The Korean Journal for History of Mathematics
Vol. 26 No. 1 (Feb. 2013), 33–56

A Historical Process Analysis and Extension of Division into Equal Parts in Middle School Geometry

중학교 기하영역 등분할 개념에 대한 수학사적 분석 및 확장에 대한 연구

SUH Bo Euk 서보억

This is a literature study about the concept of 'Division into Equal Parts' in middle school geometry. First, we notice that the concept of the division into equal parts in middle school geometry is given in four themes, which are those of line segments, angles, arches and areas. Second, we investigate and analyse the historical backgrounds of these four kinds of divisions into equal parts. Third, the possibility of extension in terms of method and concept was researched. Through the result of this study, we suggest that it is desirable to use effective utility of history in mathematical teaching and learning in middle school.

Keywords: middle school mathematics, division into equal parts, geometry, history of mathematics, historical developmental process; 중학교수학, 등분할, 기하, 수학사, 역사적 발달 과정.

MSC: 97D30 ZDM: G83

1 서론

학교교육에서 수학을 잘 하는 것의 중요성에 대해서는 학생, 학부모, 교사 모두가 인식하고 있다. 반면 수학을 배움으로써 얻을 수 있는 교육적인 효과가 무엇인가에 대한 질문에 대해서는 크게 주목하지 않고 있다. 그렇다면 보편적으로 받아들이고 있는 수학교육을 통해 얻을 수 있는 핵심 가치는 무엇인가? 우리는 일반적으로 일상생활에서 부딪히게 되는 새로운 문제상황에서 합리적인 의사결정과 타당한 행동을 수행할 수 있는 능력을 획득하기를 기대한다. 즉, 수학을 학습함으로써 문제해결능력의 신장과 성숙을 기

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2011-812-B00474)

Receiveded on Oct. 17, 2012, revised on Jau. 12, 2013, accepted on Jau. 18, 2013.

대하게 된다[29, 33]. 그렇다면, 이러한 문제해결능력 성장을 위한 수학학습의 출발점은 어디에 두는 것이 적절한가에 대해 생각해 보자. 이 물음에 대한 분명한 답은 국가에서 지정한 정규 수학 교육과정이어야 한다는 것이 많은 연구자들의 주장이다[4].

수학교육에서 수학사의 중요성은 많은 학자들의 연구결과를 통해 확인할 수 있다[12]. 이러한 생각의 바탕에는 '수학을 학습하면서 학생들은 인류가 수학적 지식을 획득하면서 지나왔던 길을 짧게 반복한다'는 수학의 역사-발생적 원리가 큰 영향을 미치고 있다[12]. 이것은 우리가 수학사를 연구하는 과정에서 그리고 수학사적 사실을 분석 후에 새롭게 알게 된 사실로부터 어떤 수학적 개념을 확장하고 일반화할 것인가에 대한 고찰이 필요하다는 것을 의미한다[14].

즉 수학교육은 문제해결력의 신장과 매우 밀접한 관계가 있으며 이러한 문제해결력 신장을 위한 수학교육은 정규교육과정이라는 큰 바탕위에서 자리를 잡아야 한다. 더불어 수학교육에서 수학사의 활용이 가지는 가치가 매우 크다는 사실이다. 따라서 정규교육과정에 기초를 둔 수학학습 내용을 대상(object)으로 하여 수학교육의 중요한 목적 중의 하나인 문제해결력의 신장으로서의 행하는 수학(doing math)을 실제적으로 구현하기 위해 수학사적 분석은 매우 필수적인 연구이다. 이에, 본 연구에서는 이러한 필요성에 의해서 정규교육과정을 기초로 중학교 1학년, 중학교 2학년, 중학교 3학년 기하영역에서 제시되는 '등분할(division into equal parts)' 개념을 추출하고, 이에 대한 수학사적 분석을 바탕으로 등분할 개념에 대한 확장 가능성을 탐색하는 것을 연구의 목적으로 한다.

본 연구의 수행과 관련된 선행연구 분석 결과는 다음 세 가지 측면에서 요약할 수 있다. 첫째, 기하 이외의 분야에서의 등분할 연구가 있었다. 등분할의 개념은 분수의 연산과 관련된 교수학습 방법으로 활용되고 있었다. 예를 들어, 최근배[11]는 분할과 반복조작을 통한 분수 지도 사례에 대한 연구를 통해 등분할 개념에 대한 연구를 진행하였다. 둘째, 수학사와 관련된 다양한 연구결과가 있었다. 행렬에 대한 지도, 증명에 대한 지도, 드모르간의 원리에 대한 조명, 미분개념의 도입, 분수에 대한 개념 등에 대한 연구가 진행되었다. 예를 들어, 조성민[10]은 역사 발생적 관점에서 본 행렬 지도의 재음미를 통해 행렬 지도의 원리로서 역사 발생적 관점을 활용한 연구를 진행하였다. 셋째, 학교수학 내용의 개념 확장에 대한 연구가 있었다. 중등학교 수학 수준에서 개념의 일반화에 대한 연구는 최근 다양한 주제를 대상으로 이루어지고 있다. 예를 들어, 한인기[14]는 유추를 통한 코사인정리의 일반화에 대한 연구를 진행하여 일반화된 공식을 탐색하였다.

지금까지의 선행연구 결과를 통해 보면, 중등학교에서 등분할에 대한 연구가 구체적으로 진행된 경우는 없는 것으로 나타났다. 단지, 기하 이외의 분야, 예를 들어, 초등

학교의 분수 개념, 중등학교에서 정수나 자연수의 지도 등의 연구에 언급된 정도이다. 따라서 등분할이 기하적 요소임에도 기하 연구 주제로는 거의 다루어지지고 않고 있어 이에 대한 연구의 의의는 크다고 하겠다.

고대 그리스 시대의 원론 II권 명제 11번을 보면 주어져 있는 선분에 대한 황금분할에 대해 최초로 제시하고 있다. 또한, 고대 그리스인들은 이차방정식을 기하적 방법으로 해결하였는데, 여기에서도 선분의 분할을 효과적으로 이용하고 있다. 이처럼 분할에 대한 의식은 고대부터 매우 자연스럽게 우리의 삶의 일부로 자리매김하였고, 일상의 평범한 부분에도 깊은 영향을 미치고 있다. 이러한 분할의식에서 가장 기본이 되는 것은 등분할임은 의심의 여지가 없다. 따라서 본 연구의 목적을 효과적으로 달성하기 위해 연구문제를 다음 세 가지로 세분화하였다.

첫째, 중학교 기하영역에서 등분할 내용에는 무엇이 있는지 분석한다. 이러한 분석을 위해서 중학교 1학년, 중학교 2학년, 중학교 3학년 교과서 및 수학익힘책[5, 6, 7]을 연구의 대상으로 하였다.

둘째, 중학교 기하영역에 제시된 등분할 개념에 대한 수학사적 분석을 실시한다. 이러한 수학사적 분석은 논증기하 이전 고대 이집트, 바빌로니아 시대를 비롯하여, 논증기하학을 창조한 고대 그리스 시대 및 기하학적 전통이 대수학적인 전통으로 넘어간 이후인 초기 근대까지 이루어진다.

셋째, 등분할 개념에 대한 확장 가능성에 대해 탐색한다. 중학교 기하영역의 등분할 내용에 대한 수학사적 분석을 기초로 등분할에 대한 확장 가능성에 대한 연구가 이루어진다.

2 중학교 기하영역에서 등분할 개념 분석

중학교 학교수학 기하영역에 제시되어져 있는 등분할 개념에 대해 분석한다. 분석 대상은 2007년 개정 교육과정에 따라 집필된 중학교 1, 2, 3학년 교과서이며[5, 6, 7], 구체적 내용을 각 학년별로 제시하면 다음과 같다.

2.1 중학교 1학년 기하내용

중학교 1학년에서 다루고 있는 등분할 개념은 크게 세 가지로 구분할 수 있다.

첫째, 선분을 등분할하는 점의 작도 문제를 다루고 있다. 선분의 등분할 문제는 선분 AB가 주어져 있을 때, 이 선분의 이등분점(중점)M을 작도하는 내용이다. 이러한 선분의 중점 작도를 바탕으로 선분의 수직이등분선을 작도하는 문제를 함께 다루고 있다. 선분의 이등분점을 찾는 이 내용은 작도 절차에 대한 체계적 훈련 중심으로 진술되어져 있다.

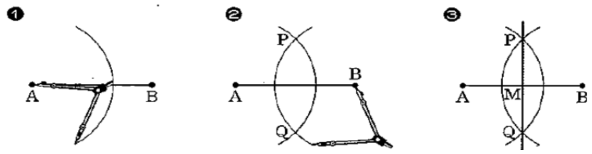

그림 1: 선분의 이등분점, 수직이등분선[5]

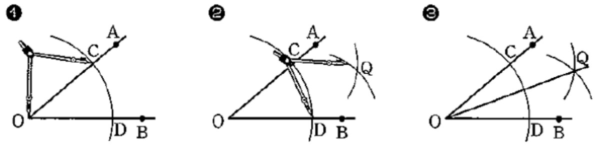

그림 2: 각의 이등분선 작도[5]

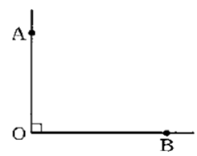

그림 3: 각의 사등분

둘째, 각의 이등분선 작도를 다루고 있다. 선분의 등분할 문제와는 달리 각의 등분할은 좀 더 다양한 상황에서 다루고 있다. 먼저 각 AOB가 주어져 있을 때, 이 각의 이등분선 OM을 작도하는 내용을 다루고 있다. 다음으로는 연습문제를 통해 각의 사등분선을 작도하는 문제, 특수한 각(예를 들면 직각)의 삼등분선을 작도하는 문제 등을 다루고 있다. 이러한 각의 등분할 문제도 선분의 등분할 문제와 유사하게 작도 절차에 대한 체계적 훈련 중심으로 진술되어져 있다.

셋째, 정다각형에 대한 내용을 다루고 있다. 교과서에서는 '모든 변의 길이가 같고, 모든 내각의 크기가 서로 같은 다각형'으로 다루고 있지만, 실제로는 원에 내접하는 다각형을 작도하는 문제로 귀결된다. 따라서 정다각형은 원의 둘레에 대한 등분할 문제이다.

2.2 중학교 2학년 기하내용

중학교 2학년에서 다루고 있는 등분할 개념은 크게 두 가지로 구분할 수 있다.

첫째, 삼각형 넓이의 등분할에 대한 문제를 다루고 있다. 삼각형의 무게중심에서 중선은 '한 꼭짓점에서 대변의 중점을 연결한 선분'이라고 정의하고 있다. 따라서 중선에 의해서 주어져 있는 삼각형의 넓이는 정확하게 이등분할된다. 실제로 이 원리를 적용하면,

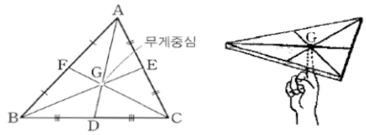

그림 4: 넓이의 이등분선과 무게중심

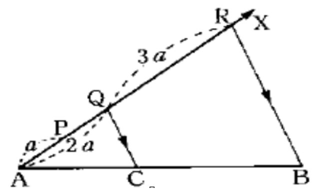

그림 5: 선분 AB의 2:3 분할

삼각형의 세 중선에 의해서 주어져 있는 삼각형은 여섯 개의 넓이가 같은 삼각형으로 6 등분할된다.

둘째, 선분의 등분할 문제를 다루고 있다. 중학교 1학년에서는 이등분점에 대한 내용만을 다룰 수 있지만, 중학교 2학년에서는 닮은 도형을 학습함으로서 다등분할 문제를 다룰 수 있게 된다. 교과서에 따라서는 다루는 경우도 있고 다루지 않는 경우도 있지만, 닮음의 성질을 활용하면 주어져 있는 선분의 이등분, 삼등분, 사등분, …, n등분할이 가능하다.

2.3 중학교 3학년 기하내용

중학교 3학년에서 다루고 있는 등분할 개념은 크게 두 가지로 구분할 수 있다.

첫째, 정사각형 넓이의 분할 문제를 다루고 있다. 이는 피타고라스 정리를 통해 확인할 수 있다(그림 6). <그림 6>의 ①은 직각이등변삼각형에서 피타고라스 정리를 나타낸 것인데, 동일한 넓이를 가지는 두 정사각형으로 분할하고 있다. ②와 ③은 정사각형을 임의의 비를 가지는 두 정사각형으로 분할하고 있다. 따라서 피타고라스 정리는 넓이가 동일한 두 정사각형으로의 분할을 가능하게 하고, 역으로 두 정사각형의 넓이의 합과 같은 새로운 정사각형을 만들 수 있게 한다.

둘째, 호의 등분할 문제를 다루고 있다. 중심각과 호에 대한 성질에서 '합동인 두 원 혹은 동일한 원에서 호의 길이가 같으면 중심각의 크기가 같고, 역으로 중심각의 크기가 같으면 호의 길이가 같다'를 다룬다. 이 성질에 의해서 호의 등분할 문제가 해결된다. 즉, 중심각의 이등분선이 곧 호의 이등분점을 지난다는 사실을 확인할 수 있다.

지금까지 중학교 학교수학 기하영역에서 다루어지고 있는 등분할에 대한 내용을 살

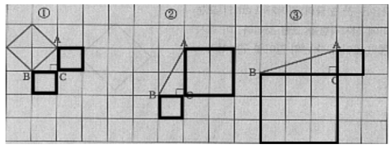

그림 6: 피타고라스 정리와 분할

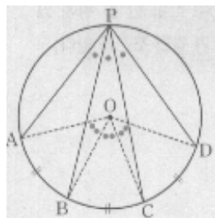

그림 7: 호의 등분할

펴보았다. 중학교 1, 2, 3학년 전 학년에서 등분할 개념은 다양한 관점에서 다루어지고 있었다. 선분에 대한 등분할 개념은 중학교 1, 2학년에서 다루어지고, 각에 대한 등분할 개념은 중학교 1, 3학년에서, 호에 대한 등분할 개념은 중학교 3학년에서, 특정 도형(삼각형, 정사각형)에 대한 넓이의 등분할 개념은 중학교 2, 3학년에서 다루어지고 있었다. 결론적으로 중학교 기하영역에서 등분할 개념은 네 가지 즉, 선분, 각, 호(원의 분할), 넓이로 세분화할 수 있다.

3 학교수학과 관련된 등분할 개념에 대한 수학사적 분석

3.1 선분의 등분할과 관련된 내용의 분석

수학사의 분석을 통해 얻은 선분의 등분할에 대한 분석 결과를 역사적 순서로 살펴보자.

등분할1 원론 I권 명제 3에서 '2개의 서로 같지 않은 두 선분이 주어졌을 때, 큰 것과 작은 것의 차로 선분을 분할하는 것' 을 다루고 있다[18]. 이 명제에서 주어져 있는 두 선분을 AB, CD(단, AB>CD)라고 하면, 선분 AB를 분할하는 점 E는 원의 작도를 이용하여 작도할 수 있다. 주어져 있는 선분에 대한 등분할은 아니지만, 두 선분의 차에 해당하는 길이만큼을 컴퍼스를 이용하여 분할할 수 있음을 보이고 있다. 이 문제가 역사상 문헌에 등장하는 최초의 선분의 분할 문제라고 볼 수 있다.

등분할2 원론 I권 명제 10에서 '주어져 있는 선분을 이등분하는 것' 을 다루고 있다 [18]. 이 명제에서 주어져 있는 선분을 AB라고 하면, 선분 AB를 이등분하는 점 M은 정삼각형의 작도를 이용하여 구하고 있다. 구체적으로 살펴보자(그림 8).

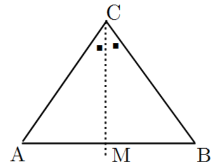

그림 8: 선분의 등분할1

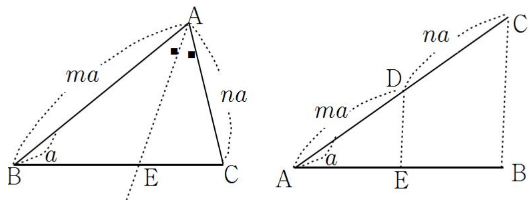

그림 9: 선분의 등분할2

선분 AB위에 정삼각형 ABC를 작도한다. 각 ACB의 이등분선을 긋고 선분 AB와의 교점 M을 잡는다. 그러면 점 M이 선분 AB의 이등분점이다. 왜냐하면, 각의 이등분선에 의해서 만들어지는 두 삼각형 △ACM과 △BCM은 서로 합동이기 때문이다.

등분할3 원론 VI권 명제 3에서 '삼각형에서 각의 이등선이 대변과 만나는 점은 그 변을 이등분한 각을 만드는 두 변의 길이의 비로 분할하는 것' 을 다루고 있다[18]. 이 명제는 외형적으로는 삼각형에 대해 다루고 있지만, 증명 내용을 재해석하면 주어져 있는 선분을 임의의 비 $m : n$ 으로 분할하는 내용을 다루고 있음을 알 수 있다[12, 14]. 구체적으로 명제 3의 내용을 재해석하여 주어져 있는 선분 BC를 $m : n$으로 분할하는 점의 작도방법을 분석한 결과는 다음과 같다(그림 9 왼쪽).

선분 BC가 주어져 있다. 점 B와 C를 중심으로 하고 반지름의 길이의 비 $m : n$인 원을 그리고, 그 교점 A를 잡는다. 선분 AB와 선분 AC를 긋는다. 각 BAC의 이등분선을 긋고 선분 BC와의 교점 E를 잡는다. 그러면 점 E가 선분 BC를 $m : n$으로 분할하는 점이다.

등분할4 원론 VI권 명제 10에서 '주어져 있는 선분을 분할되어져 있는 선분과 동일한 길이의 비로 분할하는 것' 을 다루고 있다[18]. 여기서 선분 AB를 분할되지 않은 선분이라 하고, 선분 AC를 점 D에 의해 분할되어진 선분이라고 하자. 선분 BC를 긋고, 점 D를 지나면서 선분 BC에 평행한 직선과 선분 AB와의 교점을 E라 한다. 그러면, AD : DC = AE : EB가 성립한다. 따라서 주어져 있는 선분 AC를 원하는 비로 분할할 수 있기 때문에서 선분 AB를 원하는 비로 분할할 수 있다(그림 9 오른쪽).

등분할5 기원전 450년경 Zenon은 역사적으로 길이 남을 유명한 역설(paradox)들을

그림 10: 선분의 등분할3

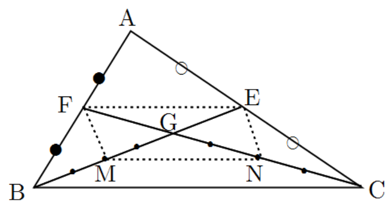

그림 11: 선분의 등분할4

남겼다[22]. 그 중에서 '이분법(dichotomy)' 은 선분의 이등분할과 밀접한 관계가 있다. 특히, 주어져 있는 선분에 대한 무한 등분할을 시도하였다는 측면에서 역사적으로 큰 의미를 지닌다.

등분할6 1600년대 초반에 Galileo는 선분의 등분할을 간단히 할 수 있는 분할컴퍼스(sector compass)를 개발하였다[20]. 닮음의 원리를 적용한 눈금이 새겨진 컴퍼스를 통해 선분의 임의의 등분할을 가능하게 하였다. 여기서 한 가지 Galileo의 '신과학대화' 라는 책에 인상적인 내용이 제시되어져 있다. 실뷔아티(진정한 과학자)에게 있어서 선분을 무한개의 부분으로 등분할하도록 하는 것은 매우 쉬운 작업이라고 소개하고 있다. 그 이유는 '선분을 꺾어 정사각형을 만드는 것은 선분을 4등분할하는 것이고, 정팔각형을 만드는 것은 선분을 8등분할하는 것이기 때문에, 선분을 원형으로 만들면 주어져 있는 선분을 무한등분할한 것이다' 라고 기술하고 있다. Galileo는 선분의 무한등분할에 대한 개념까지 생각을 하고 있었던 것이다.

등분할7 삼각형의 무게중심은 세 중선의 교점이다. 세 중선은 넓이를 이등분할한다는 면에서 넓이의 등분할이지만, 중선이 무게중심에 의해 어떤 비로 분할되는지에 관심을 가지면, 중요한 성질 하나를 정당화시킬 수 있다[20]. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다(그림 11).

꼭짓점 B, C에서 그은 두 중선 BE, CF의 교점 G가 있다. 선분 BG, CG의 이등분점을 M, N이라 하자. 사각형 FMNE를 완성하면 FE$\|$MN, FE=MN이다. 왜냐하면, 중점연결정리에 의해 삼각형 ABC에서 FE=$\frac{1}{2}$BC, FE$\|$BC이고, 삼각형 GBC에서 MN=$\frac{1}{2}$ BC, MN$\|$BC이기 때문이다. 따라서 사각형 FMNE는 평행사변형이 되고, BM=MG=GE, CN=NG=GF이다. 그러므로, 무게중심은 중선을 3등분할하는 점이다.

지금까지 살펴본 선분의 등분할에 대한 수학사적 분석결과를 통해 다음과 같은 6가지의 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, [등분할1]에서 볼 수 있듯이 최초로 찾을 수 있는 선분의 분할은 등분할이 아닌, 단순한 임의의 분할이었다. 이러한 단순한 분할이 여러 가지 필요성에 의해 등분할 개념으로 발전되었다.

둘째, 초기 선분의 이등분 혹은 임의의 등분할은 각의 이등분선 작도에 의해 해결되어졌지만[등분할 2, 3], 점차 닮음의 성질을 이용한 방법으로 변화되어졌다[등분할 4, 6].

셋째, 현재 교과서에 제시된 방법[등분할4] 뿐 아니라 요즘 잘 다루지 않는 다양한 방법을 발견할 수 있었다. 즉, 현재 교과서와는 차이가 있는 것을 확인할 수 있다. 이러한 차이는 단순한 방법적 측면의 차이가 아니라, 내용적 측면에서도 확인할 수 있다. 현재 교과서가 방법적 측면에서 단순한 절차에 초점을 맞추어 제시되고 있지만, 수학사에 제시된 방법은 [등분할2, 3]에서 볼 수 있듯이 타당성을 밝히는 과정 즉, 그 절차의 정당성을 확보하는 이유를 명확히 다루고 있다.

넷째, 선분에 대한 유한번의 등분할이 가능한 것을 논리적으로 확인한 다음, 선분의 무한 등분할에 도전하고 있다. [등분할 3, 4, 5, 6]에서 볼 수 있듯이, 선분의 임의의 등분할을 할 수 있는 이론적 기초를 제공해 주고 있다. 특히 Galileo의 '신과학대화'에 제시된 일화는 등분할에 대한 깊은 사색의 전형적인 사례이며, 무한에 대한 철저한 이해를 바탕으로 얻은 결과로 보인다.

다섯째, 학문적인 탐색에 거치지 않고 등분할의 실용성, 편리성, 효율성을 위해 선분의 등분할 기구를 개발하였다. 비록 선분의 이등분은 작도로 가능한 작업이었지만, 경험과 관찰이 중요한 과학의 시대에는 이를 실현할 수 있는 유용한 도구를 개발하여 사용하였다.

마지막으로 선분의 등분할에 대한 기초를 바탕으로 다른 수학적 개념의 확립에 효과적으로 활용하고 있음을 발견하였다. [등분할7]에서는 무게중심의 개념을 확립하기 위해 등분할 개념이 사용되었다. 이처럼, 선분의 등분할 개념은 수학적 활용에서도 중요한 가치를 지니고 있다.

3.2 각 및 호의 등분할과 관련된 내용의 분석

먼저, 수학사의 분석을 통해 얻은 각의 등분할에 대한 분석 결과를 역사적 순서로 살펴보자.

등분할8 원론 I권 명제 9에서 '주어져 있는 직선 각을 이등분하는 것'을 다루고 있다 [28]. 각의 이등분선 작도에 대한 문제인데 문제의 해결방식이 학교수학의 제시방식과는

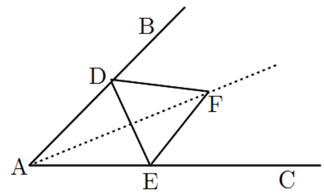

그림 12: 각의 등분할1

차이가 있다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다(그림 12).

각 BAC가 주어져 있다. 직선 AB위에 한 점 D를 잡는다. AD=AE인 점 E를 직선 AC위에 잡는다. 선분 DE를 긋는다. 선분 DE위에 정삼각형 DEF를 만든다. 선분 AF를 긋는다. 그러면 직선 AF는 각 BAC의 이등분선이 된다. 왜냐하면, $\triangle DAF \equiv \triangle EAF$이기 때문이다.

등분할9 고대 그리스에는 각의 등분할과 관련된 유명한 난제가 전해져 온다. 그것은 일반각에 대한 삼등분 문제이다. 선분의 3등분이 간단히 해결되었기 때문에 각의 삼등분도 쉽게 해결될 것이라는 기대로 이 문제에 많은 수학자들이 도전하였지만, 그 어느 누구도 작도에 성공하지 못한다[2]. 하지만 그리스인들은 환원법(혹은 기울림 문제)을 통해 새로운 시각에서 이 문제해결에 도전한다[2]. 기원전 460년경 피타고라스와 동시대에 살았던 Hippias는 쿼드라트릭스(quadratrix)를 개발하여 각의 삼등분에 도전하였고, 기원전 400년경 Platon은 눈금이 표시된 자를 이용하여 각의 삼등분에 성공하였고, 기원전 250년경 Nicomedes는 콘코이드라는 곡선을 개발하여 성공하였고, 동시대의 Archimedes는 원추곡선을 이용하는 방법, 나선을 이용하는 방법, 눈금이 표시된 자와 반원을 이용하는 방법으로 성공하였고, 기원후 300년경 Pappus는 쌍곡선을 이용하여 성공하였고, Pascal은 1650년 Lamacon이라는 곡선을 개발하여 성공하였고, 17세기 후반의 Ceva는 'Ceva의 사이클로이드'를 개발하여 활용하는 방법, 축도기를 사용하는 방법으로 성공하였고, Hermes는 1883년 그가 고안한 특별한 컴퍼스를 이용하여 성공하였고, Metz는 토마호크라는 기구를 제작하여 성공하였고, Kempe는 1875년 그가 개발한 삼중꼴을 이용하여 성공하였고, 근래에는 Aubry는 원뿔을 이용하여 성공하였으며, Abe는 종이접기를 통해 각을 삼등분하였다[9, 16, 17, 19, 22, 23, 36].

등분할10 삼각법에서 위대한 업적을 남긴 Ptolemy는 기원후 100년경 현표를 작성하면서 가장 유용하게 사용한 공식 중의 하나가 반각의 공식이다[32]. 여기서 반각의 공식은 각을 이등분하였을 때, 얻을 수 있는 현의 길이에 대한 것이다. 이처럼 각을 이등분을 통해 현의 길이 곧, 사인값을 얻을 수 있는 기초 자료로 활용하였다.

등분할11 각의 이등분은 중학교 1학년에서 다루지만 중학교 3학년에서 학습하는 원

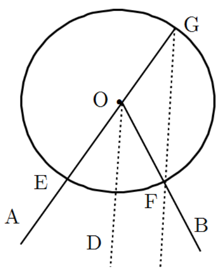

그림 13: 각의 등분할2

주각과 중심각의 성질을 이용하면 '주어져 있는 직선 각을 이등분하는 것' 은 간단하게 해결할 수 있다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

각 AOB가 주어져 있다. 점 O를 중심으로 원을 작도하고 각 직선과의 교점을 각각 E, F라고 하자. 직선 AO의 연장선이 원과 만나는 점을 G라 하자. 직선 GF와 이 직선과 평행이면서 점 O를 지나는 직선 OD를 그으면, 직선 OD는 각 AOB의 이등분선이다.

다음으로, 수학사의 분석을 통해 얻은 호의 등분할에 대한 분석 결과를 역사적 순서로 살펴보자.

등분할12 최초의 수학자로 알려진 Thales는 논리적 추론을 통해 주어진 명제를 증명하였다[9, 16, 19]. 그가 증명한 명제 중에서 첫 번째로 언급되는 것인 '원은 임의의 지름에 의해서 이등분된다' 이다. 이 명제는 원의 둘레 전체를 이등분할하는 방법을 제시한 것으로 볼 수 있다.

등분할13 원론 III권 명제 30에서 '주어진 호를 이등분하는 것' 을 다루고 있다[21]. 이 명제에서 주어져 있는 호 ADB가 있을 때, 이 호의 이등분점 D를 작도하는 방법을 소개하고 있다. 먼저 현 AB를 긋고, 선분 AB의 중점 C를 잡는다. 점 C를 지나고 현 AB에 수직인 선분을 긋고, 호와 만나는 점을 D라고 하면, 점 D가 호 ADB의 이등분점이 된다.

등분할14 Pythagoras는 정 n각형의 작도에 큰 관심을 가졌다. 이러한 그의 연구업적은 원론 IV권에 소개되어져 있다[20, 21]. 원론 IV권에서는 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 정십오각형을 소개하고 있는데, 모두 원에 내접시키는 것으로 설명한다. 결국 이것은 원의 둘레의 3등분할, 4등분할, 5등분할, 6등분할, 15등분할에 대한 문제이며, 실제로 이렇게 접근하여 해결하고 있다.

등분할15 기원전 150년경 Hipparchus는 원의 등분할에 관심을 가졌다. 누가 언제부터 원을 360등분할하였는지 알 수 없지만, 그가 현표를 최초로 구성하였다는 이유로 인해, 문헌상 최초로 원을 360등분할한 수학자라고 일컬어지고 있다. 사실 Hipparchus가

원을 360등분할한 것은 Hypsicles가 하루를 360등분할하였던 사고방식에 기인한다고 보기도 한다[16]. 이와 관련되어 조금 더 깊이 있게 살펴보자. 하루를 360분할하였다는 것은 곧 지구둘레 전체를 등분할한 것과 관련이 있다. 황도를 십이 '궁'과 서른 여섯 개의 '십분각'으로 나눌 수 있는데, 이것은 곧 360등분할의 값을 천문학적 도구를 활용한 것이다. 이제 1년으로 확장해도 이와 같은 원칙은 유지되었다. 1년을 360일로 보면서, 한 해의 주기는 각 궁을 30개의 부분으로 등분할하고, 각 십분각을 열 개의 부분으로 등분할하여 황도 12궁계와 십분각의 체계가 완성된 것으로 간주하고 있다[16, 24].

지금까지 살펴본 각의 등분할과 호의 등분할에 대한 수학사적 분석결과를 통해 다음과 같은 4가지의 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 각의 등분할과 호의 등분할은 본질적으로 동일한 개념이다. 호를 등분할하기 위해서 각의 등분할이 선행되어야하기 때문이다. [등분할 14]의 정다각형의 작도를 통해 이러한 사실을 명확히 알 수 있다.

둘째, 선분의 등분할과 마찬가지로, 교과서에 제시된 방법과 서로 상이한 방법 및 구성을 보이고 있었다. 교과서는 각(호)의 등분할에 대한 단순한 과정 및 절차에 관심을 보이지만, 수학사에서는 [등분할 8, 11, 13]에서 볼 수 있듯이 그러한 절차가 필요한 이유와 정당화에 집중하고 있다.

셋째, 각(호)의 3등분 작도는 불가능하다. 하지만, [등분할 9]에서처럼 이러한 불가능이 입증될 때까지는 여러 가지 다양한 도구를 개발하여 3등분에 성공하였고, 끊임없이 새로운 시도를 통해 정교한 곡선 및 기구를 개발하였다.

넷째, 각(호)의 등분할 개념은 [등분할 10, 15]에서처럼 새로운 수학개념의 확립에 중요한 도구로 사용되었다.

3.3 넓이의 등분할과 관련된 내용의 분석

수학사의 분석을 통해 얻은 넓이의 등분할에 대한 분석 결과를 역사적 순서로 살펴보자.

등분할16 수학 교수 학습 방법과 관련하여 최초로 남아 있는 기록은 Socrates의 대화법이다[1]. 대화법에서 Socrates와 사동의 대화 주제는 '정사각형의 넓이를 반이 되게 하는 정사각형의 작도' 문제이다. 즉, 주어져 있는 정사각형 넓이의 반이 되는 작은 정사각형의 작도문제이다.

등분할17 고대 이집트에서는 정기적으로 나일강이 범람하여 땅에 대한 측량 문제가 중요한 사안이었다. 이러한 문제를 해결하기 위해서 유용하게 사용된 것 중의 하나가 피타고라스 정리이다. 피타고라스 정리는 <그림 14>처럼 두 정사각형 A, B의 넓이의 합에 해당하는 정사각형 C 혹은 세 정사각형 A, B, C의 합에 해당하는 정사각형 D를 만들어주는 역할을 한다[9, 16, 30].

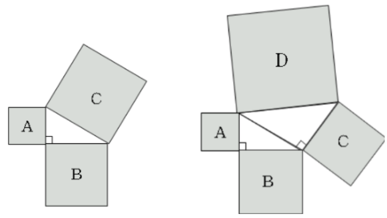

그림 14: 넓이의 등분할1

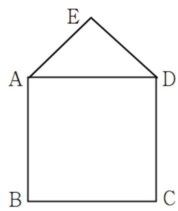

그림 15: 넓이의 등분할2

그런데, 피타고라스 정리가 두 정사각형을 한 정사각형으로 합치는 것에만 유용한 것은 아니다. 가역적 사고라고 불리는 사고활동을 생각해 보자. 즉, 한 정사각형을 임의의 비를 가지는 두 정사각형으로 분리하는 것에도 매우 유용하다. 구체적으로 등분할하는 경우와 $1:2$의 비로 분할하는 경우에 대해 구체적으로 살펴보자.

주어져 있는 정사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 두 정사각형으로 분할해 보자(그림 15). 먼저 주어져 있는 정사각형의 한 변 AD를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형을 작도한다. 그 다음, 두 선분 AE와 ED를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하면 우리가 원하는 등분할된 작은 정사각형으로 분할된다.

주어져 있는 정사각형 ABCD의 넓이를 $1:2$의 넓이의 비를 가지는 두 정사각형으로 분할해 보자. 먼저 주어져 있는 정사각형의 한 변 AD를 빗변으로 하고, 나머지 두 변의 비가 $1:\sqrt{2}$가 되는 직각삼각형을 작도한다. 그 다음, 두 선분 AE와 ED를 한 변으로 하는 정사각형을 작도하면 우리가 원하는 정사각형으로 분할된다.

등분할18 기원전 300년경 Euclid는 당대 최고의 수학자로 유명하다. 그는 알렉산드리아 수학학교의 설립자로 수학에 대한 많은 저술을 하였는데, 그 중에서 지금까지 전해지는 수학책은 원론(The Elements), 자료론(The Data), 분할론(On divisions) 세 권이다[8]. 이 중에서 분할론은 등분할과 밀접한 관련을 가지고 있다. 이 책에는 작도라는 수단을 통해 주어져 있는 평면 도형을 이등분할 혹은 임의의 등분할 작도 문제(명제) 31개가 제시되어져 있다[15]. 명제 36개가 어떤 도형에 대해 어떤 등분할 문제를 담고 있는지 분석한 결과는 <표 1>과 같다.

구분		명제번호					
		삼각형	평행사변형	사다리꼴	사각형	다각형과 원	원
유형	이등분할	1,3,4,19,26	6,10	8,12	14,16	28	-
	삼등분할	2	-	5	-	-	-
	n등분할	-	7,11	9,13	15,17	-	29
	$m:n$분할	20,27,30	-	32	34,36	-	-
	$m:n:l$분할	31	-	33,35	36	-	-

표 1: 분할론의 명제 분석

지금까지 살펴본 넓이의 등분할에 대한 수학사적 분석결과를 통해 다음과 같은 2가지의 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 세계 최초의 교수법이 넓이의 등분할 문제를 다루고 있을 만큼 매우 실용적 필요성에 의해 넓이의 등분할 개념이 발생하였다. 이로 인해 넓이의 등분할 문제는 매우 포괄적이고 다양한 접근 방법이 존재하고 있다. 따라서 넓이의 등분할은 개념의 확장 가능성이 매우 높은 것으로 보인다.

둘째, 넓이의 등분할은 본질적으로 두 가지의 서로 다른 유형으로 분류할 수 있다. 하나는 주어져 있는 도형 자체를 물리적으로 등분할시키는 분할이다. 이것을 물리적 등분할이라 부르겠다. 다음은 주어져 있는 도형이 가지는 넓이의 수량적 값이 등분할되고, 처음과 닮음인 새로운 도형을 생성시키는 양적인 분할이다. 이것을 수리적 등분할이라 부르겠다. 물리적 등분할의 대표적인 예는 Euclid의 분할론이고, 수리적 등분할의 대표적인 예는 피타고라스 정리이다.

4 기하적 등분할 개념이 포함된 내용 분석

수학의 역사적 발생 과정을 네 시대로 구분하면 수학 태동기, 초등수학기, 변량수학기, 현대수학기로 구분할 수 있다[12]. 이 중 초등수학기는 수학이 독자적 학문으로 형성되기 시작한 기원전 6세기부터 15세기의 시기로 수학의 역사에서 가장 중요한 시기이다. 중학교에서 다루어지는 대부분의 수학 개념이 이 시기에 확고하게 정착되었다는 측면에서 중요한 의의를 지니고 있다. 특히 이 시기의 가장 두드러진 수학적 특성은 기하적인 방법으로 수학을 탐구하였다는 점이다. 따라서, 학교수학에서 수와 연산, 문자와 식, 함수영역에 포함되는 다양한 개념도 기하적 방법으로 개념이 형성되어졌다는 것이다. 이 절에서는 등분할 개념이 포함되어 있으면서 기하적 방법으로 접근을 시도한 다양한 수학적 내용에 대해 살펴보기로 한다.

등분할19 수천년전 고대 이집트인들이 사용한 분수를 보면 흥미로운 부분이 있다. 그것은 분자가 1인 단위분수만을 사용하고 있다는 점이다[1, 19]. 유리수 중에서 $\frac{1}{a}$의 형

1	26
2	*52
4	*104
$\frac{1}{2}$	*13
$\frac{1}{13}$	*2
$\frac{1}{26}$	1

그림 16: 나눗셈 도표

태만을 사용하였다는 것은 주어져 있는 양을 a로 등분할하였다는 것을 전제로 한 것이다. 따라서 고대 이집트인들의 사고에는 등분할에 대한 사고가 뚜렷하게 자리 잡고 있었음을 알 수 있다.

게다가 메소포타미아 함무라비 왕조에서 나온 여러 서판들을 통해 보면, 고대 바빌로니아 인들은 60진법을 사용한 것으로 알려져 있다[16]. 왜 하필 10이 아닌 60을 밑수로 선택하였는지에 대해 Skinner[34]는 '10은 2와 5로만 나누어지기 때문에 등분할 측면에서는 활용가치가 많이 떨어진다. 그러나 12는 2, 3, 4, 6 등으로 나누어지고, 60은 이보다 더 많은 수로 나누어진다. 소수점 대신에 1/3, 1/10 등과 같은 분수를 활용해서 사물을 등분할 한 것이다' 라고 지적하고 있다. 즉, 그들이 평소에 필요한 도량형 사용의 편리성 때문이라는 지적이다. 60진법을 사용하면 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$ 총 10가지 방법으로 등분할이 가능해 진다. 이처럼 고대 바빌로니아인들이 직관적으로 분명한 10진법 대신에 다소 불편해 보이는 60진법을 사용하게 할 만큼 등분할 개념은 매우 중요한 문제였음을 알 수 있다.

등분할20 고대 이집트인들의 나눗셈 계산 방법을 보면 매우 흥미로운 점이 있다. 169÷26의 연산 과정을 보면 <그림 16>의 나눗셈 도표와 같다[12, 26].

26보다 작은 수에 대한 몫을 구하기 위한 방법으로 26의 등분할을 활용하고 있다. 즉, 26의 $\frac{1}{2}$ 인 13, 26의 $\frac{1}{13}$ 인 2, 26의 $\frac{1}{26}$ 인 1을 이용하여 몫을 구하고 있다. 고대 이집트인들은 나눗셈 과정에서 등분할 개념을 정확하게 활용하고 있음을 알 수 있다.

등분할21 고대 그리스 시대에는 수와 음악은 본질적으로 동일한 것이었다[34]. 기원전 400년경 Platon은 전제군주가 되기 위한 수는 729(3^6)라고 주장하였다. 이러한 그의 생각의 근원에는 수에 대한 경외심과 더불어 음악과 인간의 영혼에 특별한 관계가 있다고 믿는 생각 때문이었다. 그의 이러한 생각을 기하적으로 두 수열로 등분할하여 나타낸 것이 라모따(Platonic Lambda)이다. Platon은 수를 신성하게 다루면서 기하적 등분할 모양을 통해 이를 형상화한 것이다.

등분할22 기원전 380년경 Archytas는 세계 최초로 수학교육과정에 관심을 가졌는데, 그는 정지하고 있는 수를 다루는 수론, 움직이는 수를 다루는 음악, 정지하고 있는 대상

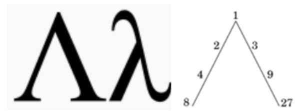

그림 17: Lambda

을 다루는 기하학, 움직이는 대상을 다루는 천문학으로 수학을 구분지은 것으로 알려져 있다[16, 17]. 여기서 음악은 기원전 550년경의 Pythagoras에 의해 만들어진 것인데, 음악의 출발은 Pythagoras에 의한 현의 등분할 개념에서 출발하였다. Pythagoras는 주어져 있는 현의 길이를 $\frac{1}{2}$로 하면 그 음의 높이가 한 옥타브 높아진다고 생각하였고[34], 이를 기반으로 음계를 만들었다[19, 35]. 즉, 음악의 가장 기본적 이론이 현의 길이에 대한 이등분할에서 출발한 것임을 알 수 있다.

등분할23 두 기하적 대상 A, B(선분)가 주어져 있을 경우를 생각해 보자. 대상 A를 등분할하여 얻은 한 부분의 크기를 g라고 하고, 대상 B를 m등분할하여 얻은 한 부분의 크기를 g'이라고 하자. 즉, 등분할 대상이 한 개가 아니라 두 개인 것이다. 여기서 g와 g'의 크기가 서로 같도록 할 수 있는 등분할 $m : n$이 존재에 대해 고대 그리스인들은 큰 관심을 가졌다[20]. 이 개념은 오늘날 최대공약수라는 개념으로 발전되게 되는데, 최초의 모습은 선분의 등분할에서 발생한 것이 분명하다. Euclid[18]의 원론을 보면 공통측도라는 개념으로 다루어지고 있음을 확인할 수 있다.

등분할24 원론 VII권 정의 6과 정의 7은 홀수와 짝수의 정의를 소개하고 있다. 짝수란 '두 개의 동일한 부분으로 등분할이 가능한 수'를 의미하고, 홀수란 '두 개의 동일한 부분으로 등분할할 수 없는 수'를 의미한다[3]. 원론의 VII장에서 다루어지는 수는 양의 정수였다. 당시 수를 선분으로 표현하였다는 것을 고려한다면, 등분할의 가능 유무에 따라 홀수와 짝수를 나누었음을 알 수 있다.

등분할25 기원전 280년경 Aristarchus는 지구와 태양과 달사이의 거리의 비를 구한 것으로 유명하다. 그는 특히 단위에 관심이 많았는데 1스타디온을 손가락 10,000개의 나비와 같다고 진술하였다[16]. 이는 측정 단위의 설정에 있어서 등분할 개념을 도입한 명백한 증거가 된다. Eratosthenes도 기원전 240년경 지구 둘레를 측정하면서 지구의 둘레를 $\frac{1}{50}$로 등분할하여 중심각을 구하였고, 19세기 미터법을 표준단위로 사용할 때, 1m는 지구둘레의 4천만분의 1로 규정하기도 하였다[34]. 결국 단위는 등분할에 기초하여 생성되어진 것임을 알 수 있다.

등분할26 16세기 유럽에서의 나눗셈 계산은 고대 이집트와는 사뭇 차이가 있다. 기호대수학이 크게 발달하여 수의 형식적 조작으로 연산이 가능했기 때문이다. 하지만, 고대 이집트와 비교해서 변하지 않은 점은 여전히 등분할 개념을 활용하여 나눗셈 연산을

실행하고 있다는 점이다. 구체적으로 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3}$ 을 통해 살펴보자. 16세기 유럽에서는 이 계산을 $\frac{3}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{3\times3}{3\times4} \div \frac{4\times2}{4\times3} = \frac{3\times3}{4\times2} = \frac{9}{8}$ 와 같이 진행하였다[27]. 이 계산 과정을 보면 피젯수, 제수의 분모를 동일하게 맞추어서, 등분할 개념을 통해 그 계산 결과가 산출되도록 실행하고 있다.

지금까지 기하적 접근 방법을 가지는 산술에서의 등분할 개념에 대해 살펴보았다. 여기서 한 가지 생각할 것은 단위이다. 단위는 모든 부분들의 크기가 동일한 것이어야 한다[25]. 즉, 등분할의 개념으로 산술이 시작된다고 볼 수 있다. 하지만 단위 자체는 등분할의 대상이 아니라는 것이다. 단지, 단위는 거듭된 곱을 위한 도구이었다는 점이다.

5 분석을 통해 얻은 등분할 방법 및 개념의 확장

중학교 기하영역에 제시되어진 네 가지 등분할(선분, 각, 호, 넓이의 등분할)과 관련된 수학사적 분석 결과를 살펴보았다. 이러한 분석 결과를 통해 중학교 기하영역에서 적용 가능하고 중학생의 학습수준에 부합된 범위 내에서 다음 두 가지 유형으로 확장 가능성이 있었다. 하나는 선분, 각, 호의 등분할에 대한 방법적 측면에서의 확장이고, 다른 하나는 넓이의 등분할에 대한 개념적 측면에서의 확장이다. 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

5.1 등분할 방법에 대한 방법적 측면의 확장

선분의 등분할은 고대 그리스 시대 이래로 자와 컴퍼스를 이용하여 가능하다는 것이 분명히 입증되어 있었다. 게다가 Zenon의 이분법 및 Galileo의 살뷔아티에서 볼 수 있듯이 선분의 무한 등분할에도 관심을 가진 것으로 보인다. 따라서 선분의 등분할은 개념적 측면에서의 확장은 학교수학 수준에서는 불가능하다. 하지만 선분의 등분할에 대한 일반화된 n등분할하는 방법적 측면의 확장은 가능하다. 즉, 2등분할, 3등분할, $\cdots$, n등분할을 전혀 관련없이 진행하는 것이 아니라, 이들을 연속적으로 진행할 수 있는 방법의 실현을 통해 n등분점을 연속적으로 구할 수 있다.

이와 같은 방법은 수학사에서 얻은 선분의 등분할에 대한 닮음의 개념과 Prasolov[31]의 평행사변형 방법을 결합시켜 제시할 수 있다.

과정1 평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다는 성질을 이용하여 주어진 선분 AB의 이등분점을 구할 수 있다.

주어진 선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형 ACBD를 작도한다(그림 18). 선분 CD를 긋는다. 그러면, 두 대각선 AB와 CD의 교점 M_2는 선분 AB를 이등분할한다.

과정2 선분 AB의 중점과 선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형을 이용하면 주어진 선분 AB의 3등분점을 구할 수 있다(그림 18).

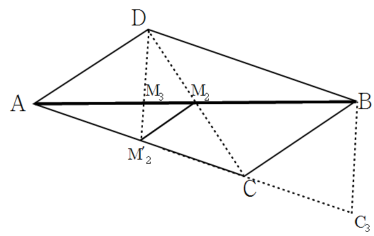

그림 18: 등분할 확장1

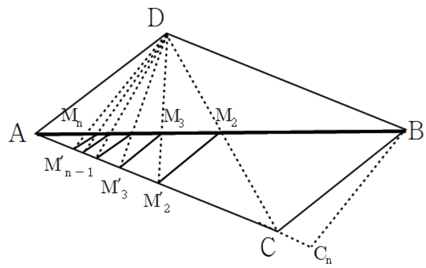

그림 19: 등분할 확장2

(풀이) [과정1]에서의 평행사변형에서 선분 AB의 중점 M_2를 지나고 두 변 AD와 BC에 평행인 선분과 선분 AC와의 교점을 M_2'라고 하자. 선분 DM_2'와 선분 AB의 교점을 M_3라고 하면, 점 M_3는 선분 AB의 3등분점이다. 왜냐하면, 꼭짓점 B를 지나고 선분 DM_2'에 평행인 직선과 선분 AC의 연장선과의 교점을 C_3라고 하면, $\mathrm{AM}_2' = \frac{1}{3}\ \mathrm{AC}_3$이고 $\triangle \mathrm{AC}_3\mathrm{B} \sim \triangle \mathrm{AM}_2'\mathrm{M}_3$이기 때문이다.

과정$\mathbf{n-1}$ 선분 AB의 $(n-2)$등분점과 선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형을 이용하면 주어져 있는 선분 AB의 $(n-1)$등분점을 구할 수 있다.

과정n 선분 AB의 $(n-1)$등분점과 선분 AB를 대각선으로 하는 평행사변형을 이용하면 주어진 선분 AB의 n등분점을 구할 수 있다(그림 19).

(풀이) [과정$n-1$]에서의 평행사변형에서 선분 AB의 $(n-1)$등분점 M_{n-1}을 지나고 두 변 AD와 BC에 평행인 선분이 선분 AC와의 교점을 M_{n-1}'이라고 하자. 선분 DM_{n-1}'과 선분 AB의 교점을 M_n이라고 하면, 점 M_n는 선분 AB의 n등분점이다. 왜냐하면, 꼭짓점 B를 지나고 선분 DM_{n-1}'에 평행인 직선과 선분 AC의 연장선과의 교점을 C_n이라고 하면, $\mathrm{AM}_{n-1}' = \frac{1}{n}\mathrm{AC}_n$이고 $\triangle \mathrm{AC}_n\mathrm{B} \sim \triangle \mathrm{AM}_{n-1}'\mathrm{M}_n$이기 때문이다.

이제 각과 호의 등분할에 대한 확장에 대해 살펴보자. 본질적으로 호의 등분할은 각의 등분할과 동일하므로 여기에서는 각의 등분할을 중심으로 살펴본다. 고대 그리스 이래로 자와 컴퍼스를 이용한 각의 3등분은 불가능하였다. 하지만, Platon, Archimedes 등

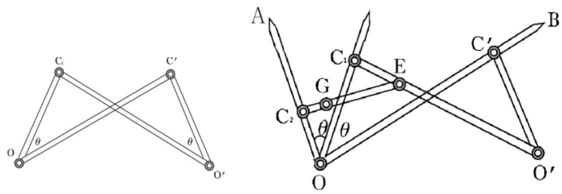

그림 20: 등분할 확장3

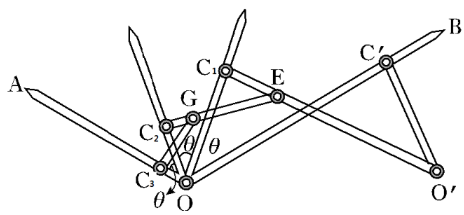

그림 21: 등분할 확장4

당대의 수학자들은 다양한 기구나 곡선을 이용하여 이 문제해결에 성공하였다. 따라서 각의 등분할 역시, 도구를 이용한 일반화된 n등분할 방법 개발이라는 방법적 측면의 확장은 가능하다. 즉, 각의 2등분, 3등분, $\cdots$, n등분을 동일한 패턴으로 진행할 수 있는 방법의 실현을 통해 각의 n등분선을 연속적으로 구할 수 있다.

이와 같은 방법은 수학사에서 얻은 각의 등분할에 대한 Yates[36], 김진호와 김용대와 서보억[2]이 제시한 기구와 닮음의 개념을 통합하여 제시할 수 있다.

과정1 한 쌍씩 길이가 같은 두 쌍의 막대기로 그림과 같이 꼬여 있는 등변사다리꼴을 만든다(그림 20왼쪽). 꼬인 두 변의 길이는 다른 두 변의 길이보다 더 길도록 한다. 그 다음 처음 만든 등변사다리꼴의 짧은 막대(막대 OC_1)를 대각선이 되도록 하는 새로운 등변사다리꼴을 추가로 구성한다. 이 때 새로 만들어지는 등변사다리꼴은 처음 등변사다리꼴과 닮음이 되도록 한다. 그리고나서 이 기구를 $\angle AOB$ 위에 올려 놓으면 선분 OC_1 에 의해 $\angle AOB$는 이등분된다.

과정2 앞의 마지막 그림에서 짧은 막대(막대 OC_2)를 대각선이 되도록 하는 새로운 등변사다리꼴을 추가로 구성한다. 이 때 새로 만들어지는 등변사다리꼴은 처음 등변사다리꼴과 닮음이 되도록 한다. 그러면, 이 기구를 $\angle AOB$ 위에 올려 놓으면 선분 OC_1과 OC_2에 의해 $\angle AOB$는 삼등분된다.

과정$\mathbf{n-2}$ $(n-1)$번째의 등변사다리꼴에서 짧은 막대(막대 OC_{n-2})를 대각선이 되도록 하는 새로운 등변사다리꼴을 추가로 구성한다. 이 때 새로 만들어지는 등변사다리꼴은 처음 등변사다리꼴과 닮음이 되도록 한다. 그러면, 이 기구를 $\angle AOB$ 위에 올려 놓으면 선분 OC_1, OC_2, $\cdots$, OC_{n-2}에 의해서 $\angle AOB$는 $(n-1)$등분된다.

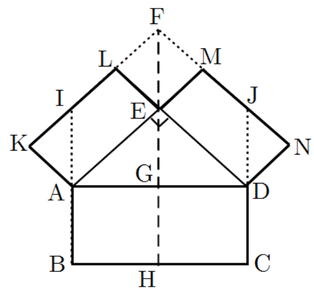

그림 22: 등분할 확장5

과정n − 1 n번째의 등변사다리꼴에서 짧은 막대(막대 OC_{n-1})을 대각선이 되도록 하는 새로운 등변사다리꼴을 추가로 구성한다. 이 때 새로 만들어지는 등변사다리꼴은 처음 등변사다리꼴과 닮음이 되도록 한다. 그러면, 이 기구를 $\angle AOB$ 위에 올려 놓으면 선분 OC_1, OC_2, $\cdots$, OC_{n-1} 에 의해서 $\angle AOB$는 n등분된다.

5.2 등분할 개념에 대한 개념적 측면의 확장

넓이의 등분할 문제를 물리적 등분할과 수리적 등분할로 구분하였다. 물리적 등분할의 경우, 도형 고유의 모양에 따라 특유의 등분할 방법이 존재할 수 밖에 없기에 본 연구에서는 수리적 등분할을 중심으로 개념에 대한 확장을 제시하고자 한다. 수학사적 분석을 통해 수리적 등분할의 전형적 예가 피타고라스 정리였다. 이 때, 피타고라스 정리를 등분할이라는 관점에서 보면, 넓이가 작은 두 정사각형으로 등분할이었다. 이제 등분할 관점에서 피타고라스 정리를 어떻게 확장할 수 있는지 두 유형으로 제시하고자 한다. 각각의 경우에 대해 살펴보자.

첫째, 정사각형보다 더 일반적인 형태인 직사각형에서 처음과 닮음이면서 넓이가 반이 되는 두 직사각형으로의 등분할이 가능하다. 주어져 있는 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분할하면서 닮음인 두 직사각형 작도 방법은 다음과 같다(그림 22).

먼저 선분 AD를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 AED를 그린다. 점 E를 지나면서 변 AB에 평행인 직선 위에 AB=EF인 점 F를 잡는다. 두 선분 AE, EF와 두 선분 DE, EF를 두 변으로 하는 평행사변형 IAEF, EDJF를 작도하면, 이 두 평행사변형의 넓이는 서로 같고 주어져 있는 처음 직사각형의 넓이의 반이다. 이제 각각의 평행사변형과 넓이가 같은 직사각형 KAEL과 EDNM을 작도하면, 이 두 직사각형이 처음 직사각형과 닮음이고 넓이를 이등분하게 된다.

둘째, 직사각형 보다 더 일반적인 형태인 평행사변형에서 처음과 닮음이면서 넓이가 반이 되는 두 평행사변형으로의 등분할이 가능하다. 주어져 있는 평행사변형 ABCD를

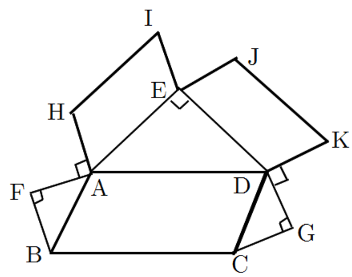

그림 23: 등분할 확장6

이등분하면서 닮음인 두 평행사각형을 작도 방법은 다음과 같다(그림 23).

먼저 선분 AD를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 AED를 그린다. 그 다음 선분 AB와 선분 CD를 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 FBA와 DCG를 그린다. 점 A를 지나 선분 FA에 수직인 직선 위에 AF=AH인 점 H를 잡는다. 동일하게 점 K도 잡는다. 두 선분 AE, AH와 두 선분 DK, ED를 두 변으로 하는 평행사변형 HAEI, EDKJ를 작도하면, 이 두 평행사변형의 넓이는 서로 같고 주어져 있는 처음 평행사변형의 넓이를 이등분한 것이 된다.

6 결론 및 제언

본 연구에서는 중학교 기하영역에서 제시하고 있는 중요한 개념 중의 하나인 등분할 개념을 바탕으로 연구를 진행하였다. 먼저, 중학교 기하영역에 다루어지고 있는 등분할 개념을 분석하고, 이러한 분석을 바탕으로 수학사적 고찰을 통해 등분할 개념의 확장 가능성에 대해 탐색하였다. 본 연구를 통해 얻은 결과를 요약 정리하면 다음과 같다.

첫째, 중학교에서 다루어지고 있는 등분할 개념에 대한 분석 결과 총 4개의 하위영역으로 분류할 수 있었다. 구체적으로 선분에 대한 등분할, 각에 대한 등분할, 호에 대한 등분할, 넓이에 대한 등분할 개념으로 세분화할 수 있었고, 이러한 내용들은 중학교 전 학년에 걸쳐 폭넓게 다루어지고 있었다.

둘째, 세분화된 네 가지 관점에서 수학사적 분석을 실시하였다. 최초의 분할은 등분할보다는 임의의 분할에 관심이 있었고, 그 후 2등분, 3등분, n등분할에 대한 작도 가능성에 초점을 두고 발전하였다. 하지만, 작도 가능한 경우와 불가능한 경우로 구분되어 지자, 작도 가능한 경우는 임의의 n등분할, 무한등분할 개념으로 발전한 다음, 작도의 편리성을 위한 기구의 개발로 이어졌다. 반면, 작도가 불가능한 경우는 등분할을 위한 기구뿐만 아니라, 특별하고 정교한 곡선의 개발로 연결되어졌다. 이러한 수학적 노력의 결과로 등분할 개념은 등분할 자체에만 머물지 않고, 다양한 수학적 개념의 형성과 발전

및 정당화 확보에 중요한 영향을 미친 것으로 나타났다.

셋째, 수학사적 분석 결과를 바탕으로 확장 가능성이 있는 등분할 개념을 추출하였다. 추출된 개념을 바탕으로 두 가지 측면에서 확장이 가능하였다. 먼저 선분의 등분할과 각의 등분할 개념은 방법적 측면에서의 확장을 시도하였고, 다음으로 넓이의 등분할 개념은 개념적 측면에서 확장을 시도하였다. 그 결과 선분의 n등분점을 연속적으로 제시하는 방법의 실현, 각의 n등분할이 가능한 도구의 제시, 일반적인 사각형에서의 넓이의 등분할에 대한 구체적인 방법의 개발이 가능하였다.

본 연구에서의 연구결과를 통해 기대되는 효과 및 활용방안을 몇 가지로 나누어 제시할 수 있다. 첫째, 본 연구의 결과는 수학교사들에게 수학탐구방법에 대한 전형적인 사례를 제공하여 줄 수 있다. 전문가 수학과 학교수학이 분명이 구분된 상황에서 학교수학 연구에 대한 전형적인 예를 제시할 수 있었다. 둘째, 학교수학 교육과정의 개정 방향이 내용의 양보다는 내용의 깊이에 초점을 맞출 수 있는 유의미한 자료를 제공하였다. 셋째, 기하 내용영역에서 등분할 개념에 대한 수학적 의미를 명확히 할 수 있을 뿐 아니라, 구체적 수학 학습 내용의 확대를 기대할 수 있다. 넷째, 수학사의 분석을 통해 역사적으로 발생한 다양한 등분할 개념을 제공함으로써 이를 활용한 구체적인 학습 방법을 개발할 수 있다. 본 연구에서 다루는 등분할 개념에 대한 수학사적 분석 과정을 수업에 활용할 경우, 학습의 효과의 향상과 함께 새로운 학습 방안 구성에 긍정적인 시사점이 기대된다. 다섯째, 등분할에 대한 확장 및 확장 과정을 통해 수학사를 활용한 수학교육의 새로운 가능성을 제공할 수 있다. 수학사가 단순한 흥미 유발이나 현재의 수학내용의 발생 원리를 이해하는 수준을 넘어, 새로운 개념 형성을 위한 기초로 사용될 수 있다는 가능성을 제공할 것으로 기대된다.

감사의 글 보다 좋은 논문을 위해 성심어린 가르침과 충고를 해주신 심사위원들께 감사의 마음을 전합니다.

참고 문헌

1. 김용운, 『수학사대전』, 경문사, 2010.
2. 김진호, 김용대, 서보억, 『3대 작도 문제 해결을 위한 곡선과 기구』, 교우사, 2011.
3. 박한식, 『교직수학』, 대한교과서주식회사, 1991.
4. 서보억, 「중학교 영재학생의 수학기초지식의 이해 정도에 대한 조사 연구」, 한국학교수학회논문집 12(2009) No. 1, pp. 131–149.
5. 유희찬 외, 『중학교 1학년 수학』, (주)미래엔컬쳐그룹, 2009.
6. 유희찬 외, 『중학교 2학년 수학』, (주)미래엔컬쳐그룹, 2009.
7. 유희찬 외, 『중학교 3학년 수학』, (주)미래엔컬쳐그룹, 2009.

8. 윤대원, 서보억, 김동근, 「자료론에 대하여」, 한국수학사학회지 21(2007) No. 2, pp. 55–70.
9. 이종우, 『기하학의 역사적 배경과 발달』, 경문사, 2002.
10. 조성민, 「역사발생적 관점에서 본 행렬 지도의 재음미」, 한국학교수학회논문집 12(2009) No. 1, pp. 99–114.
11. 최근배, 「분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구」, 학교수학 12(2010) No. 3, pp. 411–424.
12. 한인기, 『교사를 위한 수학사』, 교우사, 2003.
13. 한인기, 에르든에프, 『유추를 통한 수학탐구』, 승산, 2005.
14. 한인기, 「유추를 이용한 삼각형의 각의 이등분선 성질 탐구」 수학교육 41(2002) No. 2, pp. 215–225.
15. R. C. Archibald, *Euclid's book on divisions of figures*, Cambridge University Press, 1915.
16. C. B. Boyer & U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
17. Van der Waerden. B. L., (English translation by A. Dresden), *Science Awakening*, Science Editions, New York, 1963.
18. Euclid, *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume*, Green Lion Press, 2003.
19. H. Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, Harcourt Brace, 1962.
20. H. Eves, *Great moments in mathematics(Before 1650)*, The Dolciani Mathematical Expositions 5, MAA, 1983.
21. T. L. Heath, *The Thriteen Books Of Euclid's Elements*, London, Cambridge University Press, 1952.
22. T. L. Heath, *A history of Greek mathematics (Vol. 1)*, Adamant Media Corporation, 2008.
23. T. L. Heath, *A history of Greek mathematics (Vol. 2)*, Adamant Media Corporation, 2008.
24. T. L. Heath, *Aristarchus of Samos: The Ancient Copernicus*, Dover Press, 1981.
25. J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, Dover Publications, Inc., 1968.
26. M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times: Volume1*, Oxford University Press, 1972.
27. L. L. Jackson, *The educational significance of sixteenth century arithmetic*, Columbia University, 1906.
28. L. N. H. Bunt, P. S. Jones & J. D. Bedient, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*, Dover Publications, Inc., New York, 1988, ISBN: 0-486-25563-8.
29. R. E. Mayer & M. Hegarty, The Process of Understanding Mathematical Problems, In *The Nature of Mathematical Thinking*(Sternberg, R. J. and Ben-Zeev, T., editors), Lawrence Erlbaum Associates, 1996.
30. G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning*, *Vol. I*, Princeton University Press, 1973.

31. V. V. Prasolov, *Prablemi po Plannimetriya*, Nauka, 1986.
32. Ptolemy (trans. Toomer, G. J.), *Ptolemy's Almagest*, Princeton Unversity Press, 1998.
33. A. H. Schoenfeld, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press Inc., 1985
34. S. Skinner, *Sacred geometry*, Octopus Publishing Group, 2007.
35. D. E. Smith, *History of Mathematics*, Dover Press, 1958.
36. R. C. Yates, *The trisection problem*, NCTM, 1971.

Suh Bo Euk
Department of Mathematics, Catholic University of Daegu
E-mail: eukeuk@cu.ac.kr

학자들은 수학계를 대변할 능력을 잃었다. 이에 국제적인 의무감을 갖게 된 미국의 스톤(Stone)을 비롯한 수학자들은 정치에 상관없이 모든 나라가 가입할 수 있는 새 IMU를 탄생시킨다. 이 논문은 제2차 세계대전 이후에 IMU의 재탄생 과정과 1950년도의 ICM에서 일어난 일들을 면밀히 알아봄으로써 20세기 중반의 수학계의 발전상을 연구하고자 한다.

SUH Bo Euk 서보억, A Historical Process Analysis and Extension of Division into Equal Parts in Middle School Geometry『중학교 기하영역 등분할 개념에 대한 수학사적 분석 및 확장에 대한 연구』

본 연구에서는 중학교 기하영역에서 다루어지는 등분할 개념을 조사하고, 이를 바탕으로 수학사적 분석을 통해 등분할 개념에 대한 확장 가능성을 탐구한 문헌연구이다. 중학교 기하영역에 대한 조사를 통해 선분의 등분할, 각의 등분할, 호의 등분할, 넓이의 등분할 개념이 다루어지고 있음을 발견하였다. 이들 네 개의 등분할 개념에 대한 수학사적 분석을 통해 역사적으로 등분할 개념이 다양한 측면에서 다루어졌음을 확인할 수 있었다. 최종적으로 선분의 등분할 개념과 각(호)의 등분할 개념은 방법적 측면에서의 확장에 대해 고찰하였고, 넓이의 등분할 개념은 개념적 측면에서의 확장에 대해 탐색하였다. 본 연구에서 제시한 등분할에 대한 수학사적 분석 및 확장에 대한 분석 결과를 통해 중등학교에서 수학사의 효과적 활용에 대한 방향 설정이 기대된다.

JANG Yun Sun, KIM Sung Joon 장윤선, 김성준 A Study on the Usage of Mathematics Notes in Elementary School Classes『수학노트 활용 사례에 대한 조사 연구』

본 연구는 학교수학과 수학적 의사소통을 연계하기 위한 방안으로 초등학교 현장교사들이 수업에서 사용하고 있는 수학노트의 활용 사례를 살펴본다. 수학적 의사소통은 말하기, 듣기, 읽기 활동까지를 포괄하지만 여기서는 수학적 쓰기 활동, 특히 수학노트의 활용과 관련된 목적과 필요성, 유형 등에 대해 알아본다. 이를 위해 교사들과의 면담과 서술형 설문지를 통해 수학노트의 사용 이유, 수학노트에 담을 내용, 수학노트 사용에 따른 변화 등에 대한 교사들의 전반적 인식을 살펴본다. 본 연구는 교사들에게 수학적 사고력 또는 계산 능력의 신장을 포함한 수학노트의 활용 효과와 그에 대한 정보 제공 및 수학노트 사용을 위한 기초자료의 제시를 목적으로 한다.

PARK SunYong 박선용, A Historical Analysis of Barrow's Theorem and Its Educational Implication『Barrow 정리의 수학사적 분석과 그에 따른 교육적 시사점에 대한 연구』

이 연구에서는 수학사에 대한 해석학적 관점에서 Barrow 정리의 특징에 대해 분석하고, 현대적인 역사발생적 원리에 기초해 수학적 재발명 활동을 이끄는 미적분학 교수−학습 계열에 대해 논의한다. Barrow 정리에 대한 수학사적 분석을 통해서는, 그 정리의 기하학적 특성을 드러내고, 그 정리를 다룬 Barrow의 의도에 대해 추측하고, Barrow가 겪은 인식론적 장애에 대해 고찰하였다. 그리고 이러한 분석을 바탕으로 하여, 학생들이 '적분'과 '미분의 역'이 같다는 것을 인식하도록 하기 위한 목적 지향적이고 의미 지향적 교수−학습을 제안하고 현재 학교수학 미적분학에서 보완해야 할 사항에 대해 지적하였다.

KIM Chang Il, LEE Bong Ju 김창일, 이봉주 Mathematics Classroom in Departmentalized Classroom System: What are Required for Effective Establishment『수학과 교과교실의 효율적인 환경 구성과 운영을 위한 방향 탐색』