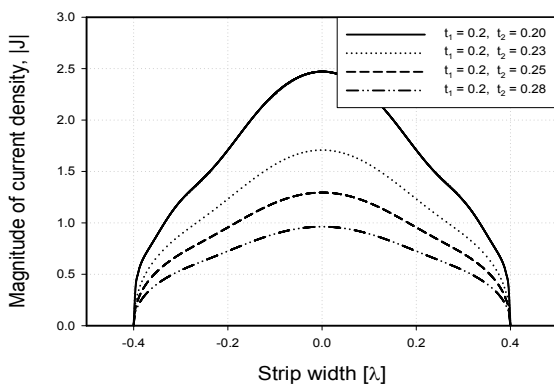


그림 3. 수직입사시 유도되는 전류밀도의 크기  
Fig. 3. Magnitude of the induced surface current density for normal incidence

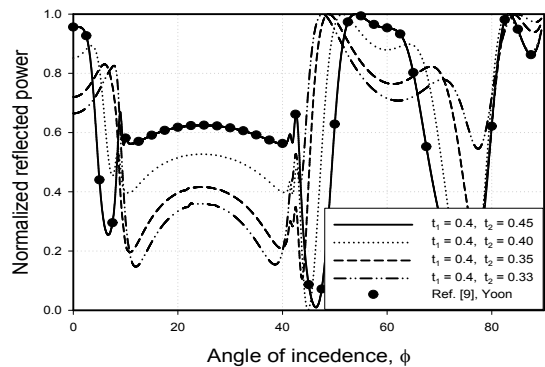


그림 6. 입사각에 대한 정규화된 반사전력의 변화  
Fig. 6. Variation of the normalized reflected power for incident angles

## V. 결 론

TE-산란의 경우 접지된 2개의 유전체층 위에 도체 띠가 주기적으로 배열되어 있을 때, 기존 논문에서는 유도되는 전류밀도를 계산하기 위해 기저함수를 지수함수의 급수로 전개하였으나 본 논문은 모서리 경계조건을 만족하는 함수와 2중 Chebyshev 다항식의 곱의 급수로 전개하여 수치해석 방법을 제안하였다.

기존 논문에서 전류밀도를 지수함수로 사용한 경우는 정방형 매트릭스의 행의 크기  $p = [-M:M]$ 이나 본 논문에서는  $p = [0:M]$ 이므로 정방형 매트릭스의 크기가 거의 반정도로 작아져서 역변환시 수치해석 시간이 단축되므로 기존 논문과 차별화 된다.

기존 논문과 비교하였으며 수치결과들은 기존 논문과 비교하여 급속한 수렴해를 보였으며, 전반적으로 접지평면과 인접한 유전체 층의 비유전율과 두께의 값들이 증가할수록 반사전력이 증가하였다. 앞으로 다층 구조 및 다른 수치해석 모델을 적용하기 위해서는 지속적 연구가 필요하다.

## 감사의 글

이 논문은 2013년도 가천대학교 교내연구비 지원에 의한 결과임. (GCU-2013-M014)

## Reference

- [1] M. Ando and K. Takei, "Reflection and Transmission Coefficient of a Thin Strip Grating for Antenna Application," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-35, no.4, pp. 367-371, 1987.
- [2] J. H. Richmond, "On the Edge Mode in the Theory of TM scattering by a Strip or Strip Grating," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-28, pp. 883-887, 1980.
- [3] R. Mittra and R. C. Hall, "Scattering from a Periodic Array of Resistive Strips," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-33, pp. 1009-1011, 1985.
- [4] H. A. Kalhor, "Electromagnetic Scattering by a

Dielectric Slab Loaded with a Periodic Array of Strips Over a Grounded Plane," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-36 no. 1, pp. 147-151, 1988.

- [5] U. J. Yoon and S. I. Yang, "E-Polarized Electromagnetic Scattering by a Resistive Strip Grating with a Grounded Dielectric Layer Using Fourier-Galerkin Moment Method," *KITE Journal of Electronics Engineering*, vol. 7, no. 2, pp. 15-19, 1996.
- [6] Y.S Choi and S. I. Yang, "Analysis of the Electromagnetic Scattering of Resistive Strip Grating with Uniform Resistivity on a Grounded Dielectric Layer-H-Polarization Case," *Journal of KICS*, vol. 31, no. 3A, pp. 321-327, 2006.
- [7] U. J. Yoon, "Analysis of TE Scattering by a Resistive Strip Grating Over a Grounded Dielectric Plane," *Journal of Korea Navigation Institute*, vol. 10, no. 3, pp. 198-204, 2006.
- [8] U. J. Yoon, "Solution of TE Scattering by a Resistive Strip Grating Over the Grounded Dielectric Multilayers," *Journal of KICS*, vol. 31, no. 9A, pp. 913-919, 2006.
- [9] U.J. Yoon, "Solution of TE Scattering by a Perfectly Conducting Strip Grating Over the Grounded Two Dielectric Layers Applying Fourier-Galerkin Moment Mthode," *Journal of Korea Navigation Institute*, vol. 16, no. 4, pp. 635-640, 2012.
- [10] I. S. Gragshteyn and I. M. Ryzhik, *Talble of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, 1980.

## 윤 의 중 (Uei-Joong Yoon)



1993년 8월 : 숭실대학교 전자공학과(공학박사)

1997년 6월 ~ 1997년 8월 : Bemidji State University in Minnesota (USA), 미국연수

2008년 7월~2012월 1월 : 가천의과학대학교 학생처장

2006년 3월~현재 : 가천대학교 의공학과 교수

관심분야 : 전자파산란 수치해석, 생체영상처리, 생체정보 모니터링시스템 등