

An analysis method of reflectance spectra of strongly correlated electron systems

Jungseek Hwang*

Sungkyunkwan University, Suwon, Gyeonggi-do 440-846, Republic of Korea

(Received 26 February 2013; revised 11 March 2013; accepted 13 March 2013)

Abstract

We introduce a generic method to analyze optical reflectance spectra of strongly correlated electron systems including high-temperature superconductors by using an extended Drude model and Allen's approach. We explain the process step by step from reflectance through the optical conductivity and the scattering rate to the bosonic spectral function. Through the process we are able to get important information on the interactions between charge carriers from measured optical conductivity of the strongly correlated electron systems including copper oxide and iron pnitide high temperature superconductors.

Keywords : reflectance, extended Drude model, optical self-energy, bosonic spectral function

1. INTRODUCTION

전자기파의 침투두께인 스킨디PTH스(skin depth)보다 두꺼운 초전도체를 포함한 전도성 물질의 샘플을 적외선/광분광학기술로 연구할 때, 넓은 에너지 영역에서 반사율을 측정하고, 측정된 반사율로부터 크래머스-크로닉(Kramers-Kronig) 관계식을 이용한 분석을 통해, 여러 광학상수(optical constants)를 얻어낸다. 전하나르개(charge carrier)들 사이에 강한 상호작용이 있는 물질에서 전하 나르개들 사이의 상호작용의 정보는 확장된 드루드 모델을 이용하여 얻어 낼 수 있다. 이 논문은 이러한 일련의 과정을 좀 더 상세하게 기술하여 적외선/광 분광학을 이용하여 측정된 반사율 데이터의 분석에 도움이 되기를 바라면서 쓰여졌다.

2. 크래머스-크로닉 관계식과 광학상수

적외선/광 분광학을 이용한 물질의 광학적 특성 연구에서 측정된 데이터의 전형적인 분석방법에 대하여 논의하면 다음과 같다. 먼저 적외선/광 분광학 실험기술로 측정된 광학적(진동수 함수의) 데이터 또는 스펙트럼으로부터 광학상수(optical constant)가 어떻게 얻어지는지 대해서 기술하겠다. 적외선/광 분광학으로 직접 측정하는 물리량은 주로 반사율($R(\omega)$)이나 투과율($T(\omega)$)이다. 여기서 ω 는 전자기파의 진동수이다. 이들은 각각 입사된 전자기파의 세기($I_i(\omega) \equiv E_i(\omega)E_i^*(\omega)$)에 대해 반사된 전자기파의 세기($I_r(\omega) \equiv E_r(\omega)E_r^*(\omega)$)나 투과된 전자기파의 세기($I_t(\omega) \equiv E_t(\omega)E_t^*(\omega)$)의 비율이다.

즉 $R(\omega) \equiv I_r(\omega)/I_i(\omega)$ 와 $T(\omega) \equiv I_t(\omega)/I_i(\omega)$ 이다. 여기서 $E_i^*(\omega)$ 는 전기장 $E_i(\omega)$ 의 공액복소함수이다.

본 논문에서는 주로 원적외선(far infrared: 2 - 80 meV)과 중적외선(mid infrared: 50 - 800 meV) 에너지(진동수)영역에서 높은 반사율을 보여주는 전도성 물질 내의 전하 나르개의 광학적 특성에 관한 내용이다. 반사율 스펙트럼의 분석에 관해 자세히 다루려고 한다. 실험의 여러 한계로 인해 측정된 반사율($R(\omega)$)은 한정된 에너지 영역에서만 가능하다. 또한 반사율 자체는 이론적으로 해석하기에 매우 복잡한 물리량이므로 일반적으로 이론적인 모델로 해석하기 용이한 양인 광학상수(optical constants)를 측정한 반사율로부터 얻어내는 것이 중요하다. 먼저 반사율로부터 광학상수를 얻어내는 과정을 간략하게 소개하겠다. 일반적으로 크래머스-크로닉(Kramers-Kronig) 관계식을 이용하여 측정된 반사율($R(\omega)$)로부터 대응되는 함수인 반사계수($\tilde{r}(\omega) \equiv E_r(\omega)/E_i(\omega) \equiv \sqrt{R(\omega)}e^{i\phi(\omega)}$)의 위상함수 $\phi(\omega)$ 을 아래 식을 이용하여 얻는다[1].

$$\phi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \sqrt{R(\omega')}}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'.$$

위의 식에서 위상함수를 얻기 위해서는 영에서 무한대까지의 적분을 해야한다. 그러나 측정된 반사율($R(\omega)$)은 한정된 에너지 영역이므로 적분을 수행하기 위해서는 반사율을 영과 무한대로 외삽(extrapolation)을 해야만 가능하다. 이 외삽은 적절한 모델을 이용하여 적절하게 행해져야 한다[2]. 위 식으로부터 얻어진 위상함수와 측정한 반사율을 이용하면 굴절율(index of refraction) 함수와 유전율(dielectric constant) 함수 등 다른 광학상수(optical constant)들을 구할 수 있다. 보통 측정된 반사율은 수직에 가까운 반사율이므로 근사적으로 수직으로 입사된 경우의 식을 사용할 수 있다.

* Corresponding author: jungseek@skku.edu

즉, $\sqrt{R(\omega)e^{i\phi(\omega)}} \equiv [1 - n(\omega) - i\kappa(\omega)]/[1 + n(\omega) + i\kappa(\omega)]$ 로부터 $n(\omega)$ 와 $\kappa(\omega)$ 는

$$n(\omega) = \frac{1 - R(\omega)}{1 + R(\omega) - 2\sqrt{R(\omega)\cos\phi(\omega)}}$$

$$\kappa(\omega) = \frac{-2\sqrt{R(\omega)\sin\phi(\omega)}}{1 + R(\omega) - 2\sqrt{R(\omega)\cos\phi(\omega)}}$$

이다. 여기서 $n(\omega)$ 는 굴절률(refraction index)이며 $\kappa(\omega)$ 는 흡수계수(extinction coefficient)이다. 복소 굴절률은 $\tilde{N}(\omega) \equiv n(\omega) + i\kappa(\omega)$ 로 정의된다. 또한 복소 광학적 전도도(complex optical conductivity: $\tilde{\sigma}(\omega) \equiv \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$) 등 다른 광학상수는 맥스웰 방정식으로부터 관련시킬 수 있는 광학상수 사이의 관계식들을 이용하여 구할 수 있다. 예를 들면, 복소 유전율($\tilde{\epsilon}(\omega) \equiv \epsilon_1(\omega) + i\epsilon_2(\omega)$)과 위의 복소 굴절률 사이의 관계식은 $\sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)} \equiv \tilde{N}(\omega)$ 로 주어지며, 이로부터 복소굴절률의 실수부분과 허수부분은 각각 $\epsilon_1(\omega) = n(\omega)^2 - \kappa(\omega)^2$ 와 $\epsilon_2(\omega) = 2n(\omega)\kappa(\omega)$ 로 쓸 수 있다. 또한 복소 유전율과 광학적 전도도 사이의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega) \equiv -i\frac{\omega}{4\pi}[(\epsilon_1(\omega) - \epsilon_H) + i\epsilon_2(\omega)]$$

여기서 ϵ_H 는 자유전자(free electrons)와 에너지 밴드 내에서의 천이(intraband transition)에 의한 유전율에의 기여를 제외한, 높은 에너지 영역의 모든 광학적 반응(optical response)이 기여한 유전율이다. 물질의 특성인 이 값을 결정하는데 세심한 주의가 필요하다[3]. 이상의 과정을 거치면 측정된 반사율로부터 관심 있는 광학상수들을 구할 수 있다. 다시 말하면, 측정된 진동수 영역에서의 물질의 광학적 특성들을 얻을 수 있다. 적외선/광 분광학 기술로 얻어진 광학적 전도도(optical conductivity)는 물질 내 전자가 채워진 에너지 밴드(filled states)에서 비워있는 에너지 밴드(empty states)로의 천이들을 보여준다. 이 과정은 두 입자(전자와 홀)가 개입하는 과정(two-particle process)이다. 이론적으로 이 과정은 전류의 자체상관함수(self-correlation function)인 쿠보 공식(Kubo formula)으로 기술될 수 있다[4].

3. 확장된/일반화된 드루드 모델

이 절에서는 확장된 또는 일반화된 드루드 모델(extended Drude model)에서 정의될 수 있는 물리량인 광학적 자체에너지(optical self-energy)를 소개하려고 한다[5]. 도체 내의 자유전자(free electron)들을 잘 알려진 드루드 모델(Drude model)로 잘 기술된다. 이 모델에서

자유전자의 기여로 나타나는 복소 광학적 전도도(optical conductivity)는 아래 식과 같이 표현된다.

$$\tilde{\sigma}(\omega) \equiv i\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{1}{\omega + i1/\tau_{imp}}$$

여기서 ω_p^2 는 드루드 플라즈마 진동수(Drude plasma frequency)의 제곱으로 물질 내 자유전자의 수밀도에 비례하는 양이며, $\omega_p^2 \equiv 4\pi n_e e^2 / m_e$ 로 나타나며, n_e 는 자유전자의 수밀도(number density)이고, e 는 전자의 전하량이며, m_e 는 전자의 질량이다. $1/\tau_{imp}$ 는 물질 내 불순물에 의해 나타나는 전자들의 충돌율(scattering rate)이며 즉, τ_{imp} 는 자유전자들 사이의 평균 충돌시간으로 드루드 모델에서는 진동수에 의존하지 않는 상수이다. 이 진동수에 의존하지 않는 충돌율을 진동수의 함수인 물리량으로 바꾸어 주어 나타낸 모델이 확장된 드루드 모델(extended Drude model)이다. 이 확장된 모델로 전하나르개들 사이에 상호작용이 있는 물질계에서 전하나르개의 광학적 특성을 묘사할 수 있다. 그래서 최근 흥미를 끄는 전자들 사이에 강한 상호작용이 있는 물질계를 연구할 때 유용하게 이용될 수 있는 모델이다. 비스무스계 산화구리 고온 초전도체에 적용되어 연구된 흥미로운 연구결과가 발표되었다[5]. 복소 광학적 전도도($\tilde{\sigma}(\omega) \equiv \sigma_1(\omega) + i\sigma_2(\omega)$)의 실수부분과 허수부분은 항상 서로 크래머스-크로닉(Kramers-Kronig) 관계식으로 연결되며, 이는 인과관계(causality)를 만족시키는 것이다. 이러한 인과관계를 만족시키기 위해서는 진동수의 함수인 새로운 충돌율(scattering rate)은 복소함수가 되어야만 한다. 이러한 인과관계를 만족시키는 충돌율로 바뀌어진 확장된 드루드 모델에서의 광학적 전도도는 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\tilde{\sigma}(\omega) \equiv i\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{1}{\omega + [\omega\lambda^{op}(\omega) + i1/\tau^{op}(\omega)]}$$

$$\equiv i\frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{1}{\omega - 2\tilde{\Sigma}^{op}(\omega)}$$

여기서 $\lambda^{op}(\omega)$ 는 질량증진 함수(mass enhancement function)이며 $\lambda^{op}(\omega) + 1 \equiv m^*(\omega)/m_e$ 로 나타난다. $m^*(\omega)$ 는 진동수의 함수인 유효질량(유효질량)이며, m_e 는 전자의 질량이다. $1/\tau^{op}(\omega)$ 는 진동수의 함수인 광학적 충돌율(optical scattering rate)이다. $\lambda^{op}(\omega)$ 와 $1/\tau^{op}(\omega)$ 는 각각 전자들 사이의 상호작용으로 인한 질량의 증가정도와 상호작용의 지속(relaxation)정도를 나타낸다. 여기서 복소함수인 $\tilde{\Sigma}^{op}(\omega)$ 는 복소 광학적 자체에너지(optical self-energy)로 불리며, 유사입자(quasiparticle)의

자체에너지와 일대일 대응관계를 가지는 흥미로운 물리량으로 $\lambda^{op}(\omega)$ 와 $1/\tau^{op}(\omega)$ 간에 전하나르개 사이의 상호작용 정보를 가지고 있어, 전자들 사이의 상호작용을 연구하는데 중요한 역할을 할 수 있다[5]. 광학적 자체 에너지 ($\tilde{\Sigma}^{op}(\omega) \equiv \Sigma^{op}_1(\omega) + i\Sigma^{op}_2(\omega)$)의 실수부분과 허수부분은 다음의 식으로 표현될 수 있다.

$$-2\Sigma^{op}_1(\omega) \equiv \omega\lambda^{op}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\sigma_2(\omega)}{\sigma_1(\omega)^2 + \sigma_2(\omega)^2} - \omega$$

$$-2\Sigma^{op}_2(\omega) \equiv \frac{1}{\tau^{op}(\omega)} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_1(\omega)^2 + \sigma_2(\omega)^2}$$

광학적 자체 에너지의 실수부분과 허수부분은 서로 크래머스-크토닉 관계를 만족한다. 또한 광학적 자체 에너지는 유사입자(quasiparticle)의 자체에너지와 $d[\omega\tilde{\Sigma}^{op}(\omega)]/d\omega = \tilde{\Sigma}^{op}(\omega)$ 관계를 가진다[6]. 여기서 $\tilde{\Sigma}^{op}(\omega)$ 는 유사입자의 자체 에너지(self-energy)로 광전자 분광학기술로 직접 측정이 가능하고, 여기서 이 양은 운동량 공간(momentum or k-space)에서 평균된 에너지(진동수)만의 함수이다.

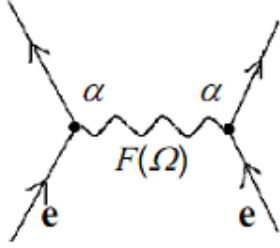


Fig. 1. Graphic description of the bosonic spectral function, $\alpha^2 F(\omega)$.

4. 앨런(Allen)의 공식과 그 확장된 공식들

광학적 자체 에너지는 전하나르개들 사이의 상호작용의 정보를 가진 양이기 때문에 전자들이 매개보존을 서로 교환하므로 상호작용을 하는 것을 잘 표현하는 물리량인 보존 스펙트럼 함수(bosonic spectral function)을 광학적 자체 에너지와 연관시킬 수 있으며 이들 두 양 사이의 관계가 1971년 앨런(Allen)에 의해서 얻어졌다[7]. 앨런의 공식은 광학적 자체 에너지의 실수부분(허수부분)과 매개보존 스펙트럼 함수(bosonic spectral function)를 관계를 보여주는 식으로 아래의 적분 방정식과 같다.

$$-2\Sigma^{op}_1(\omega) = 2 \int_0^\infty d\Omega \alpha^2 F(\Omega) \left[\frac{\Omega}{\omega} \ln \left| \frac{\Omega^2 - \omega^2}{\Omega - \omega} \right| + \ln \left| \frac{\Omega + \omega}{\Omega - \omega} \right| \right]$$

$$-2\Sigma^{op}_2(\omega) \equiv \frac{1}{\tau^{op}(\omega)} = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^\infty d\Omega \alpha^2 F(\Omega) (\omega - \Omega)$$

여기서 $\alpha^2 F(\Omega)$ 는 보존 스펙트럼 함수(bosonic spectral function)라 불리며, 전자들이 매개보존을 교환함에 의한 상호작용을 잘 나타내는 물리량이다(그림 1 참조). 여기서 α 는 전자와 매개보존과의 결합상수(coupling constant)이며 $F(\Omega)$ 는 매개보존의 스펙트럼 밀도(spectral density of the mediated boson)이다. 그림 1은 두 전자가 매개보존을 서로 주고받음으로 상호작용을 하는 것을 도식적으로 보여준다. 앨런의 공식은 절대온도 영도($T=0$ K)인 경우와 전자의 상태밀도(density of states)가 상수(에너지에 의존하지 않는)인 경우에만 성립하므로, 이론적인 경우에만 적용이 가능한 매우 한정적 적용된다. 그래서 1991년 술가(Shulga) 등에 의해서 절대온도 영도 이상의 일반적인 온도에서도 적용이 가능한 공식이 개발되었다[8].

$$-2\Sigma^{op}_2(\omega) \equiv \frac{1}{\tau^{op}(\omega)}$$

$$= \frac{\pi}{\omega} \int_0^\infty d\Omega \alpha^2 F(\Omega) \left[2\omega \coth\left(\frac{\Omega}{2T}\right) - (\omega + \Omega) \coth\left(\frac{\omega + \Omega}{2T}\right) + (\omega - \Omega) \coth\left(\frac{\omega - \Omega}{2T}\right) \right]$$

여기서 T 는 절대단위에서의 온도이다. 이제 이 공식을 이용하여 실제 측정된 실험데이터를 분석할 수 있다. 그러나 이 공식은 여전히 전자의 상태밀도가 상수인 경우에만 적용할 수 있으므로, 언더도핑 상태에 있는(underdoped) 산화구리 고온초전도체와 같은 전자의 상태밀도(density of states)가 상수가 아닌 에너지 의존적인 유사갭(pseudogap)을 가지는 물질을 분석할 때는 활용할 수 없었다. 그리하여 일반적인 온도와 전자의 상태밀도가 상수가 아닌 경우에도 적용할 수 있는 확장된 또는 일반화된 모델이 샤라보프(Sharapov)와 카봇(Carbotte)에 의해 2005년에 개발되었다[9].

$$\frac{1}{\tau^{op}(\omega)} = \frac{\pi}{\omega} \int_0^\infty d\Omega \alpha^2 F(\Omega) \int_{-\infty}^{+\infty} dz [N(z - \Omega) + N(-z + \Omega)]$$

$$\times [n_B(\Omega) + 1 - f(z - \Omega)][f(z - \omega) - f(z + \omega)]$$

여기서 $N(z)$ 는 정규화된(normalized) 유사입자의 상태밀도이고 에너지 의존적인 상태밀도를 다룰 수 있게 한다. $n_B(\Omega) = 1/(e^{\beta\Omega} - 1)$ 는 보존(boson)의 확률 분포함수(probability distribution function)이며, $f(z) = 1/(e^{\beta z} + 1)$ 는 페르미온(fermion)의 확률분포 함수이다. 여기서 $\beta \equiv 1/k_B T$ 이며 k_B 는 볼츠만 상수이다. 측정한 광학적 자체에너지로부터 보존 스펙트럼 함수를 이끌어내기 위해서는 위에서 언급한 모델인 적분 방정식을 전환방법(inversion method)으로 풀어 광학적 자체 에너지의 데이터를 피팅(fitting)하여 얻고자 하는 보존적 스펙트럼 함수($\alpha^2 F(\Omega)$)를 찾아낼 수 있다. 만약 유사입자의 상태밀도가 분명히 알려져 있고 실험 데이터가 가지는 불확정성을 고려하지 않으면, 이 공식을 이용하여 얻어진 보존적 스펙트럼 함수는 고유하다고 할 수 있다. 이 모델은 vertex 보정을 하지 않으나 vertex의 영향을 고온초전도체에서는 미미한 것으

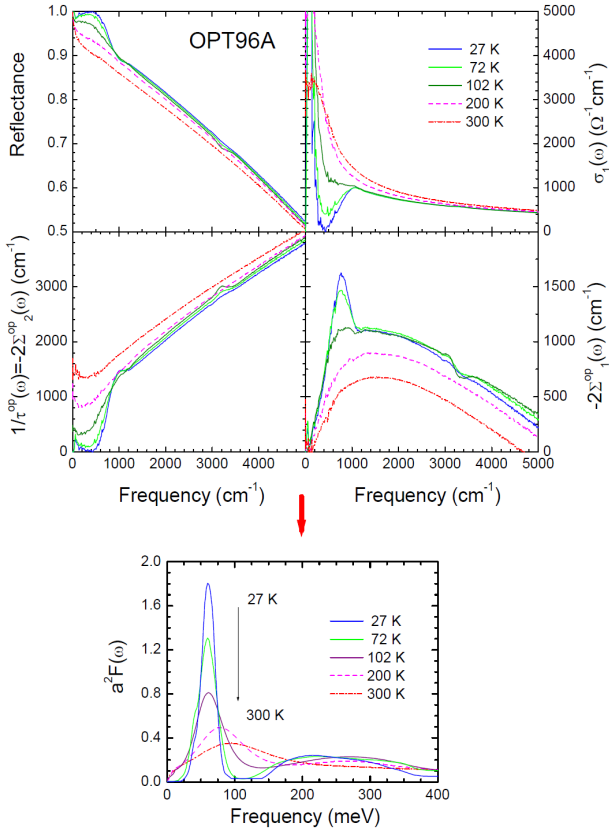


Fig. 2. Reflectance, the real part of the optical conductivity, the optical self-energy, and the bosonic spectral function of an optimally doped Bi-2212, respectively. Here $I^2\chi(\omega)$ is the same quantity as $\alpha^2 F(\omega)$.

로 알려져있다[10]. 가장 일반화된 모델을 활용하여 언더도핑상태에 있는(underdoped) 이트륨계 산화구리 고온초전도체(Y-123)의 광학적 자체 에너지 데이터의 피팅(fitting) 과정을 통하여 보존적 스펙트럼을 얻어내어, 비탄성 중성자산란(Inelastic Neutron Scattering) 실험결과와 비교하여 흥미로운 결론을 이끌어 내었다[11]. 또한 위의 적분 방정식은 아주 특별한 경우를 제외하고는 해석적으로(analytically) 풀 수가 없으므로, 실제의 활용에서는 대수적으로(numerically) 적분 방정식을 풀어서 보존적 스펙트럼 함수 $\alpha^2 F(\Omega)$ 를 구한다. 최근 두 가지 수치적인 전환방법(numerical inversion methods)이 소개 되었다[12, 13]. 지금까지 소개한 내용을 최적으로 도핑된(optimally doped) 비스무스계 산화구리 초전도체에 적용한 예가 그림 2에 한 예로 보였다. 여기서 $\alpha^2 F(\Omega)$ 는 최대엔트로피 전환방법(maximum entropy inversion method)으로 얻어졌다[12],[14]. 이 보존적 스펙트럼 함수는 실험 데이터로부터 확률적으로 가장 가능성이 있는 있는 함수이다. 이렇게 얻어진 보존적 스펙트럼 함수는 강한 온도의존성을 보여줌을 알 수 있다. 상온에서는 거의 특성이 없이 넓은에너지 영역에 퍼져있는 Millis-Monien-Pines (MMP) 타입[15]의 모양의 함수이나 낮은 온도에서는 스펙트럼의 재분배로 낮은 에너지에 영역에 뾰족한 봉우리가 나타나 점점 커지는 것을 보여주며 이 결과는 비탄성 중성자산란실험에서 발견된 자기공명모드의 특성과 유사하여, 이 뾰족한 봉우리는 자기공명모드에 대응되는 광학적 모드로 알려져 있

다. 좀 더 구체적이고 자세한 내용은 참고문헌 [16]을 참고하기 바란다.

5. 맥밀란(McMillan) 공식으로 초전도 전이온도 계산

지금까지 초전도를 포함한 전자들 사이에 강한 상호작용이 있는 물질의 광학전 전도도(또는 광학적 자체에너지)로부터 $\alpha^2 F(\Omega)$ 를 얻는 과정을 소개 했다. 이렇게 얻어진 보존 스펙트럼 함수가 모두 초전도 현상에 기여한다고 가정하면, 확장된 맥밀란 방정식(extended McMillan equation)을 이용하여 초전도 전이온도를 가늠할 수 있다. 확장된 맥밀란 방정식은 $\alpha^2 F(\Omega)$ 와 전이온도(T_c)와의 관계식으로 다음과 같다[13].

$$k_B T_c \cong 1.13 \hbar \omega_{in} \exp \left[-\frac{1 + \lambda}{g \lambda} \right]$$

여기서 λ 는 질량 재규격 인자(mass renormalization factor)로 $\lambda \equiv 2 \int_0^{\omega_c} \alpha^2 F(\omega) / \Omega d\Omega$ 로 정의된다. ω_c 는 차단에너지(cutoff energy)로 이 에너지 이상에서 $\alpha^2 F(\Omega)$ 를 영으로 간주한다는 의미이다. ω_{in} 은 보존 함수(bosonic spectral function)의 (로그)평균 에너지 값으로 $\omega_{in} \equiv \exp \left\{ (2/\lambda) \int_0^{\omega_c} \ln \Omega [\alpha^2 F(\Omega) / \Omega] d\Omega \right\}$ 로 정의된다. g 는 조절 매개변수로 0에서 1까지의 값을 가질 수 있으며, 1일때 가장 큰 전이온도를 주며, 0일때는 전이온도도 영이다. 이를 적용한 결과들이 논문에 소개되었다[16, 17].

6. DISCUSSION AND CONCLUSIONS

이상에서 소개한 방법은 고온초전도체를 포함한 전자들 사이에 강한 상호작용이 있는 물질 중 전도성을 띠는 물질의 연구에 활용이 가능하다. 이러한 확장된 드루드 모델은 단일성분(single component)을 이용한 분석 방법이다. 드루드 모드와 중적외선 모드를 이용한 두 성분을 이용한 해석도 시도된 바 있다[18]. 단일성분 분석방법은 두 성분 분석방법에 비해 장점이 있으며, 산화구리 고온초전도체에 적용하여 많은 흥미로운 결과를 도출하였으며, 또한 응집물리학에 이용되는 다른 분광학기술(Angle Resolved Photoemission, Inelastic Neutron Scattering, Tunneling, Raman, etc)의 결과들과의 비교가 용이하여 고온초전도체의 메커니즘을 밝히는 연구에 중요한 단서를 제공하고 있다[19].

ACKNOWLEDGMENT

The author acknowledges financial support from the National Research Foundation of Korea (NRFK Grant No. 20100008552).

REFERENCES

- [1] Frederick Wooten, *Optical Properties of Solids*, New York: Academic, 1972.
- [2] <http://www.phys.ufl.edu/~tanner/datan.html>
- [3] J Hwang, T Timusk and G D Gu, "Doping dependent optical properties of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ ", *J. Phys.: Condens. Matter* vol. 19, pp. 125208/1-32, Mar. 2007.
- [4] R. Kubo, "Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems", *J. Phys. Soc. Japan*, vol. 12, pp. 570-586, Mar. 1957.
- [5] J. Hwang, T. Timusk, and G. D. Gu, "High-transition-temperature superconductivity in the absence of the magnetic-resonance mode", *Nature*, vol. 427, pp. 714-717, Feb. 2004.
- [6] J. Hwang, E. J. Nicol, T. Timusk, A. Knigavko, and J. P. Carbotte, "High Energy Scales in the Optical Self-Energy of the Cuprate Superconductors", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, pp. 207002/1-4, May 2007.
- [7] P. B. Allen, "Electron-Phonon Effects in the Infrared Properties of Metals", *Phys. Rev. B*, vol. 3, pp. 30-41, Jan. 1971.
- [8] S. V. Shulga, O. V. Dolgov, and E. G. Maksimov, "Electronic states and optical spectra of HTSC with electron-phonon coupling", *Physica C* vol. 178, pp. 266-274, 1991.
- [9] S. G. Sharapov and J. P. Carbotte, "Effects of energy dependence in the quasiparticle density of states on far-infrared absorption in the pseudogap state", *Phys. Rev. B* vol. 72, pp. 134506/1-6, Oct. 2005.
- [10] R.S. Markiewicz, Tanmoy Das, A. Bansil, " Self Energy and Fluctuation Spectra in Cuprates: Comparing Optical and Photoemission Results" *Phys. Rev. B* vol. 86, pp. 024511/1-10, July 2012.
- [11] J. Hwang, J. Yang, T. Timusk, S. G. Sharapov, J. P. Carbotte, D. A. Bonn, Ruixing Liang, and W. N. Hardy, "*a*-axis optical conductivity of detwinned ortho-II $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.50}$ ", *Phys. Rev. B*, vol. 73, pp. 014508/1-12, Jan. 2006.
- [12] E. Schachinger, D. Neuber, and J. P. Carbotte, "Inversion techniques for optical conductivity data", *Phys. Rev. B*, vol. 73, pp. 184507/1-19, May 2006.
- [13] S.V. Dordevic, C. C. Homes, J. J. Tu, T. Valla, M. Strongin, P. D. Johnson, G. D. Gu and D.N. Basov, "Extracting the electron-boson spectral function $\alpha_2F(\omega)$ from infrared and photoemission data using inverse theory", *Phys. Rev. B* vol. 71, 104529/1-12, Mar. 2005.
- [14] J. Hwang, T. Timusk, E. Schachinger, and J. P. Carbotte, "Evolution of the bosonic spectral density of the high-temperature superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ " *Phys. Rev. B*, vol. 75, pp. 144508/1-6, Apr. 2007.
- [15] A. J. Millis, H. Monien, and D. Pines, "Phenomenological model of nuclear relaxation in the normal state of $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ ", *Phys. Rev. B*, vol. 42, pp. 167-178, July 1990.
- [16] J. Hwang, E. Schachinger, J. P. Carbotte, F. Gao, D. B. Tanner, and T. Timusk, "Bosonic Spectral Density of Epitaxial Thin-Film $\text{La}_{1.83}\text{Sr}_{0.17}\text{CuO}_4$ Superconductors from Infrared Conductivity Measurements", *Phys. Rev. Lett.* vol. 100, pp. 137005/104, Apr. 2008.
- [17] J. Hwang, "Electron-boson spectral density function of underdoped $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ and $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.50}$ ", *Phys. Rev. B*, vol. 83, pp. 014507/1-7, Jan. 2011.
- [18] M.A. Quijada, D.B. Tanner, R.J. Kelley, M. Onellion, and H. Berger, "Anisotropy in the *ab*-plane optical properties of $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ single-domain crystals", *Phys. Rev. B* vol. 60, pp. 14917-14934, Dec. 1999.
- [19] J. P. Carbotte, T. Timusk and J. Hwang, "Bosons in high-temperature superconductors: an experimental survey", *Rep. Prog. Phys.*, vol. 74, pp. 066501/1-43, May 2011.