논문 2012-50-3-18

구조적인 제약을 갖는 정적 출력 되먹임 안정화 제어기

(Structured Static Output Feedback Stabilization)

이 준 화*

(Joon Hwa Lee)

요 약

본 연구에서는 정적 출력 되먹임 제어기를 구하기 위한 비선형 행렬 부등식 조건과 비선형 최적화 문제를 제안한다. 제안된 최적화 문제는 선형 행렬부등식 제약 조건과 비선형 목적함수를 가지며, 구조적인 제약이 있는 제어기 설계에도 적용할 수 있음을 보인다. 비선형 목적함수를 선형화시키고, 선형화된 최적화 문제를 반복적으로 푸는 방법으로 제안된 비선형 최적화 문제를 풀어 정적 출력 되먹임 제어기를 구할 수 있다. 제안된 방법을 실제 문제에 적용하여 그 유효성을 보인다.

Abstract

In this paper, a nonlinear matrix inequality problem and a nonlinear optimization problem are proposed for obtaining a structured static output feedback controller. The proposed nonlinear optimization problem has LMI (Linear Matrix Inequality) constraints and a nonlinear objective function. Using the conditional gradient method, the nonlinear optimization problem can be solved. A numerical example shows the effectiveness of the proposed approach.

Keywords : static output feedback, structured control, stabilization, LMI, conditional gradient method

I. 서 론

정적 출력 되먹임 (static output feedback) 제어기 설계는 BMI(bilinear matrix inequality)로 표현되는 NP-hard 문제로, 해석적인 방법으로는 해를 구할 수 없다.[1] 따라서, 대부분의 연구들이 BMI 로 주어진 문제를 LMI 형태의 문제로 바꾸고, 수치적인 방법을 사용하여 해를 구하고 있다.[2~3]

분산 제어기 (decentralized control) 및 PID 제어기와 같이 제어기의 형태가 미리 정해진, 구조적인 제약이 있는 제어기(structured control) 설계 문제 또한 어려운 문제이며, 정적 출력 되먹임 제어기 설계와 마찬가지로 수치적인 방법으로 해를 구하는 연구들이 이루어지고 있다.[4]

구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 제어기 (structured static output feedback control) 문제는 최근에 연구가 이루어지기 시작하고 있으며, 정적 출력 되먹임 제어기 문제에 구조적인 제약이 포함되어 해를 구하기 쉽지 않다.[5~6]

구조적인 제약이 있는 제어기를 구하기 위해서 많은 경우, 매개 변수를 도입하여 제어기의 구조적인 제약을 표현하고, 제어이득 행렬 대신 매개변수가 포함된 LMI 문제를 풀어서 제어기를 구하고 있다.[5~6] 그러나, 매개변수를 사용하여 제어기를 표현하는 경우, 구조적인 제약을 표현하기가 쉽지 않고, 매개변수의 자유도에 제한이 있어 해를 구하기 어려울 수도 있다는 단점이 있다.

본 연구에서는 구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 제어기를 구하기 위하여, 기존의 연구와는 다른 비선형 행렬 부등식 문제 및 비선형 최적화 문제를 제안한다.

제안된 행렬부등식에서는 제어기 표현에 매개변수를 사용하지 않고, 제어기 이득 행렬을 직접 사용하기 때문에 제어기의 구조적인 제약을 표현하는데 어려움이

* 정회원, 서울시립대학교 전자전기컴퓨터 공학부
(Department of Electrical and Computer Engineering)
※ 이 논문은 2011년도 서울시립대학교 교내학술연구비에 의하여 연구되었음.
접수일자:2013년1월15일, 수정완료일:2013년2월27일

없으며, 선형화 알고리즘을 사용하여 제어기 이득 행렬을 직접 구할 수 있다. 또한 사용되는 변수의 수가 기존 연구들의 것보다 적게 사용된다는 장점이 있다.

논문의 구성은 다음과 같다. 구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 안정화 제어기가 만족해야할 비선형 행렬 부등식 조건을 유도하고, 유도된 조건을 비선형 최적화 문제로 변환한 후, 선형화 방법을 사용하여 제어기를 직접 구하는 알고리즘을 유도할 것이다. 마지막으로 수치적인 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 유효성을 검증한다.

Ⅱ. 본 론

1. 제어기를 구하기 위한 알고리즘의 유도

다음과 같이 주어지는 선형 시스템에 대하여

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{1}$$

정적 출력 되먹임 제어기

$$u = Ky \tag{2}$$

를 생각해본다. 식 (1)에서 $x \in R^n$는 상태변수, $u \in R^m$은 제어입력, $y \in R^p$는 출력변수다.

식 (2)와 같은 정적 출력 되먹임 제어기를 구하는 대부분의 연구는 구조화 되지 않은 $K \in R^{m \times p}$를 가정하고 $R^{m \times p}$ 전체 집합 중에서 K를 구하는 알고리즘을 유도하고 있다.[2~3] 그러나 , 본 연구에서는 정적 출력 되먹임 제어기 K가 특정한 구조적인 제약을 갖는 경우에도 적용할 수 있는 알고리즘을 유도할 것이다.

예를 들어 행렬 K가 다음 식 (3)과 같이

$$K = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & * \\ * & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

‘*’ 표시가 있는 부분만 0이 아닌 값을 갖고, 나머지 부분은 0으로 고정된, 구조적인 제약을 갖는 경우에는 기존의 알고리즘들을 사용하기 어렵지만, 본 연구에서는 식 (3)과 같은 구조적인 제약이 있는 경우에도 적용이 가능한 제어기 설계 알고리즘을 유도한다.

식 (2)로 주어지는 정적 되먹임 제어기를 사용한 폐루프 시스템(Closed loop system)은 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x} = (A + BKC)x \tag{4}$$

식 (4)의 시스템이 안정하다면, 임의 양수 $\alpha > 0$에 대하여 , 양한정 행렬(positive definite matrix) $P > 0$가 존재해서 다음의 행렬 부등식을 만족한다.

$$(A + BKC)'P + P(A + BKC) + 2\alpha I < 0 \tag{5}$$

식 (5) 는 다음과 같이 정리된다.

$$A'P + PA + 2\alpha I + C'K'B'P + PBKC < 0 \tag{6}$$

식 (6)이 만족된다면 양의 상수 $\sigma > 0$가 존재해서 다음 부등식을 만족한다.[7]

$$A'P + PA + 2\alpha I - \sigma C'C < 0 \tag{7}$$

식 (7)과 다음 식을 만족하는 충분히 큰 양수 $\sigma > 0$

$$PB\frac{1}{\sigma}(I + KK')B'P < \alpha I \tag{8}$$

를 사용하여 식 (6)은 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} &A'P + PA + \alpha I - \sigma C'C + \sigma C'C \\ &+ C'K'B'P + PBKC + PB\frac{1}{\sigma}(I + KK')B'P < 0 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &A'P + PA + \alpha I - \sigma C'C \\ &\quad + [PB \;\; C'] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}(I + KK') & K \\ K' & \sigma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B'P \\ C \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \tag{10}$$

모든 K와 $\sigma > 0$ 에 대하여 다음 부등식은 항상 성립함으로,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}(I + KK') & K \\ K' & \sigma I \end{bmatrix} > 0 \tag{11}$$

식 (10)은 다음과 같은 행렬부등식으로 변환된다.

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \alpha I - \sigma C'C & [PB \; C'] \\ \begin{bmatrix} B'P \\ C \end{bmatrix} & -\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}(I + KK') & K \\ K' & \sigma I \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

식 (12)의 행렬 안에 있는 역행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma}(I + KK') & K \\ K' & \sigma I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma I & -K \\ -K' & \frac{1}{\sigma}(I + K'K) \end{bmatrix} \tag{13}$$

따라서 식 (12)는 다음 행렬부등식과 같다.

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\alpha I-\sigma C'C & PB & C' \\ B'P & -\sigma I & K \\ C & K' & -\frac{1}{\sigma}(I+K'K) \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

식 (14)의 행렬 앞뒤에 다음과 같은 정칙행렬(nonsingular matrix)을 곱하면

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \sigma I \end{bmatrix} > 0 \quad (15)$$

다음과 같은 행렬부등식을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\alpha I-\sigma C'C & PB & \sigma C' \\ B'P & -\sigma I & \sigma K \\ \sigma C & \sigma K' & -\sigma(I+K'K) \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

위와 같은 유도과정으로 부터 다음과 같이 정리 1을 얻는다.

정리 1. $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, 행렬 K 와 양한정 행렬 $P > 0$ 가 존재해서 식 (16) 의 행렬 부등식을 만족하는 것과, 식 (1)로 주어지는 선형시스템에 대하여 식 (2)로 주어지는 정적출력 되먹임 안정화 제어기가 존재하는 것은 동치(equivalent) 이다.

정리 1의 유도 과정에서, 행렬 K 에 대하여 어떠한 조건도 사용하지 않았기 때문에, 식 (3)과 같이 K 에 구조적인 제약이 있는 경우에도 정리 1은 항상 성립한다. 따라서 정리 1은 구조화된 제약이 있는 제어기를 포함하여 일반적인 정적 출력 되먹임 안정화 제어기를 사용하는데 사용될 수 있다.

결론적으로, 제어기에 구조적인 제약이 있는 경우를 포함하는 일반적인 정적 출력 되먹임 안정화 제어기를 구하기 위해서는 다음과 같은 행렬 부등식 문제를 풀면 된다.

문제 1. 다음 행렬부등식을 만족하는 $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, 행렬 K 와 행렬 $P > 0$ 를 구하시오.

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\alpha I-\sigma C'C & PB & \sigma C' \\ B'P & -\sigma I & \sigma K \\ \sigma C & \sigma K' & -\sigma(I+K'K) \end{bmatrix} < 0$$

문제 1에서 $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, K 와 P 를 모두 변수로 생각하면 문제 1은 비선형 행렬 부등식이고, NP-hard 문제이므로 해를 구하기 어렵다. 따라서 해를 구하기 쉬운 형태로 변화 시킬 필요가 있다.

정리 1 의 유도과정을 보면, 식 (4) 의 안정화 제어기 K 가 존재하는 경우, 임의 상수 $\alpha > 0$ 에 대하여, 식 (5)를 만족하는 $P > 0$ 가 항상 존재하고, $\sigma > 0$ 를 선택할 때 식 (7) 과 식 (8)를 만족하기만 하면 그 값이 아무리 큰 값이라도 항상 식 (16)으로 주어지는 행렬 부등식을 만족시킨다.

따라서, 문제 1에서 $\alpha > 0$ 는 적당히 작은 상수로, $\sigma > 0$ 는 충분히 큰 값의 상수로 선택하고 K 와 $P > 0$ 만을 변수로 보고 문제 1을 풀어서 해가 구해지지 않는 경우, σ 값을 처음 선택한 값보다 큰 값으로 선택하여 다시 문제 1을 푸는 과정을 반복한다면 문제 1의 해를 구할 수 있게 된다.

문제 1을 풀 때, α 와 σ 를 상수로 놓으면, 식 (16)의 비선형성이 감소되기는 하지만, 행렬 내부에 있는 $K'K$ 항 때문에 (16) 식은 여전히 비선형 행렬 부등식이 된다.

식 (16)을 선형 행렬 부등식(LMI : Linear matrix inequality) 형태로 변환하기 위해 $K'K$ 를 새로운 행렬 변수 X 로 치환하면 비선형 행렬부등식 (16)은 다음 (17) 식의 선형 행렬 부등식과 식 (18)의 비선형 행렬식으로 변환할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\alpha I-\sigma C'C & PB & \sigma C' \\ B'P & -\sigma I & \sigma K \\ \sigma C & \sigma K' & -\sigma(I+X) \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

$$X = K'K \quad (18)$$

식 (17) 은 α 와 σ 를 상수로 놓은 경우 P,K,X 에 대한 선형 행렬 부등식이다. 식 (18) 의 비선형 행렬식을 다음과 같이 변환해본다.

$$X = K'K + \epsilon I \quad (19)$$

식 (19)에서 사용된 상수 ϵ 값이 0 이면 (18) 식과 동일하게 된다. 일단 $\epsilon > 0$ 으로 가정하면 식 (19) 로부터 다음과 같은 선형 행렬 부등식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} I & K \\ K' & X \end{bmatrix} > 0 \quad (20)$$

$\epsilon > 0$ 경우 $X > 0$ 이므로 X^{-1} 가 존재하고, $K \in R^{m \times p}$ 이므로

$$Trace(-KX^{-1}K') = Trace(\epsilon X^{-1} - I) > -p \quad (21)$$

이 성립하고 $\epsilon \to 0$ 으로 보내면 다음과 같이

$$\lim_{\epsilon \to 0} Trace(-KX^{-1}K') = -p \qquad (22)$$

$-p$의 극한값을 얻는다. 식 (22)에서 p 는 출력변수의 수를 의미한다. 따라서 , 문제 1 에 사용된 α 와 σ 를 상수로 보면, 문제 1은 다음과 같은 최적화 문제로 변환될 수 있다.

문제 2. minimize $\underset{P,K,X}{Trace}(-KX^{-1}K')$

subject to :

$$\begin{bmatrix} A'P+PA+\alpha I-\sigma C'C & PB & \sigma C' \\ B'P & -\sigma I & \sigma K \\ \sigma C & \sigma K' & -\sigma(I+X) \end{bmatrix} < 0 \qquad (23)$$

$$\begin{bmatrix} I & K \\ K' & X \end{bmatrix} > 0 \qquad (24)$$

$$P > 0 \qquad (25)$$

특정한 α 와 σ 값에서 문제 1의 해 P, K 가 존재하는 경우, (19) 식과 같이 X 를 선택하고 $\epsilon \to 0$ 으로 보내면 최적화 문제 2의 최소값이 $-p$ 가 되는 것을 쉽게 알 수 있으며, 반대로 최적화 문제 2의 최소값이 $-p$ 라면, 그때 P, K 값이 문제 1의 해가 된다는 것도 쉽게 알 수 있다. 따라서 문제 2의 최적화 문제를 풀어서 문제 1의 해를 구할 수 있다.

그러나 , 문제 2 또한 비선형 목적함수와 선형행렬 부등식으로 표현되는 제약조건을 갖는 비선형 최적화 문제이며 문제 1과 마찬가지로 해를 구하기 어렵다.

문제 2와 같은 형태의 비선형 최적화 문제의 해를 구하기 위하여 Frank-Wolfe method 또는 conditional gradient method[8]로 알려진 알고리즘을 사용한다. 즉, 다음과 같이 선형 최적화 문제를 반복하여 풀어서 문제 1의 최적 해를 구한다.

알고리즘 1.

(1) 임의 상수 $\alpha > 0$ 와 충분히 큰 $\sigma > 0$ 를 선택한다. K_0 와 $X_0 > 0$ 의 초기치를 정한다. $k = 0$ 로 정한다. 반복회수의 최대치 $k_{\max}$ 값을 정한다.

(2) 다음 LMI 문제를 푼다.

minimize $Trace(K_k X_k^{-1} X X_k^{-1} K_k' - 2KX_k^{-1}K'_k)$

subject to : (23), (24), (25)

(3) $k = k+1$로 증가시킨다. $k > k_{\max}$ 경우 알고리즘을 종료한다. 그렇지 않다면, $X_k = X, K_k = K$ 로 선택한 후 (2)번 단계로 되돌아간다.

알고리즘 1 의 (2) 번 단계에서 사용한 목적함수

$$Trace(K_k X_k^{-1} X X_k^{-1} K_k' - 2KX_k^{-1}K'_k) \qquad (26)$$

는 문제 2의 비선형 목적함수

$$Trace(-KX^{-1}K') \qquad (27)$$

를 $X = X_k$, $K = K_k$ 에서 선형화한 것이다. 따라서 알고리즘 1의 (2) 번 단계는 LMI 문제이며, interior point method 등의 잘 알려진 최적화 기법을 사용하여 쉽게 해를 구할 수 있다.

문제 2는 비선형 최적화 문제이며, 근본적으로 NP-hard 문제이기 때문에 알고리즘 1을 사용하여, 최적 해를 항상 구할 수 있는 것은 아니다.

그러나, 알고리즘 1의 (1) 단계에서 사용한 $\alpha > 0$, $\sigma > 0$, K_0 및 $X_0 > 0$ 들의 초기 값에 따라서 알고리즘 1의 결과가 달라지므로, (1) 단계의 초기 값들에 변화를 주면서 알고리즘 1을 적용하면, 문제 2의 최적 해를 구할 가능성이 높아진다.

2. 제안된 알고리즘을 사용한 제어기 설계 예제

식 (1)로 주어지는 선형 시스템의 각 행렬이 다음과 같이

$$A = \begin{bmatrix} 19 & 22 & 0 & 12 \\ -33 & -21 & -21 & -27 \\ 42 & 89 & -30 & 3 \\ 46 & 13 & 33 & 21 \end{bmatrix}, \qquad (28)$$

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -3 & -1 \\ -10 & 4 & -3 \\ 7 & -6 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 & -5 & -3 \\ 9 & 8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

로 주어지는 경우를 생각한다. 식(28) 의 행렬들은 MATLAB 의 'rand' 함수를 사용하여 임의로 발생시킨 것으로, A 행렬의 고유치(eigenvalue) 들은 6.8875 , $0.6524 \pm 37.8394i$, -19.1923 로 주어진다.

식 (3) 과 같은 구조적인 제약을 갖는 안정화 제어기를 가정하고, 알고리즘 1의 단계 (1)의 초기 값들을 다

음과 같이 설정하였다.

$$\alpha = 0.1,\ \sigma = 100,\ K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},\ X_0 = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \tag{29}$$

반복횟수 k의 최대치 $k_{\max} = 30$으로 정하고, MATLAB 의 LMI Toolbox를 사용하여 구현한, 알고리즘 1을 실행한 결과 다음과 같은 안정화 제어기 K와 X를 얻을 수 있었다.

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 50 \\ 30 & 0 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} 1000 & -5.3367\times 10^{-12} \\ -5.3367\times 10^{-12} & 2500 \end{bmatrix} \tag{30}$$

식 (30) 의 제어이득 K를 사용한 폐 루프 시스템 (4) 의 고유치는 $-865.78 \pm 2686i$, -7.9278, -11.508 로 안정함을 알 수 있다. 다른 초기치는 그대로 사용하고 초기치 K_0 값을 랜덤하게 정하고 알고리즘 1을 통하여 얻을 수 있었던 또 다른 해는 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} 9.2276 & 0 \\ 0 & 25.921 \\ 18.193 & 0 \end{bmatrix},\quad X = \begin{bmatrix} 416.14 & 1.18\times 10^{-13} \\ 1.18\times 10^{-13} & 671.9 \end{bmatrix} \tag{31}$$

식 (31)의 제어이득 K를 사용한 폐 루프 시스템 (4) 의 고유치는 $-654.63 \pm 1718.7i$, $-9.8832 \pm 3.243i$ 로 안정함을 알 수 있다.

III. 결 론

본 연구에서는 정적 출력 되먹임 제어기를 구하기위해서 제어이득 행렬이 포함된 비선형 행렬 부등식과 비선형 행렬 부등식을 풀기 위한 비선형 최적화 문제를 제안하였다. 제안된 비선형 최적화 문제는 구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 안정화 제어기를 구하는 경우에도 사용할 수 있으며, LMI 문제를 반복적으로 풀어서 해를 구하는 Frank-Wolfe method를 사용하여 구조적인 제약이 있는 정적 출력 되먹임 제어기를 구하는 알고리즘을 얻었다.

제안된 제어기 설계 방법은 기존의 방법들과는 달리, 제어기의 구조적인 제약을 표현하는데 어려움이 없으며, 사용되는 변수의 수가 적다는 장점을 갖는다. 또한 수치적인 예제를 통하여 제안된 알고리즘의 유효성을 검증할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] V. Blondel and J. N. Tsitsiklis, "NP-hardness of some linear control design problems," *European J. Contr.*, Vol. 1, 1995.
[2] L.E .Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, "A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 42, no. 8, 1171-1176, Aug. 1997.
[3] Y. He and Q. G. Wang, "An improved ILMI method for static output feedback control with allplcation to Multivariable PID control," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 51, no. 10, pp. 1678-1683, Oct. 2006.
[4] P. Apkarian, V. Bompart, and D. Noll, "Non-smooth structured control design with application to PID loop-shaping of a process," *Int. J. of Robust Nonlinear Control*, Vol. 17, pp. 1320-1342, Jan. 2007.
[5] A. I. Zecevic and D.D. Siljak, " Control design with arbitray information structure constraints," *Automatica*, vol. 44, no.9, pp. 2642-2647, Sep. 2008.
[6] J. Rubio-Massegu, J.M. Rossell, H.R. Karimi, and F. Palacios-Quinonero, "Static output-feedback control under information structure constraints," *Automatica*, vol. 49, no.1, pp. 313-316, Jan.. 2013.
[7] S. Boyd, L.E .Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM books, Philadelphia, 1994.
[8] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, 1995.

저 자 소 개

이 준 화(정회원)
1987년 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 학사 졸업.
1989년 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 석사 졸업
1995년 서울대학교 공과대학 제어계측공학과 박사 졸업
<주관심분야 : 선형시스템이론, 강인제어이론>