經營科學
第30卷 第1號
2013年 3月, pp.167-181
http://dx.doi.org/10.7737/KMSR.2013.30.1.167

최소 자산제약 및 인플레이션을 고려한 자산 할당에 관한 연구

임 병 화*

Optimal Asset Allocation with Minimum Performance and Inflation Risk

Byung Hwa Lim*

■ Abstract ■

We investigate the dynamic asset allocation problem under inflation risk when the wealth of an investor is constrained with minimum requirements. To capture the investor's risk preference, the CRRA utility function is considered and he maximizes his expected utility at predetermined date of the refund by participation in the financial market. The financial market is supposed to consist of three kinds of financial instruments which are a risk free asset, a risky asset, and an index bond. The role of an index bond is managing inflation risk represented by price process. The optimal wealth and the optimal asset allocation are derived explicitly by using the method to get the European call option pricing formula. From the numerical results, it is confirmed that the investments on index bond is high when the investor's wealth level is low. However, as his wealth increases, the investments on index bond decreases and he invests on risky asset more. Furthermore, the minimum wealth constraint induces lower investment on risky asset but the effect of the constraints is reduced as the wealth level increases.

Keywords : Asset Allocation, Inflation Risk, Index Bond, Minimum Performance

논문접수일 : 2013년 03월 07일 　 논문수정일 : 2013년 03월 12일 　 논문게재확정일 : 2013년 03월 15일
* 수원대학교 금융공학대학원, byunghwalim@suwon.ac.kr

1. 서 론

금융 자산 투자의 근본 목적 중 하나는 투자자의 구매력 유지에 있다. 명목 수익률이 아닌 인플레이션을 고려한 실제 수익률을 일정 수준 이상 유지해야만 투자자의 구매력 유지가 가능하며 펀드매니저의 투자 역시 실제 수익률을 고려한 투자전략이 이루어져야만 한다. 2008년 글로벌 금융위기 이후 전 세계적으로 저성장 시대가 도래하였고 저성장 국면을 타개하기 위해 각국은 낮은 이자율을 유지하고 있으며 시장에 유동성을 공급하는 등의 통화정책을 펼치고 있다. 특히 금융 선진국 미국의 경우 기준 금리가 2012년 현재 1%에도 미치지 못하고 있으며 세계 금융시장에 유동성 공급의 역할을 했던 일본은 제로 금리 정책을 펼친 지 이미 10년이 훌쩍 넘었다. 우리나라도 미국의 양적완화(quantitative easing) 정책과 전 세계 유동성 증가의 영향으로 2012년 기준금리를 2차례 인하하면서 2013년 1월 현재 기준금리 2.75%로 역사상 최저금리를 유지하고 있는 중이다. 이러한 시장의 낮은 명목 이자율은 저축률 감소로 인한 국가 성장 잠재력 축소는 물론 인플레이션 상승으로 인한 일반 소비자의 구매력 감소로 이어지게 된다. 시중 은행의 예금 금리는 단기간에 조정하기 어렵다는 점을 고려하면 그 어느 때보다 인플레이션 관련 금융상품의 중요성이 중요해진 시점이다. 즉, Kothari and Shanken[11]에서 지적하였듯이 인플레이션 상승을 대비하기 위한 금융상품은 더 이상 선택이 아닌 필수가 되었으며 금융 자산 관리에 있어서도 반드시 고려해야 하는 대상이 되었다.

인플레이션과 함께 자산 관리에 있어 중요한 것이 자산의 제약 조건이다. 투자자의 자산관리 과정에서 원금 손실을 일정부분만 보장하는 계약은 주변에서 어렵지 않게 발견할 수 있다. 투자 손실의 최대 금액을 보장하게 되면 투자자 입장에서는 투자 자금에 대한 무한 책임에서 벗어 날 수 있으며 자산 관리자 입장에서는 더욱 많은 투자 자금 유치가 가능해 질 것이다. 특히 앞으로 국내 금융시장에 활성화 될 헤지펀드 시장에서 최대 손실액에 대한 보장은 중요한 투자 기준이 될 가능성이 높다. 현재 국내 자본시장에서 가장 활발하게 거래되는 ELS(Equity-Linked Security), DLS(Derivative-Linked Security)와 같은 금융상품의 특징이 원금보장은 물론 시중 은행보다 높은 수익률이 가능하기 때문이다. 특히 원금 비보장 상품에 비해 원금보장상품이 더 인기를 끈다는 것은 투자자들의 원금 손실에 대한 두려움이 크기 때문일 것이다. 따라서 자산제약을 고려한 투자 전략은 앞으로 자산관리자들에게 필수요소로 자리 잡을 것으로 예상된다.

대표적인 자산제약 조건으로는 금융기관의 위험관리를 위한 VaR(Value at Risk) 제약이 있다. 미리 정해진 시점까지의 최대손실 금액이 일정 수준을 벗어나지 않는 확률을 의미하는 것으로 국제결제은행 BIS 규제의 기초가 되는 지표이다. 현재 국내에서도 주기적으로 은행들은 VaR 지표를 조사하여 발표하면서 스스로의 위험관리 지표로 활용되고 있다. VaR와 비교되기도 하지만 엄밀히 이야기 하면 VaR에 포함되는 최소 자산제약도 대표적인 자산제약에 속한다. 미리 정해진 기준일에 총자산이 일정 수준 이상이 되어야 한다는 조건으로 최대손실 금액의 확률로 정의된 VaR와 구분된다고 할 수 있다. 그러나 VaR 제약과는 달리 보다 직접적이고 직관적인 이해가 가능하기 때문에 위험 회피 성향의 투자자들이 더욱 선호하는 위험관리 수단이다. 따라서 금융기관의 위험관리의 목적보다는 금융자산, 예를 들어 펀드나 금융상품의 투자 및 자산 관리에 더욱 적합한 자산제약이며 펀드매니저 등의 자산 관리자들에게 반드시 고려되어야 하는 조건이라고 할 수 있다. 최소 자산제약 조건에 대한 연구는 1987년 미국의 블랙 먼데이 등의 금융쇼크 등의 사건과 더불어 1990년부터 본격적인 연구가 시작되었으며 2000년 이후 IT 버블과 엔론 사태 이후에는 보다 정교한 위험관리를 위해 최소 자산제약과 VaR 제약을 고려한 투자 선택 모형의 연구가 활발히 진행되기도 하였다.

본 연구는 위에서 언급한 인플레이션 위험과 최소 자산제약을 동시에 고려한 자산 선택 모형에 관한 연구로 투자자 또는 펀드매니저 등의 자산관리자의 위험 회피 성향을 포함하기 위해 보편적으로 알려져 있는 투자 모형인 Markowitz 모형(Markowitz[12])이 아닌 Merton 모형(Merton[13, 14])의 투자 모형을 고려하였다. 기존의 자산 선택에 관한 연구는 Markowitz 모형을 기초로 하고 있으며 국내에서도 활발히 연구되었다(김성문, 김홍선[1]). Markowitz 모형은 실제 펀드 투자 기준으로 널리 활용되는 기법인 CAPM의 핵심 모형으로 자산의 평균과 분산만을 고려한 자산 선택 방법이다. 이 모형은 Merton이 연속시간에서의 포트폴리오 선택 문제를 해결한 이후 투자자의 위험 회피 성향을 포함한 투자 모형으로 발전하였다. Merton 모형의 특징은 위험 자산과 무위험 자산 간의 자산 선택뿐만 아니라 투자자의 소비 선택을 포함하여 개인 투자자의 기대 효용 극대화가 목적이라는 것이다. 따라서 기존의 자산 가치의 극대화에 개인의 투자 성향을 고려한 모형이라 평가 받는다. 연속시간에서의 Merton 모형은 다양한 방면으로 확장되어 연구되어 왔는데 대표적인 확장이 소비와 투자에 대한 제약을 포함하는 경우이다. 소비에 대한 제약으로는 실제 소비 형태를 반영한 것으로 소비 습관이나 성향을 포함하는 경우가 있다. 보다 구체적으로는 최소 생계비에 따르는 소비에 대한 최소 지출을 가정하는 것 또는 소비는 늘리기는 쉬우나 줄이기는 어렵다는 점을 고려하여 시간이나 자산에 따라 소비가 증가한다고 가정한 것들이 있다. 투자에 대한 제약으로는 공매도를 제한하거나 최소 투자 제약 등이 있으며 소비, 투자 이외의 다양한 제약 조건에 대한 연구들은 현재에도 활발하게 진행 중에 있다. 본 연구에서 고려하고자 하는 최소 자산제약 조건 또한 이 범주에 포함되는 것으로 헤지펀드를 비롯한 펀드 투자가 활성화되면서 더욱 중요한 제약 조건으로 인지되고 있다.

이러한 제약조건들 모두 실제 금융시장에서 쉽게 찾아 볼 수 있는 것들로 경제학적인 의미에서 중요한 것은 물론 펀드 매니저나 자산 관리자들과 같은 실제 투자자 입장에서도 중요한 의미를 갖는다. 그러나 상대적으로 투자 선택 문제에서는 연구가 충분히 되지 못한 것이 사실이다. 투자 모형으로 주로 사용되고 있는 Markowitz 모형은 자산제약 조건을 비롯하여 VaR 조건과 같은 위험관리를 포함한 모형을 해결하기 어려운 단점이 존재한다. 따라서 다양한 제약 조건을 포함하는 포트폴리오 선택 문제는 주로 Merton 모형을 통해 이루어져 왔고 투자 선택 문제뿐만 아니라 소비와 투자를 동시에 고려한 문제에 대해서도 활발하게 연구되었다(Boyle and Tian[4], Cuoco et al.[7], Tepla[17], Yiu[18], Basak and Shapiro[2], Pirvu[16] 등).

본 연구는 Merton 모형을 기반으로 최소 자산제약과 거시 요인인 인플레이션 위험을 동시에 고려한 최초의 모형이라 할 수 있다. Kothari and Shanken[11]이나 Gong and Li[9], 그리고 Brenna and Xia[5]에서와 같이 인플레이션 위험을 관리하기 위한 상품으로 국내 물가연동 채권과 비슷한 역할의 인덱스 본드를 포함하여 완전한 금융시장(complete market)을 가정하였다. 또한 위험관리를 위한 제약조건으로 Tepla[17]과 Boyle and Tian[4]에서와 같이 환급시점에 최소 자산수준을 제약하기로 한다. 우리는 모형을 통해 최적자산 수준은 물론 개별 자산의 최적 배분에 대하여 닫힌 해(closed-form solution)를 도출하였음은 물론, 과거 자료를 통해 얻은 변수 추정치를 이용하여 정량 분석을 함께 실시하였다. 분석 결과, 인플레이션을 포함한 모형에서의 투자는 자산의 크기에 따라 인플레이션 관련 상품의 투자가 현저하게 변한다는 사실을 확인하였다. 또한 최소자산제약 조건이 있는 경우는 그러한 조건이 없는 경우에 비해 위험 자산에 대한 투자가 줄어들고 동시에 안전자산에 대한 투자가 증가한다는 것을 알 수 있었다. 인플레이션 위험과 마찬가지로 최소 자산제약은 자산 수준이 높은 때보다 낮은 수준에서 그 영향이 크다는 것을 알 수 있었다. 마지막으로 위험 회피 성향에 따른 비교에서는 위험 회피 성향이 클수록 위험자산에 대한 투자가

감소하고 인플레이션 위험 관리를 위한 인덱스 본드의 투자가 증가함을 확인하였다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 인플레이션 위험을 포함하는 금융시장과 최소 자산제약, 그리고 투자 모형에 대해 소개하고 제 3장에서는 최적자산과 자산 배분에 대해 닫힌 해를 구해 준다. 제 4장에서는 구체적인 변수 값들을 직접 대입하여 정량적 분석을 하고 제 5장은 결론으로 마무리한다.

2. 모형의 설정

2.1 금융 시장

완전한 시장을 만들기 위해 자산 관리자가 속한 경제의 금융시장에는 예금시장, 주식시장, 그리고 채권시장으로 구성되어 있다고 가정하자. 예금시장에는 명목 이자율 R을 주는 무위험 자산 B_t가 있고 주식시장은 여러 위험자산으로 구성되어 있지만 뮤추얼 펀드 정리(mutual fund theorem)에 의하여 하나의 지표 S_t로 표현된다고 가정하겠다. 그리고 채권시장은 인플레이션을 대비하기 위한 시장으로 국내 물가연동 채권과 같은 인덱스 본드 I_t의 금융상품으로 구성된다고 가정한다. 대표적인 채권상품인 국채는무위험 자산으로 간주되어 예금시장과 동일한 역할을 하기 때문에 예금시장으로 대체하도록 하겠다. 인플레이션은 물가 변동으로 표현되고 물가 P_t와 위험자산 S_t가 로그정규분포를 따르는 GBM(geometric Brownian motion) 모형을 따른다고 가정했을 때, 각 금융상품은 다음의 확률 방정식(stochastic differential equation)을 갖는다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{dB_t}{B_t} = Rdt, \\
&\frac{dI_t}{I_t} = rdt + \frac{dP_t}{P_t},\ \frac{dP_t}{P_t} = \mu_{\mathrm{p}}\mathrm{dt} + \sigma_{\mathrm{p}}\mathrm{dW_t} \\
&\frac{dS_t}{S_t} = \mu_s dt + \sigma_s dZ_t
\end{aligned}
$$

여기에서 Z_t, W_t는 확률공간(Ω, $\mathcal{F}$, $\mathbb{P}$)에 속하는 두 개의 독립적인 표준 브라운 운동이며 각 확률 방정식의 변수들은 양의 상수 값을 갖는다고 가정한다. 또한 인플레이션을 포함하고 있는 인덱스 본드는 실질 이자율 r과 물가 인상률 μ_p의 합으로 표현되며 이는 한 경제의 명목 이자율은 실질 이자율과 기대 인플레이션의 합으로 결정된다는 Fisher 효과(Fisher effect)를 따르는 것이다.

예금, 인덱스 본드, 주식의 각 금융자산에 투자비율을 π_0, π_1그리고 π_2라고 한다면($\pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1$)자산 할당 이후 명목 자산 X_t^N의 변화는 각 금융자산의 변화를 이용하여 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dX_t^N} &= \pi_0 X_t^N \frac{dB_t}{B_t} + \pi_1 X_t^N \frac{dI_t}{I_t} + \pi_2 X_t^N \frac{dS_t}{S_t} \\
&= [\mathrm{R} + (\mathrm{r} + \mu_{\mathrm{p}} - \mathrm{R})\pi_1 + (\mu_{\mathrm{s}} - \mathrm{R})\pi_2]\mathrm{X_t^N dt} \\
&\quad + \pi_1 \sigma_p \mathrm{X_t^N dW_t} + \pi_2 \sigma_s \mathrm{X_t}^N \mathrm{dZ_t}
\end{aligned}
$$

반면, 인플레이션을 고려하게 되면 각 금융자산은 인플레이션에 의해 재조정 되어야 하며 물가상승률을 고려하여 실질 자산으로 변환한 자산 $X_t \doteq X_t^N / P_t$에 대한 확률방정식은 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dX_t} &= \mathrm{d}\left(\frac{X_t^N}{P_t}\right) = \frac{1}{P_t}\mathrm{dX_t^N} + \mathrm{X_t^N d}\left(\frac{1}{P_t}\right) + \left\langle \mathrm{dX_t},\ \mathrm{d}\left(\frac{1}{P_t}\right)\right\rangle(t) \\
&= [\mathrm{R} + (\mathrm{r} + \mu_{\mathrm{p}} - \mathrm{R})\pi_1 + (\mu_{\mathrm{s}} - \mathrm{R})\pi_2 - \mu_{\mathrm{p}} + (1 - \pi_1)\sigma_{\mathrm{p}}^2] \\
&\quad \times \mathrm{X_t dt} + (\pi_1 - 1)\mathrm{X_t}\sigma_p \mathrm{dW_t} + \pi_2 \mathrm{X_t}\sigma_s \mathrm{dZ_t}
\end{aligned}
$$

이는 인플레이션이 존재하지 않는 모형에서의 자산 방정식과 구별되는 것으로 실질 자산 변화라고 볼 수 있다. 물가변동과 위험자산의 불확실성이 서로 독립이기 때문에 명목 자산의 변화와 비교해보면 인덱스 본드의 프리미엄에 영향 미친다는 점을 확인할 수 있다.

우리는 최적의 자산 배분을 결정하기 위한 방법으로 동적 계획법(dynamic programming)이 아닌 마틴게일 방법(martingale method)을 활용하고자 한다. 따라서 자산 방정식으로 표현되는 동적 재산 제약 조건을 정적조건으로 변경해줘야 한다. 정적 조건을 위해 먼저 위험의 시장 가격(market price of risk) θ_1, θ_2과 지수 마틴게일(exponential martingale) 과정을 다음과 같이 정의한다.

$$\theta_1 = \sigma_s^{-1}(\mu_s - \mathrm{R}),\ \theta_2 = \sigma_p^{-1}(r + \mu_p - \sigma_p^2 - R)$$

$$\xi_t = \exp\left(1 - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_1^2 + \theta_2^2 dt - \int_0^t \theta_1 dW_t - \int_0^t \theta_2 dZ_2\right)$$

그러면 새로운 확률 측도 $\mathbb{Q}$는 $\mathrm{H_t} \doteq \exp(-rt)\xi_t$으로 정의되는 가격결정 커널(pricing kernel)을 이용하여 다음과 같이 결정된다.

$$\mathbf{E}^{\mathbb{Q}}[1_A] = \mathbf{E}[H_T 1_A] \quad \textit{for any } A \in \Omega$$

이렇게 정의된 새로운 확률 측도 $\mathbb{Q}$는 위험 중립 측도(risk neutral measure)라고 불리며 앞에서 정의된 실질 자산의 확률방정식을 브라운 운동을 따르는 항을 제외한 부분이 오직 실질 이자율에 의해서만 표현되는 확률방정식으로 변환시켜 준다. 보다 구체적으로는 두 개의 독립적인 브라운 운동은 위험 중립 측도 $\mathbb{Q}$에서는 다음과 같이 표현되고

$$d\widetilde{Z}_t = dZ_t + \theta_1 dt,\ d\widetilde{W}_t = dW_t + \theta_2 dt$$

이를 위의 자산의 확률 방정식에 대입하게 되면 다음과 같은 새로운 측도에서의 자산 확률 방정식을 얻게 된다.

$$d\mathrm{X_t} = r\mathrm{X_t}dt + \pi_2 X_t \sigma_s d\widetilde{Z}_t - (\pi_0 + \pi_2) X_t \sigma_p d\widetilde{W}_t$$

따라서 위 식의 양변에 실질 이자율로 할인되는 할인요소(discount factor) exp(-rt)를 곱하고 위험 중립 측도에서 기대값을 취해주면 브라운 운동이 국소 마틴게일(local martingale)이 되는 성질에 의하여 다음의 부등식을 얻을 수 있다.1)

$$\mathbf{E}[\mathrm{H_T} X_T] \le x$$

이 부등식은 자산의 동적 확률방정식을 일정 시점 T에서 정의되는 정적 제약 조건으로 변환된 것으로 마틴게일 방법에 활용되는 자산제약 조건이다.

2.2 포트폴리오 선택 모형과 최소 자산제약

개인 투자자는 직접 금융시장에 참여하여 투자 포트폴리오를 구성할 수도 있겠지만 시장 또는 금융상품의 접근성을 고려하여 전문 자산관리자에게 위임하였다고 가정한다. 그렇게 되면 펀드 매니저와 같은 자산 관리자는 물가 상승과 투자자의 위험회피 성향을 고려하여 기대 효율 극대화를 위한 자산 할당을 계획한다. 만약 투자자의 위험 회피성향(risk averse)을 고려하지 않는다면 자산 관리자는 단순히 자산 가치의 극대화를 위한 투자 전략을 세우면 되겠지만 위험자산의 급격한 가치 하락과 높은 물가인상 등 지나친 위험을 감당하기를 원하지 않는 투자자들은 일정 수준의 위험 안에서의 효용 극대화를 원하게 된다. 본 연구에서는 Arrow-Pratt의 상대적 위험회피도(measure of relative risk aversion)가 상수로 정의된 CRRA(constant relative risk aversion) 효용함수를 고려하겠다. 가장 널리 연구되거나 실제 투자 기준 설정에 활용되는 대표적인 효용함수로 개인의 자산 수준에 따라 최적의 소비 수준이 달라지는 특징이 있다. 그러나 본 연구에서는 소비에 대한 결정은 고려하지 않기 때문에 만기일에서 자산 가치 수준에 따라 정해지는 CRRA 함수에 대해 살펴보고자 한다. 만약 투자자가 위험회피도 $\gamma(\gamma > 0, \gamma \ne 1)$를 갖는 CRRA 효용함수를 따른다고 가정했을 때, 자산 관리자가 고려하게 되는 효용함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{U(X_T)} = \mathrm{e}^{-\beta T}\frac{1}{1-\gamma}X_T^{1-\gamma}$$

이는 만기일의 자산 수준에 따라 정의된 효용함수이며 β는 투자자의 할인가(discount factor)를 의미한다. 또한 자산 관리자의 입장에서는 투자자의 소비와는 무관한 투자 포트폴리오를 구성하며 만

1) 보다 자세한 설명은 Cox and Huang[6]과 Karatzas et al.[10]을 참고하라

기일 T는 투자 자금에 대한 환급일 또는 재계약 시점이 정해져 있다는 것을 뜻한다.

본 연구는 이 모형에 현실적인 제약 조건으로 최소 자산제약을 포함하고자 한다. 사실 최적자산 할당문제에 있어 만기일에서의 최소 자산제약에 관한 연구는 Tepla[17], Lakner and Nygren[12], Boyle and Tian[4] 등에서 꾸준히 진행되어 왔다. 개인의 효용 극대화 문제는 물론 펀드 매니저나 자산 관리자 등 실제 투자와 관련된 분야에서 자주 언급되고 연구되었던 제약조건이다. 주로 투자 모형으로 활용되는 Markowitz 모형을 기초로 하는 연구가 많았는데 이는 활용도 측면도 있겠지만 다루기 쉬운 특징이 있었다. 그러나 위에서 언급했듯이 평균-분산 모형은 다양한 투자 제한조건이나 투자자의 위험 회피 성향을 고려하지 못하는 단점이 있다. 그러한 단점을 보완하는 모형인 CRRA 효용함수를 비롯한 HARA(hyperbolic absolute risk aversion) 효용함수에 최소자산제약 조건을 포함하는 연구가 최근에도 지속되고 있다는 것은 그 중요성과 함께 다루기 쉽지 않기 때문으로 풀이된다.

최적자산제약은 금융기관의 위험관리에 주로 활용되는 VaR(Value at Risk) 제약과 구분된다. VaR는 투자 자산의 최소 기준을 제약하는 것이 아니라 최대 손실 금액이 일정 확률 이하로 발생하도록 하는 확률에 대한 제약이다. 따라서 VaR 제약은 최소자산제약을 포함하는 더 넓은 범위를 포함한다고 볼 수 있다. 경제학적으로 중요한 의미를 갖는 조건이지만 자산 할당 문제나 최적자산 선택의 문제에 있어 함께 고려하기 어려운 면이 존재한다. 소비에 관한 제약 조건과는 다르게 자산제약은 기본적으로 활용되는 자산의 변화에 직접적인 영향을 주는 요소이기 때문에 기존 문제 해결 방법을 직접적으로 활용하기 어려우며 제약 조건을 변화하거나 자산이나 효용함수에 포함시키는 중간과정이 필요하다. VaR 제약 조건을 포함하는 문제의 경우 아직까지 구체적인 해를 구하기 보다는 수치적인 해법을 통해 문제를 해결하고 있는 등 지금까지 다양한 방법으로 연구되어오고 있다(Cuoco et al.[7], Pirvu[16] 등).

여기에서 고려되는 자산의 제약 조건은 환급일 또는 재계약 시점에 투자 자산의 최소 수준을 가정하는 것으로 표현된다.

$$X_T \geq K,$$

일정 수준 K는 양의 상수로 가정하고 초기 자산수준은 최소 자산 조건보다 높다고 가정한다. 따라서 자산 관리자가 당면한 투자 목적함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad \mathbf{E}\left[e^{-\beta T}\frac{1}{1-\gamma}X_T^{1-\gamma}\right],\\&\text{subject to} \quad \mathbf{E}[H_T X_T] \leq x, \ \mathit{and} \ X_T \geq K.\end{aligned}$$

간단하게 정리하면, 자산관리자 또는 투자자는 만기일에 일정수준 이상의 자산에 의해서만 정의되는 CRRA 효용극대화를 위해 예금, 인덱스 본드, 위험 자산의 최적 포트폴리오를 선택하게 된다. 기존의 Merton 모형과는 달리 효용 극대화에 있어 소비의 선택은 영향을 받지 않으며 투자자의 위험 회피성향이 포함된 투자 모형이라 할 수 있다.

3. 최적자산 배분

이 장에서는 위의 목적함수를 해결하기 위한 방법과 그 결과에 대해서 논의한다. 먼저 문제 해결을 위해 우리는 라그랑지 상수를 이용하고자 한다. 목적함수에는 두 개의 자산제약이 포함되어 있어 문제를 간단하게 하는 방법으로는 최소 자산제약을 효용함수나 자산제약조건에 포함시키는 방법을 고려할 수 있겠다. 즉 자산제약 조건에 따라 범위를 나눠 해결하는 것이다. 그러나 이러한 방법은 경계조건이 존재하는 두 개의 편미분 방정식을 풀어야 하며 최적 투자 전략을 찾기 어려운 단점이 존재한다. 본 연구에서는 최소 자산제약 조건을 라그랑지 상수를 통해 표현한 쌍대문제(dual problem)

를 널리 알려진 Black and Scholes[3]의 옵션가격 공식을 이용할 수 있도록 변형하는 방법인 Tepla [17]의 방법을 활용하도록 하겠다.

목적함수의 두 제약 조건에 대한 라그랑지 상수를 각 λ, η라고 한다면 다음과 같이 표현된다.

$$\max_{X_T} \mathbf{E}\left[e^{-\beta T}\frac{1}{1-\gamma}X_T^{1-\gamma}\right] - \lambda \mathrm{E}[H_T X_T] - \eta K + \lambda x - \eta X_T,$$

따라서 1계 조건에 의해 최적자산 X_T는 다음의 조건을 만족하며

$$e^{-\beta T}X_T^{*-\gamma} - \lambda H_T - \eta = 0,$$

라그랑지 상수 η는 slackness 조건에 의해 최적자산과 함께 다음과 같이 주어진다.

$$\eta^* = [e^{-\beta T}X_T^{-\gamma} - \lambda H_T]^+,$$

$$X_T^* = \max(I(\lambda e^{\beta T}H_T), K),\ \ I(y) = y^{-\frac{1}{\gamma}}$$

여기에서 $I(y)$는 한계효용함수의 역함수로 최소자산제약이 없는 경우 최적자산을 나타내는 함수가 된다. 따라서 최소 자산제약을 고려하는 투자자의 t시점에서의 최적자산은 위험 중립 가격 결정 공식에 의해 결정된다.

$$\begin{aligned} X_t^* &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}[X_T^*] \\ &= e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}[max(I(\lambda e^{\beta T}H_T), K)] \end{aligned}$$

$E_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$은 위험중립 측도 $\mathbb{Q}$에서 t시점의 조건부 기댓값을 의미한다. 만약 $y_T = \lambda e^{\beta T}H_T$로 정의하면 t시점에서의 최적자산 다음과 같이 정리된다.

[보조 정리 1] *만기일에서의 최적자산이 K로 주어진 경우 t시점에서의 최적자산은 다음과 같다.*

$$X_t^* = e^{-r(T-t)}K + e^{-r(T-t)}\mathbf{E}_t^{\mathbb{Q}}[max(I(y_T) - K, 0)]$$

따라서 최소자산제약이 있는 경우의 최적자산은 미리 정해진 최소 자산의 현재 가치와 최소자산을 행사가격으로 간주하는 유로피안 콜옵션(European call option)의 합과 같다. 다시 말해, 최적자산은 최소자산에 $I(y_T)$에 따라 달라지는 프리미엄 값을 더한 값이다. 그리고 이 프리미엄은 $I(y_T)$의 값이 클수록 높은 값을 갖게 되며 CRRA 함수의 경우 한계효용의 역함수는 단조감소(strictly-decreasing) 함수를 갖기 때문에 한계효용이 낮은 경우 높은 프리미엄이 형성된다고 볼 수 있다. 이는 한계효용체감의 법칙에 의해 만기일에서의 자산이 높을수록 시점 t에서의 최적자산이 크다는 것을 의미한다. 그리고 최소자산제약이 그러한 조건이 없는 경우의 최적자산과 비교해 보면 없는 경우에 비해 낮은 최적자산을 갖게 된다는 것을 쉽게 알 수 있다. 이는 최소자산제약이 투자 범위를 제한하기 때문인데 결과적으로 투자자의 기대효용도 감소하게 된다. 보다 구체적으로는 자산 관리자 관점에서 미리 정해진 최소자산을 투자에 활용하지 않고 실질이자율을 받을 수 있도록 유지한 채 최소자산을 제외한 자산 분에 대해서만 투자전략을 세우는 것과 같다. 즉 높은 수익률을 가져다주는 위험자산에 투자할 수 있는 자산이 제한되어 최소자산제약이 없는 경우에 비해 상대적으로 낮은 최적자산을 유도하게 된다.

최적자산 가격을 구하기 위해서는 한계효용함수의 역함수로 정의되는 $I(y_T)$을 기초자산으로 하는 콜옵션 가격만을 구해주면 된다. 임의의 확률방정식으로 표현되는 기초자산에 의해 정의된 콜옵션의 가격결정 방법에는 크게 두 가지가 있다. 첫 번째 방법으로는 Feynman-Kac 공식을 활용한 방법으로 기초자산의 확률 과정에 의해 도출되는 편미분방정식과 만기일의 함수값에 의해 결정되는 경계 값으로 구성된 Cauchy 문제를 해결하는 방법이다. 또 다른 방법으로는 위험 중립 측도에서 기초자산의 확률 분포와 그 확률밀도함수를 이용하는 방법으로 위험중립 가격결정이라고도 불리는 방법이다. 특히 이 방법은 적분으로 정의되는 기댓값을 직접적으로 계산해야 하기 때문에 확률밀도함수에

대해 적분 가능한 구체적 함수가 주어져야 한다. 옵션의 기본 공식으로 잘 알려진 Black-Scholes 방정식은 기초 자산이 로그정규분포를 따르고 이는 표준 정규분포를 갖는 확률변수의 적분 계산으로 쉽게 변환이 가능하기 때문에 구체적인 공식을 얻을 수 있었다. 본 연구에서도 콜옵션의 기초자산으로 여길 수 있는 y_t가 로그정규분포를 따르고 역시 정규분포를 갖는 확률변수의 적분으로 변환이 가능하기 때문에 최적자산 가격을 결정하기 위해 두 번째 방법을 활용하고자 한다.

기초자산이 되는 $\mathrm{y_t}$의 확률 분포와 그 분포에 따른 확률밀도 함수는 정의에 의해 로그정규분포를 따른다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 그러나 우리는 위험중립 가격 결정방법을 활용하기 때문에 $\mathrm{y_t}$의 확률 방정식 또는 확률분포를 새로운 위험중립 측도에서 표현하여 계산하여야 한다. 위험중립 측도에서의 새로운 표준 브라운 운동의 정의에 따라 확률과정 $\mathrm{y_T}$는 다음과 같이 표현되고

$$\begin{aligned}\mathrm{y_T} = \mathrm{y_t}\cdot \exp\Big(\Big(\beta - r + \frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\Big)(T-t)\\ -\theta_1(d\widetilde{Z}_T - d\widetilde{Z}_t) - \theta_2(d\widetilde{W}_T - d\widetilde{W}_t)\Big)\end{aligned}$$

이는 다음의 평균과 분산을 갖는 로그정규분포를 따른다는 것을 쉽게 알 수 있다.

$$\ln y_t \sim N\Big(\Big(\beta - r - \frac{1}{2}(\theta_2^2+\theta_2^2)\Big)t,\ (\theta_1^2+\theta_2^2)t\Big)$$

위의 표현은 정규분포를 따르는 독립된 확률변수의 합은 다시 정규분포가 된다는 사실을 이용한 것으로 같은 방법으로 확률과정 $\mathrm{y_T}$는 정규분포를 따르는 하나의 확률변수로 표현이 가능하다. 두 확률변수를 다음과 같이 가정하고

$$Z = \frac{\widetilde{Z}_T - \widetilde{Z}_t}{\sqrt{T-t}},\quad W = \frac{\widetilde{W}_T - \widetilde{W}_t}{\sqrt{T-t}}$$

다시 한 번 두 정규분포의 합은 다시 정규분포가 된다는 사실을 이용하여 확률변수 M을 다음과 같이 정의하면

$$\mathrm{M} = -\frac{\theta_1 Z + \theta_2 W}{\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}} \sim \mathrm{N}(0,\,1)$$

이 확률변수 M은 표준정규분포를 따른다. 또한 확률과정 $\mathrm{y_T}$는 이 확률변수 M을 이용하여 다음과 같이 표현된다.

$$\mathrm{y_T} = \mathrm{y_t}\cdot e^{\left(\beta - r + \frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right)(T-t) + \sqrt{(\theta_1^2+\theta_2^2)(T-t)}\,M}$$

따라서 최적자산을 구하는 것은 표준정규분포를 갖는 하나의 확률변수로 정의된 기초자산의 콜옵션 가격결정과 동일한 계산이 되며 이를 위해서는 만기일에서의 자산가치(pay-off)를 새로운 확률 변수 M으로 변환하기만 하면 된다. 따라서 CRRA 효용함수의 경우 콜옵션의 만기일에서 양의 행사가격을 갖기 위한 조건 $\mathrm{y_T} < K^{-\gamma}$은 확률변수 M을 이용하여 표현하면 다음과 같다.

$$\mathrm{M} < -\frac{\left(\beta - r + \frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right)(T-t) + \ln\frac{y_t}{K^{-\gamma}}}{\sqrt{(\theta_1^2+\theta_2^2)(T-t)}} \equiv -d_2$$

따라서 최적자산은 위의 경계 조건을 이용하여 결정되며 Black-Scholes 방정식과 같이 표준정규분포의 확률밀도 함수를 이용하여 계산된다.

[정리 1] *인플레이션 위험을 고려하고 최소 자산 제약을 갖고 있는 투자자가 CRRA 효용함수로 나타내는 위험회피 성향을 갖는다고 할 때 시점 t에서의 최적자산 X_t^*는 다음과 같이 결정된다.*

$$X_t^* = y_t^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-(\alpha+r)(T-1)} N(d_1) + e^{-r(T-t)} K\cdot N(d_2),$$

여기에서 $y_t = \lambda^* \exp(-\beta t) H_t$, $\alpha = \frac{1}{\gamma}\Big(\beta - r + \frac{\gamma-1}{2\gamma}(\theta_1^2+\theta_2^2)\Big)$, $d_1 = -d_2 + \frac{\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}}{\gamma}\sqrt{T-t}$, *그리고* $N(\cdot)$*은 누적정규분포 함수이다. 또한 라그랑지 상수* λ^**는 다음의 조건을 만족시킨다.*

$$\mathbf{E}\Big[\int_0^T H_t X_t^* dt\Big] = x$$

위의 최적자산은 잘 알려진 Black-Scholes 방정식과 유사한 형태를 갖고 있다. 최소자산 기준은 콜옵션의 행사가격에 해당하며 기초자산이 포함된 항은 실질 이자율에 일정 상수를 더해준 값으로 할인된 값으로 정의된다. 그리고 정의에 의해 상수 $N(d_1)$은 자산이 클수록 1에 가까운 값을 갖는 반면 $N(d_2)$는 자산이 증가할수록 0의 값으로 수렴하게 된다. 만약 최소자산제약이 없다면 시점 t에서의 최적자산은 다음과 같이 주어지기 때문에

$$X_t^* = y_t^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-(\alpha+r)(T-t)}$$

최소자산제약이 있는 경우의 최적자산은 자산이 증가할수록 최소자산제약이 없는 경우의 값으로 수렴한다는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 최소 자산제약은 자산 수준이 낮을 때 크게 영향을 받게 되며 상대적으로 높은 자산 수준에서는 투자 전략에 크게 영향을 주지 못하는 제약조건이라고 볼 수 있다. 이는 자산의 크기로 결정되는 대부분의 위험관리 제약조건에서 나타나는 결과로 상대적으로 낮은 자산 수준에서는 기존의 투자전략이 크게 바뀔 수 있음을 시사한다.

임의의 시점에서 최적자산이 결정되면 최적 투자 포트폴리오의 결정은 Ito 정리를 활용한다. 최적자산을 확률과정 y_t의 함수라고 간주하고 Ito 정리를 대입하게 되면 최적자산의 확률방정식을 얻을 수 있다. 그러면 처음 동적 자산제약으로 구했던 자산의 확률 방정식과 비교하여 최적 포트폴리오를 구성할 수 있게 된다.

[정리 2] *최소자산제약과 인플레이션 위험을 고려하는 투자자의 위험선호도가 CRRA 효용함수로 주어져 있을 때 예금*(π_0^*), *인덱스 본드*(π_1^*), *위험자산*(π_2^*)*의 최적 투자 포트폴리오는 다음과 같이 주어진다.*

$$\pi_0^* X_T^* = (1-\pi_1^*-\pi_2^*)\cdot X_t^*$$

$$\pi_1^* X_t^* = X_t^* + \frac{\theta_2}{\gamma\sigma_p}\big(X_t - e^{r(T-t)}K\cdot N(d_2)\big)$$

$$\pi_2^* X_t^* = \frac{\theta_1}{\gamma\sigma_s}\big(X_t^* - e^{r(T-t)}K\cdot N(d_2)\big)$$

최적 포트폴리오는 예금, 인덱스 본드, 위험자산으로 구성되어 있으며 이들의 합은 최적자산 수준과 동일하다. 또한 누적정규분포는 상수 d_2에 의해서만 결정된다. 선술 했듯이 자산 수준이 낮을수록 $N(d_2)$가 높은 값을 갖게 되며 이는 위험자산의 포트폴리오를 감소시키는 역할을 하게 된다. 반면 인덱스 본드의 위험의 시장가치 θ_2는 일반적으로 음의 값을 갖기 때문에 자산 수준이 낮을수록 오히려 인덱스 본드의 포트폴리오가 증가하게 된다. 다시 말해 자산 수준이 낮은 경우 위험자산을 줄이고 인덱스 본드 투자를 늘려 인플레이션 위험에 대비하게 된다. 이는 낮은 자산 수준에서는 인플레이션 위험이 상대적으로 크게 작용하기 때문에 이를 관리하기 위한 투자 전략이 우선시 된다는 것을 의미한다. 반면 자산 수준이 높은 경우 인플레이션 위험의 영향력이 감소하여 인덱스 본드의 투자 비중을 줄이고 더 높은 수익률을 가져다주는 위험자산의 투자비중을 높이게 된다.

최소자산제약이 없는 경우 위험자산의 최적 포트폴리오는

$$\pi_{up}^* X_t^* = \frac{\theta_1}{\gamma\sigma_s} X_t^*$$

이며 이는 Merton 모형의 최적 포트폴리오와 같은 값이다. 즉, 우리 모형에서 최소 자산제약은 언제나 위험자산의 투자를 줄이는 방향으로 작용하게 된다. 이는 앞의 최적자산 수준이 제약이 없는 경우에 비해 낮게 형성되는 것과 무관하지 않다. 또한 만약 만기일에 미리 정해진 최소자산 수준인 K 만큼을 제외한 자산가치를 받는다고 가정할 때 위험자산의 최적 포트폴리오는

$$\pi_{\mathrm{k}}^{*}\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*}=\frac{\theta_{1}}{\gamma\sigma_{s}}\left(X_{t}^{*}-e^{r(T-t)}K\right)$$

이며 이는 $N(d_2)$의 유무에 따라 우리의 결과와 구별된다. $N(d_2)$는 항상 0과 1사이의 값을 갖기 때문에 최소자산제약을 갖는 경우의 최적 포트폴리오는 언제나 최소자산제약이 없는 경우 $\pi_{\mathrm{up}}^{*}\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*}$와 만기일에 최소자산을 제외한 자산가치를 받는 경우 $\pi_{\mathrm{k}}^{*}\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*}$ 사이의 값을 갖게 된다. 추가적으로 $N(d_2)$의 특성상 자산 수준이 낮은 경우에는 최소자산을 제외한 자산가치를 받는 것과 비슷한 투자전략을 세우고 자산 수준이 높은 경우는 자산제약이 없는 것처럼 행동하게 된다.

4. 결과 분석

정량적 결과를 분석하기 위해 일정한 변수 값을 가정한 상황에서 최적의 투자 포트폴리오를 구해보도록 하겠다. 최적자산 및 최적 포트폴리오를 구하기 위해서는 기초자산 역할을 하는 $\mathrm{y_t}$의 값을 결정해야 한다. [정리 1]에 의하여 라그랑지 상수는 초기 자산 x에 의해 결정되지만 t시점에서 $\mathrm{y_t}$는 최적자산 $\mathrm{X_t^*}$와 일대일 대응이 된다는 사실을 이용하면 라그랑지 상수 값을 찾아 줄 필요가 줄게 된다. 모형의 수치적 분석을 위해서 우리는 두 단계의 과정을 진행한다. 먼저확률과정 $\mathrm{y_t}$에 대해 임의의 값을 설정하고 그에 해당하는 $\mathrm{d_1}, d_2$을 먼저 구해준다. 그 후 최적자산 결과에 따라 $\mathrm{N(d_1), N(d_2)}$ 값들을 이용해 최적자산을 얻을 수 있으며 $(\mathrm{y_t}, X_t^*)$의 그래프를 통해 확률과정 $\mathrm{y_t}$와 그에 대응되는 최적자산의 값을 도출해 낼 수 있다. 그리고 그 때의 최적 포트폴리오를 구하게 되면 우리가 원하는 최적자산에 따른 개별 자산의 포트폴리오를 계산할 수 있다.

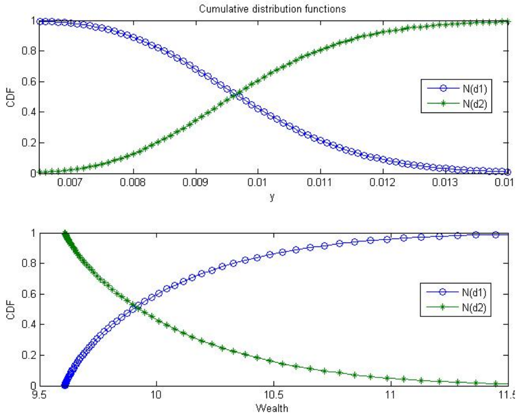
일반성을 잃지 않기 위해 Gong and Li[9]에서 사용한 변수 값들을 대입하도록 하겠다. 다음의 변수들은 미국의 과거 자료를 통해 얻어진 값으로 Dudley et al.[8]에서 추정한 값들을 기초로 하고 있다. 실제 명목이자율에서 인플레이션 상승률과 실질 이자율을 빼준 인플레이션 위험 프리미엄은 양의 값을 갖지만 이론적으로 음의 값을 갖기도 한다고 알려져 있다. 우리는 실제 자료를 통해 얻은 변수 값들을 활용하여 펀드매니저의 최적 포트폴리오를 분석하도록 하겠다.

〈표 1〉 변수의 값

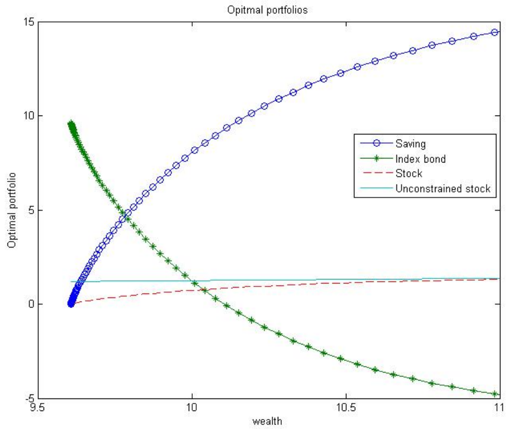
변수	값	변수	값
r	0.03	R	0.07
β	0.05	K	10
μ_{p}	0.035	μ_{s}	0.09
σ_{p}	0.05	σ_{s}	0.2

투자자의 위험 회피 성향을 나타내는 CRRA 효용함수의 위험회피도 $\gamma=2$를 가정하여 먼저 확률과정 $\mathrm{y_t}$와 그에 대응하는 $\mathrm{N(d_1), N(d_2)}$의 값들을 찾아주면 <그림 1>과 같다. <그림 1>의 두 번째 그림은 확률과정 $\mathrm{y_t}$와 $\mathrm{N(d_1), N(d_2)}$의 값들을 이용하여 이에 대응되는 자산 가격을 이용하여 자산 가격에 대응하는 $\mathrm{N(d_1), N(d_2)}$의 값들을 찾아준 것이다. 실제 포트폴리오 구성에 직접 활용되는 값은 $\mathrm{N(d_2)}$이며 우리가 예상한대로 자산이 증가할수록 감소한다는 것을 알 수 있다.

<그림 2>는 이 값들을 이용하여 포트폴리오를 나타낸 그래프이다. 최소 자산의 기준을 10으로 가정했지만 이는 미리 정해진 미래 시점에서의 조건

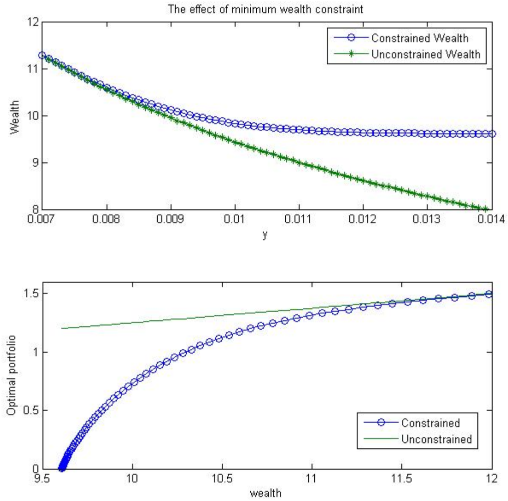


〈그림 1〉 자산에 따른 표준누적정규분포



〈그림 2〉 최적 포트폴리오

이며 최적 포트폴리오나 최적자산은 이를 현재 시점으로 할인된 가치로 살펴볼 것이다. 자산이 낮은 수준에서는 인플레이션 위험이 상대적으로 크게 작용하기 때문에 투자자는 자신의 자산 대부분을 인플레이션 위험을 관리하기 위해 인덱스 본드에 투자한다. 그러나 자산이 점점 증가함에 따라 주식 투자와 예금시장에 투자하는 비중을 늘리는 것을 확인할 수 있으며 자산이 일정 수준을 넘어간 경우 인덱스 본드의 공매도를 통해 저축의 양을 늘린다. 이는 인플레이션 위험 프리미엄이 양의 값을 갖기 때문에 이 경우에는 인덱스 본드에 투자하는 것보다 저축하는 것이 보다 높은 수익률을 가져다주기 때문으로 풀이된다. 실선으로 표시된 것은 최소자산제약이 없는 경우의 위험 자산의 투자를 나타내는 것으로 제약 조건이 있는 경우에 비해 항상 높은 값을 형성하고 있다는 것을 확인할 수 있다. 뿐만 아니라 자산 수준이 증가함에 따라 위험 자산의 투자 수준이 수렴하게 되는데 이는 최소자산제약이 높은 자산 수준에서는 큰 영향을 주지 못함을 의미한다.

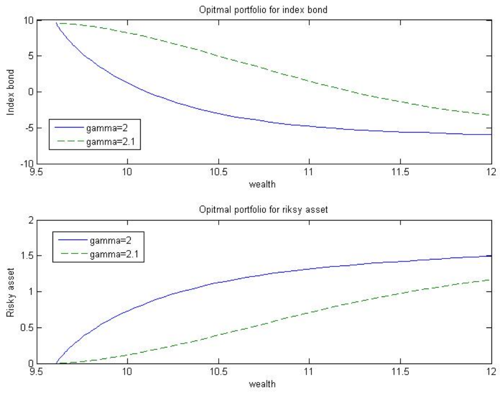


〈그림 3〉 최소자산제약의 영향

<그림 3>은 최소자산제약이 투자자에게 미치는 영향을 보여주고 있다. 먼저 확률과정 y_t와 최적자산은 최소자산제약에 상관없이 일대일 대응을 이루고 있다. 다만 최소자산제약이 있는 경우, 같은 y_t에 대하여 높은 자산 수준을 나타내지만 포트폴리오에서는 반대의 모습을 보여주고 있다. 즉, 같은 자산 수준에 따라 위험자산에 투자하는 자금은 최소자산제약이 있는 경우에 더욱 낮은 값을 갖는다. 이는 최소자산제약에 의해 투자자가 자유롭게 운용할 수 있는 자금에 제한이 생기게 되며 이는 불확실성이 존재하는 위험자산 투자에 먼저 영향을 미치게 되기 때문이다. 무엇보다 우리의 모형에서 물가변동과 위험자산의 불확실성이 서로 독립이라고 가정했기 때문에 최소자산제약은 위험자산

투자 제한에 더욱 영향을 미치는 것으로 보인다. 결과적으로 최소자산제약이 있는 경우에는 제약조건이 없는 경우에 비해 위험자산의 투자는 줄이고 인덱스 본드나 저축을 늘리게 되는데 이는 자산 수준이 낮은 경우 더욱 극명하게 나타나게 된다. 그러나 충분히 자산 수준이 큰 경우에는 앞에서와 마찬가지로 제약조건이 없는 경우의 포트폴리오로 수렴한다는 것을 확인할 수 있다.

마지막으로 투자자의 회피 성향에 따라 투자 전략도 달라지게 된다. 위험 회피 성향이 클수록 위험자산의 투자비중은 줄이고 인덱스 본드나 예금시장과 같이 보다 안정적인 자산을 선호할 것으로 예상할 수 있다. <그림 4>는 실제로 이러한 현상을 확인해주고 있다. 위험회피도를 나타내는 γ의 값이 클수록 인덱스 본드의 투자는 늘리고 위험자산의 투자를 감소시킨다. 이러한 사실은 투자자나 자산관리자의 위험회피 성향이 투자 전략을 세우는데 중요한 결정요인으로 작용한다는 것을 의미한다.



〈그림 4〉 위험회피 성향에 따른 투자 변화

지금까지 우리는 최소자산제약과 인플레이션 위험이 따른 최적 포트폴리오에 대해서 살펴보았다. 최소자산제약과 인플레이션 위험은 자산 수준이 낮은 경우에 크게 영향을 미치는 요인이며 자산 수준이 증가할수록 그 영향은 점차 사라진다는 사실을 알았다. 물론 이는 물가변동과 위험자산의 불확실성이 독립이라는 가정에 의한 결과로 상관관계를 가정한 경우에는 위험자산의 투자에 장기적으로 영향을 미칠 것으로 예상된다. 그러나 그 차이 역시 자산 수준이 증가할수록 적어질 것이며 우리가 얻은 결과와 크게 다르지 않을 것으로 예상된다. 또한 투자자의 위험회피 성향이 클수록 위험자산의 투자를 줄이고 안전자산의 투자를 늘려준다는 것을 정량적으로 확인하였고 투자 수준이 위험회피도에 민감하게 반응함을 알 수 있었다.

5. 결 론

본 연구에서는 인플레이션 위험이 존재하는 경제에서 투자자가 최소자산을 보장하는 투자 자산배분에 대해 살펴보았다. 투자자의 위험회피 성향을 고려하는 투자모형에서 인플레이션 위험과 최소자산제약을 동시에 고려하는 최초의 모형이라는 점에서 본 연구의 의미가 있으며 그 결과는 다음과 같다. 먼저 최적 자산과 투자 포트폴리오에 대해 닫힌 해를 구해 주었다. 그리고 수치적 결과로 인플레이션 위험은 자산 수준이 낮은 경우에 큰 영향을 받게 되고 높은 자산 수준에서는 인플레이션의 위험에서 자유로워진다는 것을 정량적으로 확인하였다. 최소자산제약은 최적자산수준을 낮게 형성하는 역할을 하며 그 영향은 위험자산의 투자 포트폴리오에 직접적으로 영향을 주게 된다. 특히 위험자산에 대한 투자 포트폴리오는 언제나 최소자산제약이 없는 경우와 만기일에 최소자산 수준만큼의 자산 가치를 제외하는 경우의 포트폴리오 값 사이에 존재하게 되며 자산 수준이 증가할수록 제약조건의 영향이 감소하게 된다.

모형으로부터의 결과는 자산 관리자나 전문 투자자에게 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 널리 활용되는 기존의 투자모형인 Markowitz 모형에서는 인플레이션을 고려하지 못하고 있다. 또한 위험회피 성향이 존재하는 투자자에게 최소자산제약은 일종의 위험관리를 포함하는 것으로 실제 투자에 있어 주요한 결정 요인이 된다. 본 연구에서 논의

한 바와 같이 자산 수준에 따라 인플레이션이 투자에 미치는 영향이 상이하고 특히 낮은 수준에서는 인플레이션 위험을 관리하기 위해 인덱스 본드 투자 비중을 높여야 함을 알 수 있었다. 반면 자산 수준이 높은 경우 인플레이션 위험은 투자 자산 배분에 큰 영향을 미치지 못하게 되며 최소 자산제약 또한 큰 영향을 주지 못하게 된다는 것을 정량적으로 확인하였다. 이는 충분히 큰 금액의 자산 관리에 있어 인플레이션과 최소자산제약은 투자전략을 세우는데 중요한 결정요인이 되지 못한다는 것을 의미한다.

현재까지 투자자들이 최적의 자산 배분에 있어 인플레이션 위험이 간과되어 온 것이 사실이다. 국내외에서 인플레이션 위험을 관리하기 위한 다양한 금융상품들을 개발, 거래하고 있는 것과는 대조적으로 실제 투자 모형에는 그 노력이 부족하였다. 본 연구는 투자모형에 있어 인플레이션 위험이 매우 중요하다는 점을 강조하고 있으며 앞으로 더욱 정교한 투자모형을 위한 노력이 필요하다는 것을 시사하고 있다. 또한 그 중요성이 더욱 커지고 있는 위험관리 수단을 투자모형에 포함시킴으로써 위험회피 성향이 존재하는 투자자들에게 보다 정교한 투자 가이드라인 제공을 가능케 하였다.

본 연구는 다양한 방면으로 확장이 가능할 것으로 보인다. 먼저 소비를 포함한 개인 투자자에 대한 모형으로 확장이 가능하다. 이 경우 개인 투자자는 정년퇴직과 같이 미리 정해진 미래의 시점에 자신의 자산 수준에 대한 목표를 잡고 소비·투자 선택을 통해 효용 극대화를 꾀하게 된다. 이런 과정에서 인플레이션 위험은 소비와 투자 선택 모두 영향을 미치게 될 것이며 생애 주기형 자산 관리에 있어 일종의 벤치마크 모형이 될 수 있다. 또 다른 확장으로는 최소자산제약을 대신하여 금융기관의 대표적인 위험관리 지표인 VaR를 활용한 위험관리에 대한 연구를 고려할 수 있다. 본 연구에서는 금융자산을 통해 효용 극대화를 목적으로 하는 투자자에 집중하였지만 정부나 여러 투자자들에게 감시·감독을 받는 금융기관이나 펀드 등의 경우에는 위험관리 지표로 VaR가 널리 활용되고 있다. 직접적인 자산 수준을 제한하는 것이 아니라 자산의 최대 손실에 대한 분포를 바탕으로 확률을 제한하기 때문에 보다 정교한 접근 방법을 필요로 한다. 이 밖에도 불완전 시장에서의 모형, 공매도 금지 등 실제 금융투자 환경에서 자주 볼 수 있는 가정들을 추가할 수도 있겠지만 앞으로 인플레이션 관리와 위험관리는 투자 모형에 있어 주요한 결정요인 될 것이라는 점은 반드시 명심해야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 김성문, 김홍선, “한국 주식시장에서 비선형계획법을 이용한 마코위츠의 포트폴리오 선정 모형의 투자 성과에 관한 연구”, 『경영과학』, 제26호, 제2권(2011), pp.19-35

[2] Basak, S. and A. Shapiro, "Value-at-Risk-Based Risk Management : Optimal Policies and Asset Prices," *The Review of Financial Studies*, Vol.14, No.2(2001), pp.371-405.

[3] Black, F. and M. Sholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economics*, Vol.81(1973), pp.737-654.

[4] Boyle, P. and W. Tian, "Portfolio management with constraints," *Mathematical Finance*, Vol.17, No.3(2007), pp.319-343.

[5] Brennan, M.P. and Y. Xia, "Dynamic Asset Allocation under Inflation," *Journal of Finance*, Vol.57(2002), pp.1201-1238.

[6] Cox, J.C. and C.F. Huang, "Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process," *Journal of Economic Theory*, Vol.49(1989), pp.33-83.

[7] Cuoco, D., H. He, and S. Isaenko, "Optimal Dynamic Trading Strategies with Risk Limits," *Operations Resarch*, Vol.56, No.2(2008), pp.358-368.

[8] Dudley, W., T. Macirowsk, H. Richman, S. Strongin, and J. Youngdahl, "Treasruty Infaltion-Protection Securities : A Useful Tool, But Not a Cure-all," *mimeo, Golman Sachs Investment Research/Fixed Income Research*, 1996.

[9] Gong, N. and T. Li, "Role of index bonds in an optimal dynamic asset allocation model with real subsistence consumption," *Applied Mathematics and Computations*, Vol.174(1974), pp.710-731.

[10] Karatzas, I., J. Lehoczky, and S. Shreve, "Optimal portfolio and consumption decisions for a 'small investor' on a finite horizon," *SIAM Journal of Control and Optimization*, Vol.25(1987), pp.1557-1586.

[11] Kothari, S.P. and J. Shanken, "Asset allocation with inflation-protected bonds," *Financial Analyst Journal*, Vol.60(2004), pp.54-70.

[12] Lakner P. and L.M. Nygren, "Portfolio optimization with downside constraints," *Mathematical Finance*, Vol.16, No.2(2006), pp.283-299.

[13] Markowitz, H., "Portfolio selection," *Journal of Finance*, Vol.7(1952), pp.77-91.

[14] Merton, R.C., "Lifetime portfolio selection under uncertainty : the continuous-time case," *The Review of Economics and Statistics*, Vol.21(1969), pp.247-257.

[15] Merton, R., "Optimum, consumption and portfolio rules in a continuous-time model," *Journal of Economic Theory*, Vol.3(1971), pp.373-411.

[16] Pirvu, T.A., "Portfolio optimization under the Value-at-Risk constraint," *Quantitative Finance*, Vol.7, No.2(2007), pp.125-136.

[17] Tepla, L., "Optimal investment with minimum performance constraints," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.25(2001), pp.1629-1645.

[18] Yiu, K.F.C., "Optimal portfolios under a value-at-risk constraint," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.28(2004), pp.1317-1334.

〈부 록〉

[정리 1 증명] 최적자산에 포함된 콜옵션의 가격은 누적 정규분포함수 N(•)을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{Q}}\left[\left(y_T^{-\frac{1}{\gamma}}-K\right)^{+}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\left(y^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\frac{1}{\gamma}\left\{\left(\beta-r+\frac{1}{2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\tau+\sqrt{(\theta_1^2+\theta_2^2)\tau}\cdot m\right)\right\}}-K\right)e^{-\frac{m^2}{2}}dm \\
&= \mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\alpha\tau}N(d_i)-KN(-d_2)
\end{aligned}
$$

여기에서 $\alpha=\frac{1}{\gamma}\left(\beta-r+\frac{\gamma-1}{2\gamma}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right)$, $d_1=-d_2+\frac{\sqrt{\theta_1^2+\theta_2^2}}{\gamma}\sqrt{\tau}$, 그리고 $\tau=T-t$이다.

따라서 콜옵션 가격을 이용하여 최적자산을 표현하면 $\delta=\alpha+\mathrm{r}$에 대하여 다음과 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*} &= e^{-r(T-t)}\left\{\mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{e}^{-\alpha(\mathrm{T}-\mathrm{t})}N(d_i)+K(1-N(-d_2))\right\} \\
&= \mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-\delta(T-t)}N(d_1)+e^{-r(T-t)}K(1-N(-d_2))
\end{aligned}
$$

[정리 2 증명] 최적자산은 확률과정 y_t의 함수이며 Ito 공식을 대입하여 최적자산의 동적 과정을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
d\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*} &= \mathrm{d}\left\{\mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-(r+\alpha)(T-t)}N(d_1)+e^{-r(T-t)}K\cdot N(d_2)\right\} \\
&= \left\{(\mathrm{r}+\alpha)\mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-(r+\alpha)(T-t)}N(d_1)+re^{-r(T-t)}K\cdot N(d_2)\right\}dt \\
&\quad -\frac{e^{\delta(T-t)}}{\gamma}y_t^{-\frac{1+\gamma}{\gamma}}N(d_1)y_t\left((\beta-r+\theta_1^2+\theta_2^2)dt-\theta_1 d\widetilde{Z}_t-\theta_2 d\widetilde{W}_t\right) \\
&\quad +\frac{1+\gamma}{2\gamma^2}y_t^{\frac{1+2\gamma}{\gamma^2}}e^{-(r+\alpha)(T-t)}N(d_1)(\theta_1^2+\theta_2^2)dt \\
&= \mathrm{r}\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*}dt+\mathrm{y}_{\mathrm{t}}^{-\frac{1}{\gamma}}e^{-(r+\alpha)(T-t)}N(d_1)\left[\alpha-\frac{1}{\gamma}(\beta-r+\theta_1^2+\theta_2^2)+\frac{1+\gamma}{2\gamma^2}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]dt \\
&\quad +\frac{e^{-(r+\alpha)(T-t)}}{\gamma}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}N(d_1)\theta_1 d\widetilde{Z}_t+\frac{e^{-(r+\alpha)(T-t)}}{\gamma}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}N(d_1)\theta_2 d\widetilde{W}_t \\
&= \mathrm{r}\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*}dt+\frac{e^{-(r+\alpha)(T-t)}}{\gamma}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}N(d_1)\theta_1 d\widetilde{Z}_t+\frac{e^{-(r+\alpha)(T-t)}}{\gamma}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}N(d_1)\theta_2 d\widetilde{W}_t
\end{aligned}
$$

따라서 앞에서 구했던 위험 중립 척도로 변환된 동적 자산 과정의 계수들을 서로 일치시켜 포트폴리오를 결정하게 된다. 특히 브라운 운동 항의 계수들이 개별 자산의 투자비율(π_i^*, $i=1,2,3$)을 포함하고 있으며 개별 자산의 투자비율의 합이 1이라는 사실을 이용해 다음의 최적 포트폴리오를 구해줄 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\pi_2^*\mathrm{X}_{\mathrm{t}}^{*} &= \frac{\theta_1}{\gamma\sigma_s}e^{-\delta(T-t)}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot N(d_1)=\frac{\theta_1}{\gamma\sigma_s}\left(X_t^*-e^{r(T-t)}K(1-N(d_2))\right) \\
-(\pi_0^*+\pi_2^*)X_t^* &= \frac{\theta_2}{\gamma\sigma_p}e^{-\delta(T-t)}y_t^{-\frac{1}{\gamma}}\cdot N(d_1)=\frac{\theta_2}{\gamma\sigma_p}\left(X_t^*-e^{r(T-t)}K(1-N(d_2))\right)
\end{aligned}
$$