

상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수; 주파수 영역 해석

이동엽¹·이승준^{1,†}
충남대학교 선박해양공학과¹

Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder; Frequency-Domain Analysis

Dong-yeop Lee¹·Seung-Joon Lee^{1,†}
Department of Naval Architecture & Ocean Engineering, Chungnam National University¹

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

The concept of the natural frequency is useful for understanding the characters of oscillating systems. However, when a circular cylinder floating horizontally on the water surface is heaving, due to the hydrodynamic forces, the system is not governed by the equation like that of the harmonic one. In this paper, in order to shed some lights on the more correct use of the concept of the natural frequency, a problem of the heaving circular cylinder is analyzed in the frequency domain. Previously, it was thought that the theory of Ursell (1949) could not be used to get the added mass and wave-making damping for short waves, however, they were obtained by applying an accurate collocation method to the theory in this study. Using the so developed numerical method, we found the added mass and wave-making damping of the circular cylinder for the entire range of the frequency. Then, the MCFR (Modulus of Complex Frequency Response) was used to locate the frequency corresponding to the local maximum of MCFR and we define it as the natural frequency. Comparing our results with the previous investigation, we found that the pressure distribution on the cylinder gets close asymptotically to that of a cylinder in infinite fluid OR close to that of the cylinder, that the approximation of the natural frequency by Lee (2008) is different from our new value only by 0.64%, and that the approximation of the heaving system by an equivalent damped harmonic oscillation is not proper by the reason that is clearly shown from the comparison of the shape of the corresponding MCFRs.

Keywords : Natural frequency(고유진동수), Frequency domain analysis(주파수 영역), Heaving circular cylinder(상하동요하는 원주), Added mass(부가 질량), Wave-making damping(조파 감쇠), Pressure distributions(압력 분포), Damped harmonic oscillation(감쇠 조화 동요)

1. 서론

자유수면 상에서 상하동요하는 2차원 원주의 부가 질량(added mass)에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 이루어져 왔지만 부유체 운동과 관련하여 매우 중요한 개념 중의 하나인 고유진동수(natural frequency)에 대한 정확한 정의는 확립되지 않았다.

통상적으로 고유진동수는 다음과 같은 질량-스프링 계(spring-mass system)에 대해 정의된다.

$$m\ddot{Y} + kY = 0 \quad (1)$$

여기서 m 은 물체의 질량, k 는 복원력 상수, Y 는 운동의

변위이며, 고유진동수, ω_n 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (2)$$

수면 상에 수평하게 떠 있는 원주가 상하동요하는 경우, 고유진동수에 대한 정의는 주파수 영역 또는 시간 영역 해석을 통해 시도할 수 있으며, 본 연구에서는 주파수 영역 해석을 사용하여 고유진동수를 정의하기로 한다. 먼저 운동방정식은 다음과 같다.

$$(m + m_a)\ddot{Y} + \mu\dot{Y} + CY = 0 \quad (3)$$

여기서 m_a 는 부가 질량, μ 는 조파 감쇠(wave-making damping)

이며, C 는 복원력상수이다. 위 운동방정식에 포함된 m_a 와 μ 는 진동수의 함수이므로, 질량-스프링 계에 대한 고유진동수의 정의를 그대로 사용하기는 곤란하다. 따라서 본 연구에서는 식 (3)의 운동방정식으로부터 MCFR (Modulus of Complex Frequency Response)을 얻고, MCFR의 극부최대값이 발생하는 진동수를 고유진동수로 정의하였으며, 관련하여 얻어진 수치해석 결과를 기존의 연구 결과들과 비교 고찰하였다.

강제 상하동요하는 2차원 원주에 대한 기존연구 중, Ursell (1949)의 부가 질량과 조파 감쇠에 대한 연구는 그 기원으로 볼 수 있다. 하지만 진동수가 클 경우, 수치적으로 안정된 결과를 얻지 못하여, Ursell (1953)은 적분 변환 방법을 사용하여 진동수가 큰 영역에 대한 연구를 수행하였다. 이 결과를 이용하여 Ursell (1959)은 진동수 전 범위를 포함하는 부가 질량과 조파 감쇠에 대한 결과를 주었다. 또한 수면파에 대한 선형이론의 신뢰도에 대한 검증을 위해 Yu and Ursell (1961)은 강제 동요 실험을 수행하여 기존의 이론 계산과 실험 결과가 잘 일치함을 보였다. 또 Porter (1961)는 부가 질량과 조파 감쇠에 대한 전반적인 이론을 다루었으며, 상하동요하는 2차원 원주 주위의 압력 분포에 대한 연구와 강제 동요 실험을 수행한 바 있다. 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수에 대한 연구는 Lee (2008)이 있다.

본 연구에서는 Ursell의 이론을 사용하여 진동수가 큰 영역에 대해서도 부가 질량과 조파 감쇠의 값을 수치적으로 안정된 결과를 얻을 수 있음을 보였다. 나아가, 진동수의 함수로 주어지는 부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려하여 정의되는 고유진동수를 얻었고, 또 원주의 상하동요를 감쇠 조화 동요로 근사하는 경우, 그에 상응하는 MCFR을 위에서 얻어진 MCFR과 비교하여 그 문제점에 대해 비교, 고찰하였다.

2. 문제의 정식화

2.1 좌표계

좌표계는 Ursell (1949)과 동일한 좌표계를 사용하였으며 Fig. 1에 보였다. x 축은 자유수면에 수평한 방향, y 축은 연직 하방을 향하는 직각 좌표계(rectangular co-ordinate system)로 잡고, 반경이 a 인 원주는 평형 상태에서 하반부가 유체에 잠겨 있다고 가정한다. 좌표계의 원점은 평형 상태에 있는 원주의 중심과 일치한다고 가정하고, (r, θ) 는 극 좌표계(polar co-ordinate system)이며, θ 는 y 축으로부터 반시계 방향으로 잰 각도이다. $(r, \theta) = (a, \frac{\pi}{2})$ 는 점 P_0 로 정의한다.

원주의 상하동요는 다음 식으로 주어지며,

$$Y(t) = l \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (4)$$

여기서 l , ω 는 각각 진폭과 진동수이며, ε 는 상하동요와 방사파의 위상차로 미지량이다.

상하동요하는 2차원 원주 주위의 유동은 이상 유체의 비회전성 유동으로 가정하고, 속도 포텐셜(velocity potential) ϕ 를 도입하였다. 그리고 유동은 좌우 대칭성을 가지므로, Fig. 1에 보인 바와 같이 제 1사분면만을 고려하기로 한다.

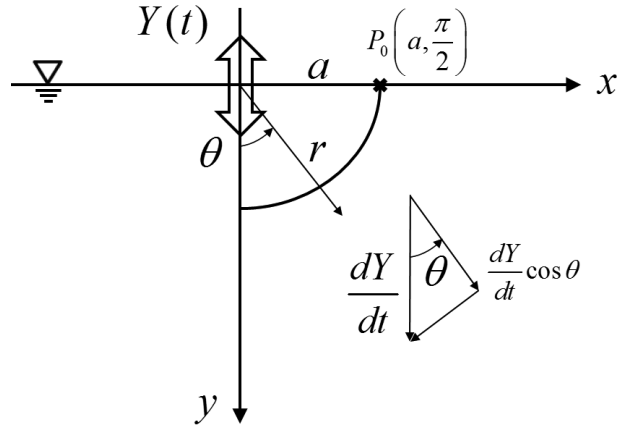


Fig. 1 co-ordinate system

2.2 경계치 문제

자유수면 상에서 상하동요하는 2차원 원주에 대한 경계치 문제는 아래와 같다.

1) 연속방정식

$$\nabla \cdot \underline{u} = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0 \text{에서.} \quad (5)$$

속도 포텐셜은 다음과 같이 주어지는 유체 영역의 경계인 자유수면과 물체표면 상에서의 경계조건 또한 만족해야 한다.

2) 선형화된 자유수면 경계조건

$$K\phi + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad y = 0 \text{에서.} \quad (6)$$

여기서 $\omega^2 = gK$ 이고, K 는 파수이다.

3) 물체 경계조건

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{dY}{dt} \cos \theta, \quad r = a \text{에서.} \quad (7)$$

물체 경계조건을 보다 쉽게 만족시키기 위해 속도 포텐셜을 유량 함수(stream function)로 바꾸어 생각하면 다음과 같은 경계조건을 얻는다.

$$\psi|_{r=a} = -a \frac{dY}{dt} \sin \theta = a l \omega \sin \theta \sin(\omega t + \varepsilon). \quad (8)$$

4) 바닥 조건

수심이 무한한 경우, $y \rightarrow \infty$ 일 때 유동이 무시할 만큼 작다는 바닥 조건(bottom condition)을 만족해야 한다.

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty \text{ 일 때.} \quad (9)$$

5) 방사 조건

2차원 원주의 상하동요에 의해 생성된 파도는 원주로부터 먼 쪽으로 전파된다는 방사 조건(radiation condition)을 만족해야 한다.

3. 이론적 해석

3.1 속도 포텐셜과 유량 함수

$x = r \sin \theta, \quad y = r \cos \theta$ 에 대하여 복소 변수(complex variable) z 를 도입하면 다음과 같고,

$$z = x + iy = ire^{-i\theta} \quad (10)$$

위 식을 이용하면 다음 관계를 얻는다.

$$\frac{i^n}{z^n} = \frac{e^{in\theta}}{r^n} = \frac{\cos n\theta}{r^n} + i \frac{\sin n\theta}{r^n} \quad (11)$$

위 식의 실수부와 허수부는 각각 식 (5) Laplace 방정식의 해인 조화 함수(harmonic function)이므로, Laplace 방정식을 만족하는 속도 포텐셜을 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi = \cos \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n\theta \\ + \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\frac{a}{r}\right)^n \cos n\theta \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 α_n 과 β_n 은 미정 계수이다. 이 속도 포텐셜을 선형화된 자유수면 경계조건에 대입하고 다음의 정의를 도입하면,

$$\begin{aligned} R_{2m}(r, \theta; K) \\ \equiv a^{2m} \left[\frac{\cos 2m\theta}{r^{2m}} + \frac{K}{2m-1} \frac{\cos(2m-1)\theta}{r^{2m-1}} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

속도 포텐셜, 식 (12)는 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\phi = \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} R_{2m} + \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} R_{2m} \quad (14)$$

위 식은 $|x| \rightarrow \infty$ 일 때, 방사 조건을 만족하지 않기 때문에 원

점에 세기 δ 의 맥동 특이점(pulsating source)을 놓아 방사 조건을 만족시키면 다음과 같은 속도 포텐셜을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi = \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} R_{2m} + \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2m} R_{2m} \\ + \delta(\phi_c \cos \omega t + \phi_s \sin \omega t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 ϕ_c, ϕ_s 는 맥동 특이점에 대한 속도 포텐셜로부터 주어지며, 보다 자세한 사항은 Lee (2012)를 참고하기 바란다.

단위세기의 맥동 특이점으로부터 발생하는 방사파의 진폭은 $\frac{\pi\omega}{g}$ 이므로, 방사파의 진폭을 b 라고 하면, 맥동 특이점의 세기는 $\delta = \frac{gb}{\pi\omega}$ 로 취해야 하며, 이를 식 (15)에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \phi = \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{2m} R_{2m} + \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2m} R_{2m} \\ + \frac{gb}{\pi\omega} (\phi_c \cos \omega t + \phi_s \sin \omega t) \end{aligned} \quad (16)$$

또한 α_{2m} 과 β_{2m} 을 다음과 같다고 하면,

$$\alpha_{2m} = \frac{gb}{\pi\omega} p_{2m}, \quad \beta_{2m} = \frac{gb}{\pi\omega} q_{2m} \quad (17)$$

속도 포텐셜은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\pi\omega}{gb} \phi = \cos \omega t \left\{ \phi_c + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} R_{2m} \right\} \\ + \sin \omega t \left\{ \phi_s + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} R_{2m} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

여기서 p_{2m} 과 q_{2m} 은 미정 계수로 아직 만족하지 않은 물체 경계조건을 만족하도록 결정되어야 한다.

물체 경계조건을 만족시키기 위하여 속도 포텐셜을 유량 함수로 바꾸어 나타내기로 하면, 유량 함수는 속도 포텐셜의 공액 함수(conjugate function)이므로, 다음과 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\pi\omega}{gb} \psi = \cos \omega t \left\{ \Psi_c + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} S_{2m} \right\} \\ + \sin \omega t \left\{ \Psi_s + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} S_{2m} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 ψ_c, ψ_s 는 맥동 특이점에 대한 유량 함수로부터 주어지며, S_{2m} 은 R_{2m} 의 공액 함수이다. 보다 자세한 사항은 Lee (2012)를 참조하기 바란다.

점 P_0 에서 물체 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\pi\omega}{gb} \psi|_{r=a, \theta=\pi/2} &= \cos\omega t A(\xi) + \sin\omega t B(\xi) \quad (20) \\ &= \pi\xi \frac{l}{b} (\cos\omega t \sin\varepsilon + \sin\omega t \cos\varepsilon) \end{aligned}$$

여기서 $\xi = Ka$ 로 무차원량이며, A 와 B 는 각각 다음 식으로 주어진다.

$$A(\xi) = \pi \sin\xi + \xi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{2m}(-1)^{m-1}}{2m-1} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} B(\xi) &= -\pi \cos\xi + K \int_0^{\infty} \frac{e^{-ka}}{k^2 + K^2} dk \quad (22) \\ &\quad + \xi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{2m}(-1)^{m-1}}{2m-1} \end{aligned}$$

한편 식 (20)으로부터 A 와 B 에 대하여 다음을 얻고,

$$A(\xi) = \pi\xi \frac{l}{b} \sin\varepsilon, \quad B(\xi) = \pi\xi \frac{l}{b} \cos\varepsilon \quad (23)$$

방사파의 진폭과 상하동요하는 2차원 원주의 진폭의 비, b/l 은 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{b}{l} = \frac{\pi\xi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (24)$$

위에서 얻은 결과를 물체 경계조건에 대입하여 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\cos\omega t \left\{ \psi_c(\xi, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} s_{2m} \right\} \quad (25) \\ &+ \sin\omega t \left\{ \psi_s(\xi, \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} s_{2m} \right\} \\ &= \sin\theta \times \left[\begin{aligned} &\cos\omega t \left\{ \pi \sin\xi + \xi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_{2m}(-1)^{m-1}}{2m-1} \right\} \\ &+ \sin\omega t \left\{ \psi_s\left(\xi, \frac{\pi}{2}\right) + \xi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{2m}(-1)^{m-1}}{2m-1} \right\} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

위에서 $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ 는 선형 독립이므로 다음 식들이 각각 성립하여야 한다.

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} p_{2m} = \psi_c(\xi, \theta) - \pi \sin\xi \sin\theta \quad (26)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} q_{2m} \quad (27)$$

$$= \psi_s(\xi, \theta) + \left\{ \pi \cos\xi - K \int_0^{\infty} \frac{e^{-ka}}{k^2 + K^2} dk \right\} \sin\theta$$

여기서 f_{2m} 은 다음과 같다.

$$f_{2m}(\xi, \theta) \quad (28)$$

$$= -\frac{\xi}{2m-1} \{ (-1)^m \sin\theta + \sin(2m-1)\theta \} - \sin 2m\theta$$

식 (26)과 (27)의 좌변은 각각 p_{2m} , q_{2m} 을 포함하는 무한급수이다. 본 연구에서는 경계조건을 많은 수의 점에서 만족시켜 수치해를 구하는 공치법(collocation method)을 사용하였으며, 그와 같은 점, 즉 공치점(collocation point)의 수, N 의 증가에 따른 오차해석을 수행하여 부가 질량과 조파 감쇠에 대한 안정적인 수치 결과를 얻었다.

3.2 압력계산

부가 질량과 조파 감쇠를 얻기 위해서는 물체표면에서의 압력을 계산하여야 한다. 비정상 유동에 대한 베르누이 방정식으로부터 압력은 다음과 같이 얻을 수 있다[Ursell (1949)].

$$p|_{r=a} = \frac{\rho g b}{\pi} \left\{ \begin{aligned} &\sin\omega t \left(\phi_c + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} R_{2m} \right) \\ & - \cos\omega t \left(\phi_s + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} R_{2m} \right) \end{aligned} \right\}_{r=a} \quad (29)$$

여기서 M 과 N 을 다음과 같이 정의하면,

$$M = \phi_s + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m} R_{2m}, \quad N = \phi_c + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m} R_{2m} \quad (30)$$

식 (29)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$p|_{r=a} = \frac{\rho g b}{\pi} (-M \cos\omega t + N \sin\omega t) \quad (31)$$

3.3 압력적분과 부가 질량

압력의 연직방향 성분을 적분하여 연직방향으로 작용하는 힘 F 를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$F = \frac{2\rho g a b}{\pi} (M_0 \cos\omega t - N_0 \sin\omega t) \quad (32)$$

여기서 M_0 와 N_0 는 다음과 같다.

$$M_0 = \int_0^{\pi/2} M \cos \theta d\theta \quad (33)$$

$$= (\phi_s, \cos \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m}(R_{2m}, \cos \theta)$$

$$N_0 = \int_0^{\pi/2} N \cos \theta d\theta \quad (34)$$

$$= (\phi_c, \cos \theta) + \sum_{m=1}^{\infty} p_{2m}(R_{2m}, \cos \theta)$$

부가 질량과 조파 감쇠를 얻기 위해서는 식 (32)로 주어지는 연직방향의 힘을 상하동요의 가속도 성분과 속도 성분으로 분해 (decompose)해야 한다.

$$F = \frac{2\rho g a b}{\pi} (M_0 \cos \omega t - N_0 \sin \omega t) \quad (35)$$

$$= -m_a \frac{d^2 Y}{dt^2} - \mu \frac{dY}{dt}$$

위 식으로부터 부가 질량과 조파 감쇠를 다음과 같이 얻는다.

$$m_a = \frac{2\rho a^2 (M_0 B + N_0 A)}{A^2 + B^2}, \quad (36)$$

$$\mu = \frac{2\rho a^2 \omega (M_0 A - N_0 B)}{A^2 + B^2}$$

원주의 질량 $m = \rho \pi a^2 / 2$ 이므로, 부가 질량계수 C_a 와 조파 감쇠계수 C_μ 는 다음과 같다.

$$C_a = \frac{m_a}{m} = \frac{4}{\pi} \frac{M_0 B + N_0 A}{A^2 + B^2}, \quad (37)$$

$$C_\mu = \frac{\mu}{m\omega} = \frac{4}{\pi} \frac{M_0 A - N_0 B}{A^2 + B^2}$$

3.4 고유진동수

외력이 작용하지 않는 가운데 상하동요하는 2차원 원주의 주 파수 영역에서 운동방정식은 다음과 같다.

$$(m + m_a) \ddot{Y} + \mu \dot{Y} + CY = 0 \quad (38)$$

여기서, m 은 원주의 질량, m_a 는 부가 질량이며, μ 는 조파 감쇠, $C = 2\rho g a$ 로 복원력 상수이다.

운동방정식, 식 (38)을 보면 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수는 부가 질량과 조파 감쇠를 알아야 결정되는데, 먼저 부가 질량과 조파 감쇠의 영향을 고려하지 않았을 때의 고유진동수, 즉 원고유진동수(pre-natural frequency)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\omega_0^2 = \frac{2\rho g a}{\pi \rho a^2 / 2} = \frac{4}{\pi} \frac{g}{a} \quad (39)$$

ω_0 에 상응하는 무차원 파수 ξ_0 는 다음과 같다.

$$\xi_0 = \frac{\omega_0^2 a}{g} = \frac{4}{\pi} \cong 1.273 \quad (40)$$

부가 질량만을 고려한 고유진동수 ω_a 는 Lee (2008)로부터 다음과 같이 정의할 수 있으며,

$$\omega_a^2 = \frac{2\rho g a}{m + m_a} = \frac{\omega_0^2}{1 + C_a(\omega_a)} \quad (41)$$

원고유진동수로 무차원화한 고유진동수, Ω_a 는 다음과 같다.

$$\Omega_a = \frac{\omega_a}{\omega_0} \quad (42)$$

부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려하여 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수를 정의하기 위해 먼저 MCFR을 고려하면, MCFR, $R(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\{(m + m_a)\omega^2 + c\}^2 + \mu^2 \omega^2}} \quad (43)$$

$$= \frac{1}{m\omega_0^2 \sqrt{\{-(1 + C_a)\Omega^2 + 1\}^2 + C_\mu^2 \Omega^4}}$$

여기서 $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ 이며, $\frac{R}{m\omega_0^2} = R^*$ 라고 하면 무차원화된 MCFR, R^* 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R^*(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 + C_a)\Omega^2\}^2 + C_\mu^2 \Omega^4}} \quad (44)$$

$\frac{dR^*}{d\Omega} = 0$ 를 만족하는 값을 Ω_1 이라고 하면, 그 값은 수치 계산 결과로부터 직접 구할 수 있다.

4. 계산 결과

4.1 수치 계산 검증

수치 계산을 통해 얻은 계산 결과가 얼마나 큰 오차를 가지는지를 확인하기 위해 일-에너지 원리를 이용하여 수치 계산 오차, E 를 다음과 같이 정의한다.

$$E = \left| \frac{(M_0 A - N_0 B) - \pi^2/2}{\pi^2/2} \right| \times 100 [\%] \quad (45)$$

ξ 에 대한 Ursell의 계산 범위, $\xi \leq 6$ 에서는 수치적으로 안정된 오차를 얻을 수 있었으며, $\xi = 20$ 까지 확장된 범위에 대한 오차를 구하기 위해 공치점의 수, $N = 10, 30, 50$ 에 대하여 계산을 수행하였고, 그 결과를 Fig. 2에 보였다. $N = 10$ 에 대한 계산은 공치법과 최소 자승법을 이용하여 얻었으며, 최소 자승법을 사용하여 얻은 결과가 공치법을 사용하여 얻은 결과보다 작은 오차를 가지는 것을 확인하였다. 그러나 계산 시간이 오래 걸린다는 단점이 있기 때문에 이후 계산은 공치법을 이용하였으며, $N = 50$ 에서 계산 결과가 $\xi < 20$ 에 대해 $E < 0.5\%$ 로 만족할만한 값을 주었으므로, 본 논문의 계산은 $N = 50$ 으로 취하여 수행하였다.

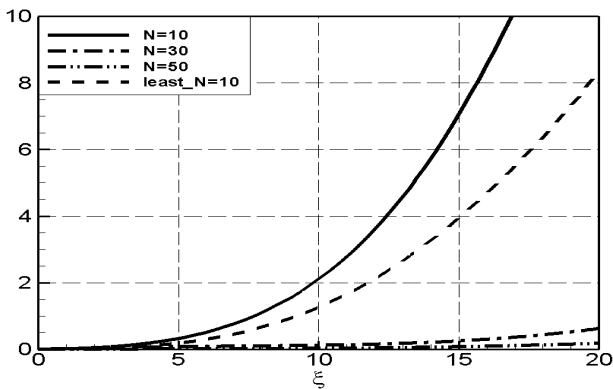


Fig. 2 Error vs. ξ

4.2 계수 p_{2m} 과 q_{2m}

계수 p_{2m} 과 q_{2m} 의 수치 계산 결과는 Fig. 3과 4에 보였다.

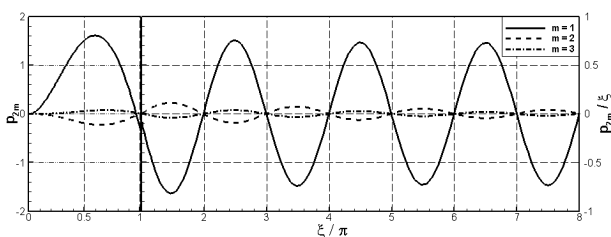


Fig. 3 p_{2m} vs. ξ

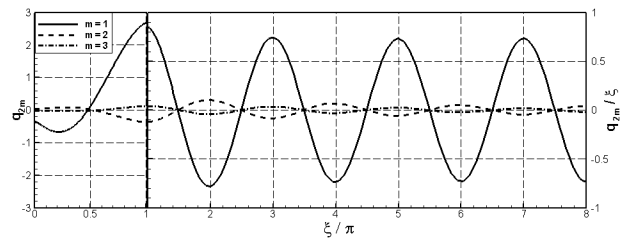


Fig. 4 q_{2m} vs. ξ

Fig. 3과 4에서 수렴축 $\xi/\pi = \frac{2a}{\lambda}$ 이며, $\xi/\pi = 1$ 을 기준으로 하여 좌우로 수직축의 크기를 다르게 나타내었다. 수치 결과로부터 p_2 와 q_2 가 지배적이며, $\xi \rightarrow \infty$ 일 때, 다음과 같은 점근식으로 나타낼 수 있는 것을 확인하였다.

$$p_2 \sim \frac{\pi}{4} \xi \sin \xi, \quad q_2 \sim -\frac{\pi}{4} \xi \cos \xi \quad (46)$$

q_2 와 q_4 에 대한 수치 계산 결과는 $N < 30$ 에 대해서도 수렴하는 결과를 얻을 수 있으므로, N 의 증가에 따른 계수 q_2 와 q_4 에 대하여 $\xi = n\pi$, $\xi = n\pi - \frac{1}{2}$ 일 때, 수렴성을 Fig. 5와 6에 보였다. $N > 30$ 일 때, q_2 와 q_4 가 일정한 값으로 수렴하는 것을 확인할 수 있으며, 공치법을 사용하여 주어진 ξ 의 구간에 대해 계산을 수행할 경우, $N > 30$ 으로 계산을 수행해야 수렴된 결과를 얻을 수 있다.

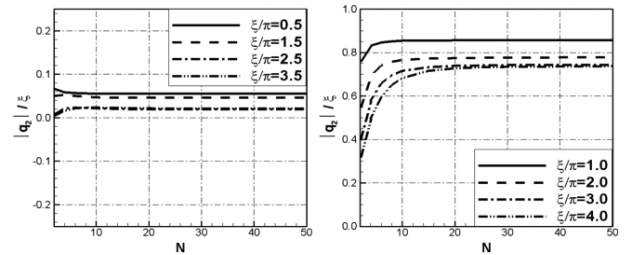


Fig. 5 Convergence of q_2

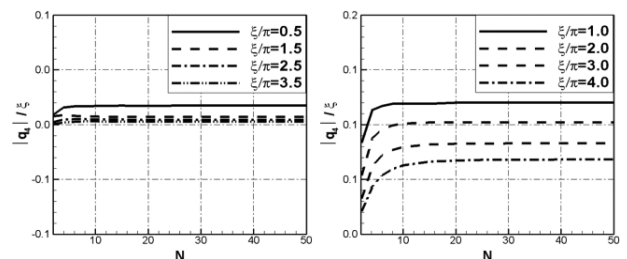


Fig. 6 Convergence of q_4

4.3 b/l 계산 결과

b/l 에 대한 계산 결과는 Fig. 7에 보였다.

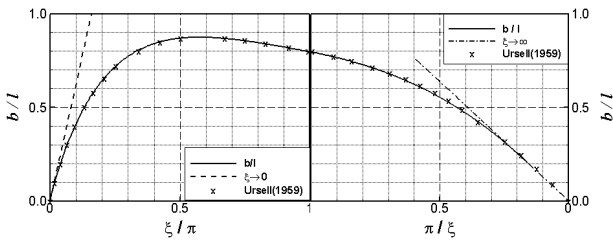


Fig. 7 b/l vs. ξ

위 그림은 수평축의 값이 1 일 때를 기준으로 좌우의 수평축을 다르게 나타내었으며, 수치 계산 결과로부터 b/l 은 $\xi \approx 1.8$ 에서 국부 최대값 $b/l \approx 0.874$ 를 가지는 것을 확인할 수 있으며, b/l 에 대한 점근식은 수치 결과로부터 다음과 같이 얻는다.

$$\xi \rightarrow 0, \frac{b}{l} = \frac{\pi \xi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sim 2\xi \quad (47)$$

$$\xi \rightarrow \infty, \frac{b}{l} = \frac{\pi \xi}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sim \frac{4}{\xi} \quad (48)$$

4.4 부가 질량계수와 조파 감쇠계수

부가 질량계수 C_a 에 대한 계산결과는 Ursell (1959)의 계산 결과와 비교하여 Fig. 8에 나타냈다. Fig. 8은 Fig. 7과 같이 수평축의 값이 1 일 때를 기준으로 좌우의 수평축을 다르게 나타내었으며, Ursell의 결과와 전반적으로 일치하는 것을 볼 수 있다. 하지

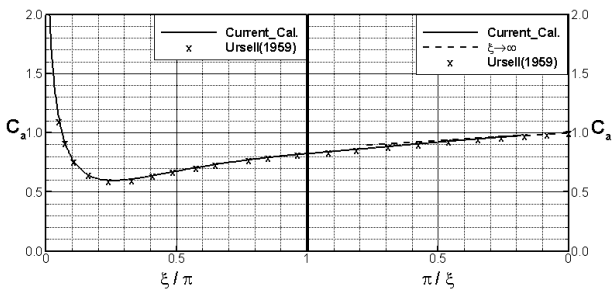


Fig. 8 C_a vs. ξ

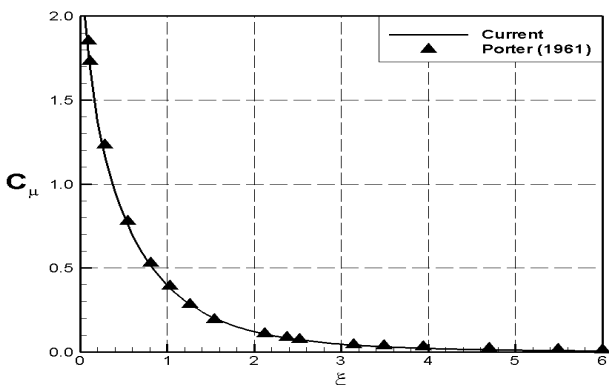


Fig. 9 C_μ vs. ξ ; including Porter (1961)

만 Ursell의 경우 $\xi \rightarrow \infty$ 에서 수치 계산 상의 문제로 적분 변환 방법을 이용하여 문제를 풀었으나 본 연구에서는 $N = 50$ 을 사용하여 수치계산을 통해 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

조파 감쇠계수 C_μ 에 대한 계산 결과는 Porter (1961)의 계산 결과와 비교하여 Fig. 9에 나타냈다. 조파 감쇠계수의 수치 계산 결과 또한 Porter의 수치 계산 결과와 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

4.5 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수

주파수 영역에서 부가 질량만을 고려한 고유진동수는 식 (41)에서 정의한 대로 다음과 같다.

$$\omega_a^2 = \frac{2\rho g a}{m + m_a} = \frac{\omega_0^2}{1 + C_a(\omega_a)} \quad (41)$$

ω_a 를 얻기 위해 반복법을 사용하기로 하면, 반복자(iterator)는 다음의 식으로 주어지고,

$$\omega_{aj+1}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + C_a(\omega_{aj})} \quad (49)$$

반복자를 사용하여 얻은 계산 결과는 다음과 같다.

$$\Omega_a = 0.7919 \quad (50)$$

즉 부가 질량만을 고려한 고유진동수 Ω_a 는 원고유진동수에 비하여 20.81% 감소한 결과를 얻었다.

부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려한 고유진동수는 MCFR을 이용하여 정의할 수 있으며, 상하동요하는 2차원 원주에 대한 MCFR을 Fig. 10에 보였다.

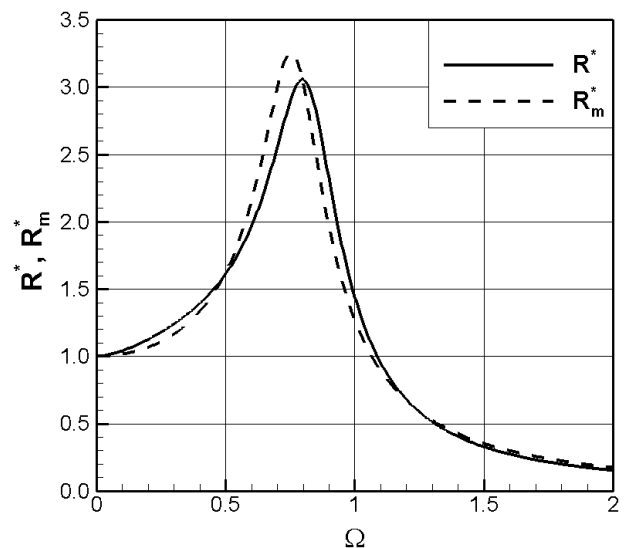


Fig. 10 R^* & R_m^* vs. Ω

앞의 그림에서 R^* 는 식 (44)에서 정의한 무차원화된 MCFR이며, R_m^* 은 R^* 가 국부 최대값을 가지는 Ω_1 에서의 부가 질량과 조파 감쇠를 이용하여 상하동요를 감쇠 조화 동요로 근사하였을 때 얻어지는 MCFR로 다음과 같다.

$$R_m^*(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 + C_{a1})\Omega^2\}^2 + C_{\mu 1}^2 \Omega^4}} \quad (51)$$

여기서 $C_{a1} = C_a(\Omega_1)$, $C_{\mu 1} = C_\mu(\Omega_1)$ 으로 상수이며, 식 (43)에서의 $C_a(\omega)$, $C_\mu(\omega)$ 는 ω 의 함수라는 차이를 가지며, 수치 계산 결과를 사용하여 얻은 $\frac{dR^*}{d\Omega} = 0$ 인 진동수와 $\frac{dR_m^*}{d\Omega} = 0$ 인 진동수는 다음과 같다.

$$\Omega_1 = 0.7970, \quad \Omega_m = 0.7531 \quad (52)$$

Fig. 10에서 2차원 원주의 상하동요와 이를 감쇠 조화 동요로 근사한 경우의 MCFR을 비교하면, MCFR의 형상이 Ω 의 전 범위에 걸쳐 다르며, 고유진동수는 Ω_m 이 Ω_1 에 비해 5.51% 작은 값을 가진다.

한편, 기존의 대부분의 연구에서 상하동요하는 2차원 원주의 고유진동수를 감쇠 조화 동요로 근사하여 정의하고 있는 점을 고려하여 다음과 같은 운동방정식을 사용하여 근사에 대해 고찰해보기로 한다.

$$(1 + C_{a1})\ddot{Y} + 2\zeta\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0 \quad (53)$$

여기서 $C_{a1} = C_a(\Omega_1)$ 이며, 위 식에 대한 MCFR은 다음과 같다.

$$R_s^*(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\{1 - (1 + C_{a1})\Omega^2\}^2 + (2\zeta\Omega)^2}} \quad (54)$$

R_s^* 의 국부최대값을 주는 Ω_s 는 다음 식으로부터 얻는다.

$$\frac{dD_s}{d\Omega} = \{1 - (1 + C_{a1})\Omega^2\}(1 + C_{a1}) - 2\zeta^2 = 0 \quad (55)$$

여기서 $D_s = \{1 - (1 + C_{a1})\Omega^2\}^2 + (2\zeta\Omega)^2$ 이다. 식 (55)를 ζ 에 대하여 정리하면 다음 식을 얻는다.

$$2\zeta^2 = -(1 + C_{a1})^2\Omega^2 + (1 + C_{a1}) \quad (56)$$

감쇠비 ζ 를 얻기 위해 위 식에 대한 수치 계산을 수행하였으나, 계산결과는 모든 진동수에 대하여 $2\zeta^2 > 0$ 이 아니므로, 위 MCFR을 만족하는 감쇠비 ζ 는 존재하지 않는다고 볼 수 있다.

위에서 상하동요 운동에 대한 감쇠 조화 동요의 감쇠비를 얻을 수 없었으므로, 부가 질량만을 고려한 고유진동수를 기준으로 취

하여 운동방정식을 다시 고려하면, 그 운동방정식은 다음과 같다.

$$(1 + C_{aa})\ddot{Y} + C_{\mu a}\omega_a\dot{Y} + \omega_0^2 Y = 0 \quad (57)$$

여기서 $C_{aa} = C_a(\omega_a)$, $C_{\mu a} = C_\mu(\omega_a)$ 이며, 위 운동방정식을 $(1 + C_{aa})$ 로 나누어 다음을 얻는다.

$$\ddot{Y} + 2\zeta\omega_a\dot{Y} + \omega_a^2 Y = 0 \quad (58)$$

여기서 $\omega_a^2 = \frac{\omega_0^2}{(1 + C_{aa})}$, $2\zeta = \frac{C_{\mu a}}{(1 + C_{aa})}$ 이므로, 감쇠비는 다음과 같이 얻는다.

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{C_{\mu a}}{1 + C_{aa}} = 0.161182 \quad (59)$$

식 (58)에 상응하는 무차원 MCFR은 다음과 같다.

$$R_b^*(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_a^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\Omega}{\Omega_a}\right)^2}} \quad (60)$$

위 식을 상하동요하는 2차원 원주에 대한 MCFR과 비교하여 Fig. 11에 보였다.

$\frac{dR_b^*}{d\Omega} = 0$ 인 진동수는 다음과 같다.

$$\Omega_b = 0.7707 \quad (61)$$

Fig. 11로부터 R^* 와 R_b^* 는 그 형상이 근본적으로 다르며, 고유진동수는 Ω_b 가 Ω_1 에 비해 3.38% 작은 값을 가진다.

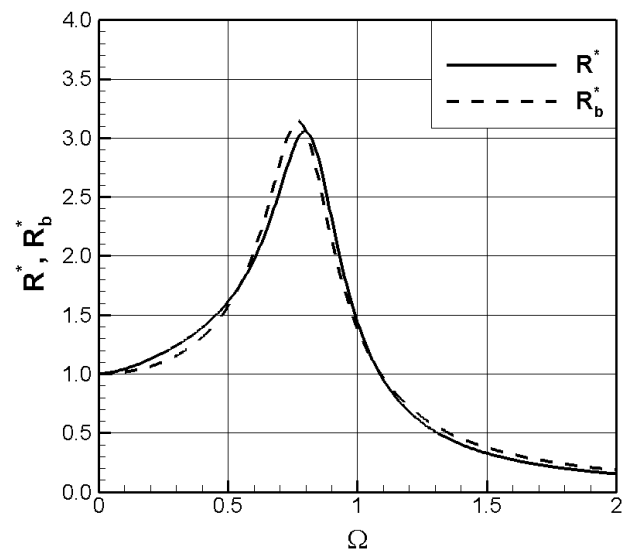


Fig. 11 R^* & R_b^* vs. Ω

따라서 상하동요를 감쇠 조화 동요로 근사하는 경우, 고유진동수와 감쇠비는 정확한 의미에서 원래의 상하동요를 기술한다고 보기 힘들다는 것을 알 수 있다.

주파수 영역에서의 고유진동수를 Table 1에 정리하였다.

Table 1 Comparison of Ω 's; from frequency-domain

	Ω_1	Ω_a	Ω_m	Ω_b
Values	0.7970	0.7919	0.7531	0.7707
$1-\Omega$	20.3%	20.81%	24.69%	22.93%
$1-(\Omega/\Omega_1)$	0%	0.64%	5.51%	3.29%

부가 질량과 조파 감쇠를 모두 고려한 MCFR을 이용하여 얻은 고유진동수, Ω_1 은 부가 질량만을 고려한 고유진동수, Ω_a 와 0.64%의 차이를 보이며, 감쇠 조화 동요로 근사한 고유진동수, Ω_m , Ω_b 는 각각 5.51%, 3.29%의 차이를 가진다.

5. 결론

본 연구에서는 상하동요하는 2차원 원주에 대해 Ursell의 이론에 입각하여 $N=50$ 으로 취한 공치법을 사용하여 진동수의 전 범위에 대한 부가 질량과 조파 감쇠를 얻었다. 얻어진 부가 질량과 조파 감쇠로부터 MCFR을 얻고, 그 국부최대값에 상응하는 진동수를 고유진동수로 정의하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

위에서 정의한 무차원 고유진동수, Ω_1 은 부가 질량만을 고려한 고유진동수, Ω_a 와 거의 일치한다. 상하동요를 감쇠 조화 동요로 근사하는 감쇠비는 원고유진동수로 무차원화 하는 경우, 그 값이 존재하지 않으며, ω_a 로 무차원화 하는 경우, $\zeta=0.1612$ 를 얻었다.

m_a 와 μ 를 얻기 위해 필요한 계수 p_{2m} 과 q_{2m} 은 p_2 와 q_2 가 지배적이며, 계수들의 수렴성을 확인한 결과, 공치법을 사용하는 경우, $N > 30$ 이어야 하며, 오차 해석을 통해 $N \geq 50$ 인 경우 만족할 만한 정확도를 얻을 수 있으므로, 본 연구에서는 $N=50$ 으로 취하여 계산을 수행하였다.

위와 같은 방법을 사용하여 얻은 C_a 와 C_μ 는 Ursell (1959)의 결과와 전반적으로 일치함을 확인하였다. 그는 $\xi \rightarrow \infty$ 인 경우, 급수전개법으로는 수치상 안정된 결과를 얻을 수 없었으므로, 적분 변환 방법을 사용해서 그 해를 구하였으나, 본 논문에서는 $N=50$ 으로 취한 공치법을 사용하여 수치적으로 안정되고 충분히 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

후기

이 연구는 2011년도 충남대학교 학술연구비에 의해 지원된 연구의 결과입니다.

참고 문헌

- Lee, D.Y., 2012. *Natural frequency of 2-dimensional heaving circular cylinder; frequency-domain analysis*. M.S. Thesis. Chungnam National University.
- Lee, S.J., 2008. Natural Frequency of 2-Dimensional Heaving Circular Cylinder. *Journal of the Society of Naval Architects of Korea*, 45(4), pp.389-395.
- Porter, W.R., 1961. *Pressure distributions, added mass, and damping coefficients for cylinders oscillating in a free surface*. Ph.D. The University of California.
- Ursell, F., 1949. On the Heaving Motion of Circular Cylinder on the Surface of a Fluid. *Quarterly Journal of Mechanics & Applied Mathematics*, 2(2), pp.218-231.
- Ursell, F., 1953. Short surface waves due to an oscillating immersed body. *Proceedings of Royal Society of London A220 (1953)*, pp.90-103.
- Ursell, F., 1959. On the virtual mass and damping of floating bodies at zero speed ahead. *Proceedings: Symposium on the Behavior of Ships in a Seaway*, Wageningen, pp.374-387.
- Yu, Y.S. & Ursell, F., 1961. Surface Waves Generated by an Oscillating Circular Cylinder on Water of Finite Depth: Theory and Experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 11(4), pp.529-551.



이동엽

이승준