韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2013. 02. 제 52권, 제 1호, 97-109.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2013, Vol. 52, No. 1, 97-109.

수학개념 형성단계에 대한 모델과 적용사례 - 분수체 형성 추상화 단계

최은미(한남대학교)

Ⅰ. 서론

수학적 대상물의 구조를 체계적으로 다루는 추상대수는 많은 학생들이 수학과정에서 가장 어렵게 여기는 교과 중 하나이다(Dubinsky 외, 1994; Leron 외, 1995a). 알고리즘이나 문제풀이 방법이 강조되던 기존의 교과들과는 달리 추상대수는 수학적 구조와 증명을 탐구하는 것으로서, 수학적 추상화를 잘 다룰 수 있는 학생들도 있지만 그렇지 못한 경우는 이 강좌를 무척 힘들어하다가 결과적으로 수학으로부터 멀어지는 현상을 야기하기도 한다. 교수들은 학생들이 그 과목에서 겪는 어려움을 학습내용이 어렵기 때문에 당연하다고 생각했을 뿐이지 왜 그렇게 어려운지에 관해 인식론적 이해에 기초한 연구는 거의 진행되지 못하였다. 추상대수교육의 연구 뿐만 아니라 대학수학교육에 대한 전반적인 연구가 우리나라에서 시작된 것은 그다지 오래 되지 않았다. 연구가 진행된 경우에도 내용면에서 볼 때 대부분이 기초과목인 미적분학에 관한 것이며, 고급단계에서는 선형대수(최영한, 2004), 미분방정식(권오남, 2005), 추상대수(박혜숙 외, 2005)등에 관련된 몇 몇 연구들이 있다. 대학수학교육 연구가 미적분학을 중심으로 머무는 현상은 외국에서도 거의 유사하다고 할 수 있다. 미적분학에 대한 교수·학습연구는 전통적과 개혁적 미적분 강좌 사이에 수학전쟁이라 불릴 만큼의 치열한 논쟁과 연구과정을 거쳐 1990년대 들어 새수학(new math)의 장을 열었다. 한편 학교 급별로 볼 때 대부분의 연구들이 초·중등교육에 집중되어 있으며 대학교육으로 가면서 그 분량이 급속히 감소된다(Findell, 2001). 대학수학교육에 관련된 연구들을 분석한 Scher 외(1996)에 따르면 1985~94년에 수학 교수·학습에 관련된 논문이 312개 있는데, 미적분 수준

[표 1] 내용과 연구 결과에 따른 논문 수 [Scher 외, 1996]
[Table 1] Number of papers according to subject and result

연구결과 / 내용		교수법 (143)	개념 (88)	지표 (57)	이론 (55)	평가 (35)	그 외 (11)
미적분	82	39	24	15	10	3	3
함수	44	20	24	·	17	6	1
통계	40	21	6	17	·	1	1
미확인	40	24	4	11	3	·	1
문제해결	26	9	5	12	2	2	2
일반수학	25	4	2	1	13	11	·
증명	16	5	7	·	7	3	·
전산수학	15	7	5	4	·	2	·
확률	9	6	7	·	1	1	·
그 외	7	1	3	1	2	·	1
선형대수	5	2	2	·	1	·	1
수학교육	5	·	·	·	·	4	1
논리	5	2	3	1	·	·	·
경영수학	3	3	·	·	·	·	·
실해석학	3	1	1	·	1	1	·
미방	3	2	·	·	1	·	·
기하	3	3	·	·	·	·	·
이산수학	3	·	2	1	·	·	·
추상대수	2	1	1		1	1	·

( ) 수는 전체 312개 중 각 영역에 속한 논문의 수이다. 둘 이상의 영역에 속하는 논문도 있으므로, 행이나 열의 합이 312보다 클 수 있다. · 는 데이터가 없는 경우이다.

을 넘어선 고급수학 강좌에 관한 것이 30개였으며, 그 중에서 단지 2개만이 추상대수의 교수·학습연구라고 했다([표 1]).

1994년 이후에 대학수학교육 연구는 많이 왕성해져서, RCME(Research in collegiate math education, AMS)와

* 접수일(2012년 09월 06일), 수정일(2012년 12월 04일), 게재확정일(2013년 02월 07일)
* ZDM 분류 : D35
* MSC2000분류 : 97D30
* 주제어: 추상대수학, 대학수학교육, 교과과정개발

RUME(Research in undergraduate math education, MAA) 등의 논문집이 큰 역할을 했다. 그러나 추상대수의 교수·학습에 관한 연구는 여전히 소수여서 Findell (2001)에 의하면 15개 정도의 논문이 있는데 그 중에서 11개는 1994년 이후에 발표되었고, 다시 그 중에서 9개는 E. Dubinsky와 U. Leron을 중심으로 하는 연구팀에서 수행한 것이라고 했다.

한편 1970년대 초부터 GAP, ESG, FGB, ISETL[1]등과 같은 CAS가 차례로 개발되었다. 미적분학 강좌에 테크노로지를 도입한 교수법을 경험한 사람들이 그러한 방법을 추상대수 강좌에 적용해 보고자 했다. Dubinsky (1995)와 Leron 외(1995a)는 ISETL을, Blanchard 외(2001)는 GAP를, Charlwood (2002)는 Maple을, Maycock (2002)은 ESG를, 또한 Perry(2004)는 FGB를 도입한 교수법을 각각 연구했다. 미국수학협회(MAA)는 Innovations in teaching abstract algebra학회(1999년)를 개최한 후 2006년에 Planning group for the algebra: Gateway to a technological future를 열어 대수교육의 중요성을 확인하고(Katz, 2007), 테크노로지를 사용한 추상대수학의 교수·학습 방법을 논의하여 새로운 강좌 모형을 공유하고자 했다.

본 논문은 추상대수교육 연구의 일환으로 학생들이 추상대수의 개념을 습득하고 적용하는 단계를 관찰하고 그 과정에서 겪는 어려움과 오개념의 원인을 조사하여 인식론적 학습모델인 APOS-모델과 P-K-모델에 기초하여 분석하고자 하였다. 이를 위해 중부권에 소재한 중위권 대학의 수학과 3학년 3명 학생을 대상으로 정역으로부터 분수체를 만드는 추상화 단계를 조사하였다.

연구문제: 학생들은 정역으로부터 분수체를 만드는 과정을 어떻게 추상화하는가?

이 과정은 정수 $\mathbb{Z}$ 로부터 유리수 $\mathbb{Q}$ 를 만드는 단계의 일반화 단계이므로, 개념의 추론과 추상화 과정을 거치면 가능할 것이라고 가설했다. 이 실험 결과를 바탕으로 수학적 추상화에 대한 이해를 높이고, 추상대수를 더 잘 이해시킬 수 있는 교수 전략을 제안하고자 한다. 이 연구는 중부권 소재의 중위권 학생 세 명을 대상으로 한 질적 연구로서 다른 지역의 다른 수준대학으로 일반화하는 것은 무리가 있을 수 있다.

1) GAP(Groups, Algorithms, Programs), ESG(Exploring Small Groups), FGB(Finite Group Behavior), ISETL(Interactive Set Language)

Ⅱ. 이론적 배경

1. 추상대수의 학습이론 연구

사고는 간단한 정보적·사실적 지식을 단순히 기억하는 낮은 단계에서 출발하여 점차 복잡한 단계로 발전하여 추상적·개념적 지식을 창조하는 고급단계에 최종적으로 도달한다. Tall 외(1981)는 고급단계의 수학적 사고는 '정확한 수학적 정의'와 그것을 근거로 하는 '정리의 논리적 이해'의 두 핵심 요소로 구성된다고 했다. 그러한 점에서 볼 때 추상적 수학 개념의 '사고'를 통해 대상물의 '구조'를 '논리'적으로 이해하는 것을 목표로 하는 추상대수학은 쉽지 않은 수학적 사고 과정이다. 절차와 반대되는 개념인 수학적 구조(Kieran, 1992)는 1970년대 교육심리학자들과 교과과정개발자들의 중요한 연구 주제 중의 하나였다. 그 중에서 인지발달에 기본적으로 관심이 있었던 Piaget(1970)에게 수학적 구조, 특히 군(group)의 구조는 그의 심리학 이론의 원천이 되었으며, Bruner(1977)는 구조를 인지발달을 위한 가장 근본적인 훈련 영역으로 보아 반드시 가르쳐야한다고 했다.

1) APOS-모델

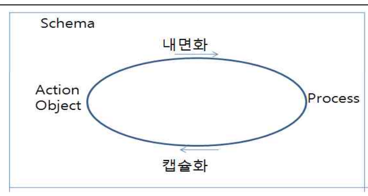
구조적 관점에서 학생들이 수학 개념을 어떻게 습득하는지, 특히 추상대수 학습에서 구조의 개념이 어떻게 발달되는지에 관한 연구는 많지 않다. Dubinsky 외(1994)는 수학을 안다는 것은 공식을 외우고 확인해 볼 수 있는 정도가 아니라 수학적 사고를 할 수 있는 정도만큼 수학을 아는 것이며, 구조적 이해가 있어야만 응용력을 갖게 되고 결국 문제를 해결할 수 있는 고급단계에 도달하게 된다고 했다. 연구업적이 뛰어난 교수가 많은 관심을 기울여 준비한 강좌조차도 학생들의 학습 성취를 높이는데 효과를 내는 것은 아니라고 하면서, Dubinsky 등은 Piaget의 발생적 분할이론을 토대로 학생들의 인지발달 단계를 연구하였다. 그들은 아동 학습에 대한 반성적 추상 연구(Piaget, 1970, p.13)를 대학수학교육 수준으로 확장하기위해, 행동(Action), 과정(Process), 대상(Object), 그리고 쉐마(Schema)의 4단계로 구성된 APOS

-모델([표 2])을 고안했다. 이 모델은 학생들이 수학 개념을 형성해가는 단계를 관찰하고 분석하는 수학학습 이론으로써, 수학 지식은 행동Ⓐ과 과정Ⓟ을 거쳐 대상Ⓞ을 구성하고 그것들이 상황 내에서 의미를 가져 문제 해결을 위한 쉐마Ⓢ를 체계화하는 단계를 반복하면서 완성된다고 했다. 이에 따르면, 개인은 수학적 상황을 다루기 위해 내면화(interiorization)와 캡슐화(encapsulation)같은 정신적 메커니즘을 사용하여 인식론적 구조를 만드는데, 그에 관계된 사고의 구조가 행동, 과정, 대상, 쉐마이다.

[표 2] APOS-모델 [Dubinsky 외, 1994]
[Table 2] APOS-model

행동Ⓐ	주어진 대상물을 기억된 것으로부터 어떻게 연산을 할지를 결정하는데, 우선 대상에 대한 변환을 적용하여 개념을 익히는 단계.
과정Ⓟ	행동을 반복하고 반추를 할 때 형성되는 내적 정신 구조임. 동일한 행동을 하는 것으로 보일 수 있지만, 더 이상 외부 자극을 필요로 하지 않음. 실제 행동을 하지 않고도 과정을 수행할 수 있으며, 그 역방향도 생각하여 다른 과정들로 조립될 수 있음.
대상Ⓞ	과정을 전체로 인식하고 그것 위에서 변형을 만들 수 있을 때, 과정에서 대상이 구성됨.
쉐마Ⓢ	대상 단계가 하나의 개념 구성에 관한 설명인 반면, 여러 개의 수학적 행동, 과정, 대상을 포함하여 그것들이 종합되고 일관성 있는 이론적 체계로 연결되는 단계.

다이어그램



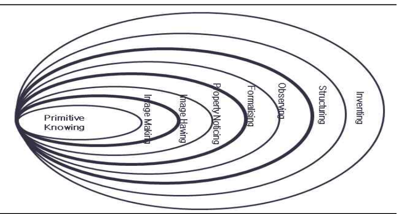
APOS-모델을 바탕으로 Dubinsky 외(1994)는 추상대수의 군, 부분군, 잉여, 정규, 상군과 같은 기본 개념에 대한 학생들의 이해단계를 연구했다. 나아가, Brown 외(1997)는 이항연산, 군, 그리고 부분군에 대한 학생들의 지식습득 과정을 관찰했으며, Asials 외(1997; 1998)는 치환군과 대칭군에 대해, Zazkis 외(1996)는 D_4군에 대한 이해 발전단계를 연구했다. 한편 Leron 외(1995b)는 동형사상에 대해 학생들이 갖는 (오)개념 형성과정을 연구하여 이를 토대로 강의 모형을 제안하기도 했다.

2) Pirie-Kieren의 모델: 개념 이해의 단계를 설명하는 또 하나의 이론으로써 Pirie-Kieren의 모델이 있다(Pirie 외, 1989). 이해는 역동성이 있어서 단번에 획득될 수 없다고 하면서 고급수학 과정에서 이해의 성장을 ①초기지식(primitive knowing), ②이미지구성(image making), ③이미지소유(image having), ④특성인지(property noticing), ⑤형식화(formalising), ⑥관찰(observing), ⑦구조화(structuring), ⑧창조(inventing)의 8단계로 설명했다.

[표 3] 8단계 P-K-모델 [Pirie 외, 1989]
[Table 3] 8 stages of P-K-model

①초기지식	교육 이전의 지식으로 개인마다 다르며 학습발달에 영향을 미침. 여기서 말하는 초기는 낮은 단계가 아니라 시작 단계를 말함.
②이미지구성	초기지식의 수준에 따라 차이를 만들고 그것을 사용하여 새로운 상황을 창조함. 반복된 신체 행위로 새로운 이미지를 만들어 감.
③이미지소유	정신적 묘사가 신체 행동에 관계된 이미지를 대신함. 특정한 신체 행위나 예제를 요구하지 않고 수학을 할 수 있음.
④특성인지	정신적 이미지를 특정한 대상물이나 관계되는 성질과 비교할 수 있음. 이미지들 사이의 차이와 특성을 분별할 수 있음.
⑤형식화	알려진 성질을 완전히 이해하여 그 이미지로부터 공통의 성질들을 추상화·형식화함. 수학적 정의가 완성되어 정신적 대상물의 모임을 구성함.
⑥관찰	형식적인 사고 구조에 반영하고 조정할 수 있음. 사고과정을 관찰, 구성, 체계화하여 사고의 결과를 인식함.
⑦구조화	형식적 정보가 내적으로 서로 어떻게 관련되는지를 충분히 인지하며 정보를 확인하고 검증하려고 함.
⑧창조	개념에 대한 선입견에서 벗어나 완전히 새로운 개념을 개발(창조)할 수 있으며 구조적 이해를 완성함.

다이어그램



지식은 인식하는 주체가 경험을 통해 능동적으로 구성하는 것이지, 결코 객관적 실재를 발견하는 것이 아니

라는 구성주의자 von Glasersfeld의 영향을 받아, Pirie와 Kieren(1989, 1990)은 수학적 이해의 발전 과정을 설명하는 P-K-모델을 만들었다([표 3]). 이 모델에 따르면 이해는 비선형의 8단계 과정을 반복적으로 움직이면서 구성된다. 각 단계는 다음 단계의 내부에 포함되는데, 한 단계는 그것 내부에 있는 형태와 과정에 의존하며 더욱이 그 내부에 없는 것에 의해 제한된다. 그러므로 첫 단계인 초기지식은 선 경험에 해당하여 개인의 이해 정도에 큰 영향을 미치게 된다는 구성주의 입장을 취한다. 주요 특징은 폴드백(foldback)과 경계불필요(no boundary)에서 찾아볼 수 있다. 폴드백이란 부정확한 이해를 확인하기위해 현 단계의 내부 단계로 되돌아가서 현재 상황을 재구성한다는 것으로 8단계가 순차적으로 일어나지 않는다는 것을 의미한다. 또한 경계불필요란 어떤 단계들 사이에서 이해발전에 필요하지 않는 낮은 단계는 곧장 건너뛸 수 있다는 것으로 8단계가 모두 일어날 필요가 없다는 것이다.

2. 추상대수의 교수법 이론 연구

개념의 이해가 어느 정도 향상 되는지를 측정하는 것은 쉬운 일이 아니다. 또한 이해를 성장시킬 수 있는 교수법을 구상하는 것 역시 어려운 일인데, 이에 관련된 몇 가지 연구를 볼 수 있다. Burn(1998)은 군, 부분군, 동형, 잉여와 같은 추상적인 개념을 정확히 소개하기 전에 여러 종류의 활동지를 사용하여 개념을 직관적으로 느낄 수 있게 하는 교수법을 제안했다. 특히 Thrash 외(1991)는 군 동형사상의 지도방안으로 연산표의 적극적인 사용을 주장하면서, 가령 순환군을 다룰 때 집합 $\{0,1,2,3\}$의 연산표를 만든 후 그 표로부터 어떤 성질이나 규칙을 발견하도록 하면 학생들은 경험으로부터 $\mathbb{Z}_4$의 성질을 쉽게 유도할 수 있다고 했다. Edwards 외(1999)는 추상대수 개념의 역사적 발전과정을 고려하여 구체적인 예제를 다루는 활동을 통해 개념을 습득하게 해야 한다고 했다.

한편 추상대수 교육에 테크노로지를 도입하는 교수법 연구가 다수 있다. ISETL은 Levin(1990)이 기존의 SETL(Set Language)을 추상대수나 이산수학에 적합하도록 보완한 소프트웨어로서 읽고 쓰기 쉬우며 대부분의 명령어가 일반 수학 용어와 일치하는 장점으로 인해 Baxter 외(1988)나 Dubinsky 외(1993) 등이 이용하였다. 그들은 수학적 이해를 촉진하기위한 교수전략으로 학생들이 ISETL를 사용하여 수학 과정을 코드로 작성하는 경험으로부터 수학적 아이디어를 구성하도록 했다. 이와 유사한 교수법 연구를 보고한 Dubinsky(1995), Leron 외(1995a), Blanchard 외(2001), Charlwood(2002), Maycock(2002) 또한 Perry(2004) 등을 종합하면 어떠한 CAS를 사용하던지 강의 모형은 거의 유사하며 다음과 같은 많은 공통점이 있음을 볼 수 있다.

1) 활동지는 중요한 교수 도구인데, 새로운 내용을 소개하고 몇 가지 질문을 하고 학생들이 답을 하도록 남겨두며 가설을 쓰게 한다. 가설과 증명은 개념을 배우는 좋은 방법으로써 가설을 세우기 위해 지금 배우고 있는 개념의 이해가 필요하다.

2) 과제물을 신중히 결정한다. CAS를 사용하더라도 제한된 지식수준으로, 가령 준동형사상과 핵, 상을 찾는 일은 많은 시간이 소요되기 때문이다. 또한 컴퓨터 활동 전에, 적어도 한두 번은 지필로 예제를 풀게 하여 컴퓨터가 생성하는 답을 분석할 수 있게 한다.

3) ISETL과 같은 간단한 코딩도 힘들어 하는 학생들을 위해 지필시험에서 좋은 결과를 보이거나 컴퓨터에 익숙한 학생을 잘 섞어 실습그룹을 만든다. 실습을 잘 하는 그룹이 항상 학습 내용을 잘 이해하는 것은 아니므로, 학생들의 반성적 사고를 반드시 확인한다.

4) 개념과 경험 사이의 불균형적 모순은 오류와 오개념의 원인이 되는데, 소그룹 토론그룹은 이러한 어려움을 해결하는 좋은 방법이다. 교사에 의해 드러나는 모순보다 동료에 의해 나타나는 문제에 대해 더 깊은 사고로 비평하는데, 3~4명으로 소그룹으로 활동하여 그 결과를 글쓰기로 제출함으로써 의사소통능력도 기르게 한다(Dubinsky, 1994).

위의 연구들은 이러한 교수법이 학생들의 개념 이해에 미친 영향에 대해, 컴퓨터는 직관적 이해와 고등 수학적 형식화 사이의 간격을 연결하는 다리의 역할을 하여 학생들이 추상적 수학 내용을 창조적이고 독립적으로 탐구하는데 도움을 주며, 이해와 추론을 세우는데 효과가 있다고 했다. 더욱이 많은 예제들과 반례들로 훈련을 받기 때문에 수학적 증명을 해야 할 필요가 있는 일반 논제에도 쉽게 도달할 수 있게 되었다고 보고했다.

3. 교수 전략

학생의 이해를 높이기 위해 교사는 무엇을 할 수 있는가의 근본적인 물음에 대해, P-K모델을 개발한 Pirie와 Kieren(Pirie 외, 1990)조차 교사가 학생들에게 제공할 수 있는 이해는 없다는 구성주의적 입장을 취했다. 그러나 그들은 학생들이 추상대수의 개념을 이해하고 발전시키는 과정을 관찰한 결과를 바탕으로 이해의 성장을 도울 수 있는 교수 신념을 네 가지로 제시했다.

1) 교수역할 인식- 교수가 수학을 어떻게 하는지를 보여주기보다는 수학을 탐구하도록 격려한다. 알려주고 평가하는 대신 효과적인 대화를 통해 학생들 스스로 수학적 사고를 구성해 가는데 관심을 기울인다.

2) 이해과정의 인식- 교수의 설명은 학생들에게 그대로 전달될 수 없으며 학생은 서로 다른 수준에 속하는 고유의 경험을 바탕으로 이해를 형성해 감을 인식하여 다중 단계에서 강의를 제시한다.

3) 폴드백의 유도- 학생의 오개념을 수정해야 할 필요가 있다면 폴드백의 기회를 제공하여 낮은 단계의 이해를 재구성하여 완성하게 유도한다.

4) 사고 촉진의 질문- 개념을 전달하는 효과적인 방법은 없지만, 학생들이 이해를 구성할 수 있도록 반성적, 발전적 사고를 자극하고 유도하는 질문을 구사한다.

특히 사고를 촉진하는 질문의 기술은 구성주의 교사에게 중요한 교수기법으로서 본 연구의 실험에서 학생들을 면담하는 과정에서도 사용하였다. Pirie 외(1989)는 질문의 기술로써 앞으로(pro-vocative), 안으로(in-vocative), 확인(validating)이라는 세 종류를 언급했다. '앞으로'질문은 더 높은 이해의 단계로 향하도록 자극하는 반면, '안으로'는 발전을 위해 다시 낮은 단계로 폴드백을 유도하며, '확인'은 '왜'를 물어보아 학생 스스로 이해를 확신하도록 도와주는 질문 방법이다. 교사들의 효과적인 질문은 학생들이 수학적 개념을 구축하여 습득하는데 큰 영향을 미친다.

4. 학습모델에 따른 추상대수 분석틀

Dubinsky 외(1994)는 효과적인 수학 학습모델은 현상을 해석하고 예측할 수 있게 하며, 다양한 경우에 응용이 가능하여 서로 관련된 상황들을 체계적으로 설명할 수 있으며, 학습 아이디어를 교환하는 언어적의 역할을 담당할 수 있어야 한다고 했다. 그러한 점에서 APOS와 P-K-모델은 학생들이 개념을 이해하는 과정을 해석하고 예측할 수 있게 해주며 추상대수뿐만 아니라 다양한 분야에 적용할 수 있으며, 오개념의 발단을 파악하고 치료할 수 있는 언어적 역할까지 담당하는 효과적인 학습모델이다. 모델의 각 단계를 주의 깊게 관찰하여 오개념의 원인을 알아내고 학생들로 하여금 부족한 단계를 다시 밟아가도록 하면서 오개념을 치료하는 방법은 중요한 교수·학습법이 될 수 있다.

1) 학습모델의 비교

학생들의 이해를 향상시킬 수 있는 교수학적 자료를 개발하기위해 두 학습모델 APOS와 P-K를 비교해 보고자 한다.

APOS-모델은 4단계의 계급적 순서로써 한 단계의 개념은 다음 단계로 넘어가기 이전에 생성되어야 한다고 강조한다. 그러나 개념이 언제나 선형적인 계급대로 만들어지는 것은 아니며(Dubinsky 외, 1994), 실제로 한 단계가 부족할 때 오개념의 원인이 된다.

[표 4] APOS-모델로 군 이해의 어려움과 오개념 분석
[Table 4] Analysis for misconceptions of group concept based on APOS-model

<table>
<tr><th></th><th>오개념</th><th>오개념의 원인</th></tr>
<tr><td rowspan="3">군</td><td>집합으로 이해</td><td>원소의 개수로 군을 성질을 잘못 이해함.</td></tr>
<tr><td>연산을 가진 집합으로 이해</td><td>연산이 군을 결정하는 요소임은 알지만, 집합이 군에 대해 우선하며 연산은 부수적으로 오해함.</td></tr>
<tr><td>대상물로 이해</td><td>동형이 되기 위해 집합이나 연산의 형태와 상관없이 구조가 일치해야 함을 이해하지 못함.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">부분군</td><td>부분집합으로 이해</td><td>부분군이 되는지 아닌지의 판정을 부분집합이 되는지 아닌지로 잘못 판정함.</td></tr>
<tr><td>연산을 가진 집합으로 봄</td><td>부분군은 부분집합으로써 임의의 연산 아래 군이 되는 것으로 오해함.</td></tr>
<tr><td>연산은 군으로부터 귀납됨</td><td>부분군 연산은 군 연산을 부분집합으로 축소한 것으로 보지 않음.</td></tr>
</table>

가령 어떤 군의 부분군을 만들고 잉여를 구성하는 행동을 할 수 있더라도 다른 군이 주어졌을 때 일반화하는 과정에서 어려움을 겪는 것은 과정Ⓟ에서 내면화되어야 할 정신적 구조가 완성되지 않았기 때문이다.

Dubinsky 외(1994), Leron 외(1995a), Brown 외(1997)에 따르면([표 4]) 군과 부분군의 이해는 어느 정도 동시에 형성되는 경향이 있는데, 이 두 개념에 대한 초기 오해는 학생들이 가지고 있는 집합의 인식에서 비롯된다. 즉 대응하는 연산에는 거의 무관심한 반면 집합적 요소에만 집중하는데서 오개념이 발생하며, 이런 현상은 부분군의 개념을 이해할 때 더 큰 문제를 야기한다. 이는 부분군에서 연산을 고려하지 않기 때문에 부분집합과 부분군의 분별이 용이치 않기 때문이다. 가령 $\mathbb{Z}_6$에서 원소 두 개 또는 세 개를 갖는 부분군을 $\{0,1\}$과 $\{2,1,0\}$라고 잘못 생각하는 경향이 여기에 속한다. 이러한 오개념은 새로운 개념(group)을 이미 친숙한 개념(set)에 근거하여 만들기 때문이다.

한편 학습자가 어떤 이해의 단계에서 해결할 수 없는 문제에 봉착하게 될 때, P-K-모델에 따르면 현 이해 계급의 내부단계 어디로든지 되돌아가는 폴드백을 할 수 있다. 가령 ④특성인지 단계에서 군 동형에 의해 보존되는 성질을 파악하는데 어려움이 있으면, 그 내부단계인 ③ 혹은 ②단계로 되돌아가 이해를 재구성하게 되는 것이다. 이는 외형적으로는 APOS-모델과의 차이점으로 보이지만, Leron 외(1995a)가 APOS-모델을 적용하여 실험을 했을 때 어떤 단계에서의 이해(가령 군 개념)는 그보다 한 차원 높은 단계(군 동형개념)에서 재구성될 수 있다는 것과 어느 정도 일치하는 것으로 볼 수 있다.

[표 5] APOS-모델과 P-K-모델의 비교
[Table 5] APOS-model vs. P-K-model

APOS -모델	공통점 구성주의 이론에 기초한 학습모델	P-K -모델
		①
Ⓐ	신체의 반복된 행위	②
Ⓟ	정신적 행동, 정신적 내면화	③, ④
Ⓞ	정신적 대상물 구성. 관찰, 체계화	⑤, ⑥
Ⓢ	관련성 발견, 새로운 개념의 창조	⑦, ⑧

또한 APOS-모델의 4단계가 통상 선형적으로 발전한다는 이론과는 달리 P-K의 8단계가 모두 일어날 필요가 없다는 경계불필요성은 두 모델의 차이점으로 보인다. 그러나 Pirie 외(1989)는 군과 군동형 개념에 관한 학생들의 이해를 광범위하게 연구한 결과, 학생들은 순서적인 단계로 사고를 할 뿐만 아니라 어떤 단계도 놓치지 않고 각 단계를 움직이며 사고한다고 했다. 두 모델은 여러 공통점을 갖고 있으며 P-K의 8단계는 APOS의 4단계를 세분화한 것으로 볼 수 있다([표 5]).

2) 모델을 적용한 분석틀

유리수는 정수들의 적당한 잉여류로 생각할 수 있으므로 학생들이 잉여군의 개념을 형성해 나가는 단계를 APOS-모델로 분석하여 본 연구의 분석틀로 활용하고자 했다.

행동Ⓐ: 군 $\mathbb{Z}_{20}$에 4를 계속 더하여 $\mathbb{Z}_{20}$의 부분군 $H=\{0,4,8,12,16\}$을 만들고, H에 대한 3의 잉여 $3+H=\{3,7,11,15,19\}$를 쓸 수 있는 단계이다. 여러 부분군 H와 잉여 $a+H$를 만드는 행동을 몇 차례 반복하면서 $\mathbb{Z}_{20}$의 잉여들을 자연스럽게 인지할 수 있다.

과정Ⓟ: $\mathbb{Z}_{20}$에서 했던 과정을 임의의 $\mathbb{Z}_n$에 대하여도 추상적으로 사고할 수 있는 단계이다.

대상Ⓞ: 부분군의 잉여들의 개수를 생각하고, 두 개 이상의 잉여에서 원소 개수를 상상해서 비교할 수 있으며 잉여들의 집합에 연산을 정의할 수 있게 될 때, 잉여가 하나의 대상으로 개념화 되는 단계이다.

쉐마Ⓢ: 잉여들의 집합에 연산을 적용한 새로운 군의 개념이 완성되는 단계이다.

이와 유사하게 P-K-모델을 사용하여 군 개념이나 군 동형에 관한 이해발달 단계의 분석틀을 만들 수 있다.

①초기지식: 군이나 군 동형의 개념을 갖기 위해 집합과 집합 위의 연산 개념을, 또한 함수 개념을 이미 습득하고 있는 상태로 가정한다.

②이미지구성: 결합법칙, 항등원, 역원의 존재성 같은 공리를 확인할 수 있다. 또한 군의 동형성을 보일 수 있으나, 공식이나 기계적 설명에 의존하는 수준이다.

③이미지소유: 다양한 상황에서 군이 되는 것과 아닌 것을 분별할 수 있다. 또한 기계적 행위가 정신적 행위로 바뀌는 단계로서 동형군의 예를 설명할 수 있다.

④특성인지: 소거법, 항등원과 역원의 유일성, 원소의 위수의 존재성을 논의할 수 있다. 또한 동형에 의해 보존되는 성질-교환법칙, 항등원과 역원, 순환성, 군과 원소의 위수 등을 논의 할 수 있다.

⑤형식화: 군의 특정 표현에 의존하지 않고 군에 관련된 형식적 개념을 개발한다. 동형에 관한 형식적 정의를

활용하여 두 군이 동형인지 아닌지 판단할 수 있다.

⑥관찰: 군 개념을 다른 개념- 가령 순환부분군, 정규부분군-에 연결 짓는다. 군들의 모임에서 동형관계를 형성하는 성질을 인식할 수 있다.

⑦구조화: 외형상 다른 군을 구성하여 공통점을 발견함으로써 군들이 동형관계인지 아닌지 판정할 수 있다.

⑧창조: 동형을 환이나 벡터공간의 개념으로 확장한다. 한편 현재의 지식을 다음 단계의 대수적 구조를 학습할 때 초기지식으로 사용할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

어떤 개념에 대한 질문을 학생들에게 던지고 학습 모델에 근거하여 그들의 대답과 성취가 어느 단계에 속하는지를 분석하는 실험을 하였다. 이러한 실험은 학생들의 마음속에 어떻게 개념이 형성되는지를 교수가 이해하는데 도움이 되므로 교수법을 개선하는 지침으로 사용될 수 있다.

1. 연구 대상

본 연구에서는 중부권에 소재한 중위권 대학의 수학과 3학년 학생 3명을 대상으로 면담하였다. 학생 S1, S2, S3은 2011년 1학기에 추상대수 강의에서 군론을 배웠고 환의 기본 성질까지 배운 상태이며, 성적은 각각 B+, A-, A+로써 성적 등급별로 한 명씩을 택했다. 한편 학생들의 성격이 실험 결과에 미치는 영향을 최소화하기위해 모두 비교적 외향적 성격의 학생들로 선정했다. 면담은 1학기말시험을 끝낸 직후에 했기 때문에 학생들이 군과 환에 대해 잘 알고 있는 시기라고 할 수 있다. 한편 Ⅱ-3 교수전략에서 살펴본 세 가지 유형의 사고촉진 질문을 적절히 사용하고자 했다.

2. 연구 설계

면담에서는 정역 D로부터 분수체 F를 만드는 아이디어를 물어보았으며, 학생들의 답변을 APOS와 P-K-모델을 분석틀로 하여 추상대수의 개념 이해가 어떻게 형성되는지를 측정하였다. 질문의 주제는 수업 중에 다루지 않은 것으로써, 군과 잉여군의 기본성질만 잘 이해했다면 집합을 구성하고 집합에 연산을 정의 한 후 그것이 가환이며 나눗셈환이 되는지를 정의에 따라 확인할 수 있을 것이라고 생각했다. 더욱이 정역으로부터 분수체를 구성하는 것은 학교수학에서 정수$\mathbb{Z}$로부터 유리수$\mathbb{Q}$를 만드는 과정의 일반화이므로, 개념의 추론과 추상화 단계를 거치면 가능할 것으로 보았다([표 6]).

[표 6] 연구 방법 및 절차
[Table 6] Research design

참여학생	중위권 대학의 수학과 3학년 학생 S1 (B+), S2 (A-), S3 (A+) (괄호: 학점) 외향적인 학생들로써 연구자는 이들을 잘 알고 있음
시기	2011년 6월 22일~24일
진단문제	정수에서 유리수 만드는 과정을 바탕으로, 정역으로부터 분수체의 구성을 추상화할 수 있는가?

3. 자료 분석틀

분수체를 만드는 추상화의 단계를 APOS와 P-K-모델로 다음과 같은 분석틀을 구성하였다.

행동Ⓐ: 정역 D를 이미 잘 알고 있는 익숙한 상황으로 적용하는 단계이다. 가령 $(2,3)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$을 유리수 $2/3\in\mathbb{Q}$와 관련지어 생각할 수 있듯이, 임의의 원소 $a,b\in D$, $b\neq 0$로 만들어진 순서쌍 $(a,b)\in D\times D$와 $a/b\in F$의 일반적인 관계를 유추하는 것이다. 이 상태는 [표 3]에서 분류했듯이 P-K의 ①초기지식과 ②이미지구성 단계에 해당한다.

과정Ⓟ: 분수 $1/2=2/4$는 잘 알고 있더라도 동치류 $[a,b]$와 $[c,d]$가 같다는 개념을 구성하기는 쉽지 않은데, 이 때 분수와 동치류의 연산을 직접해보는 행동으로부터 Ⓟ를 형성할 수 있다. $D\times D$의 적절한 원소를 택하여 직접 동치류를 만들고 동치류들의 연산을 사고하는 내면화를 거쳐 Ⓟ를 완성할 수 있다. 한편 P-K의 ③이미지소유와 ④특성인지가 이 단계에 해당한다.

대상Ⓞ: 그러나 실제로 동치류의 개념을 확립하지 못한 채 집합을 형성하게 될 때 Ⓞ가 제대로 성립되기 어렵다. 동치류들의 집합에 관한 캡슐화가 진행되면 그것들이 어떻게 형성되었는지에 자세한 이해 없이도 유리수에서 했었던 덧셈과 곱셈 연산을 생각하게 되며, 그러한 형태로 연산을 일반화할 수 있는 Ⓞ단계에 이른다. P-K에서는 ⑤형식화와 ⑥관찰단계이다.

쉐마Ⓢ: 이제 동치류들의 집합과 연산을 사용하여 정역과 체의 구조를 만들게 될 때가 Ⓢ단계이다. 이것은

유리수 개념의 정립일 뿐만 아니라 개념을 추상화한 것이다. 최종적으로 분수체 성질을 증명하려면 대상의 개념을 정수와 유리수의 과정으로 다시금 반-캡슐화(de-encapsulation)할 필요가 있으며 그로써 증명의 세부 사항을 알아낼 수 있다. 이것이 확실하게 되면 분수체의 과정과 대상의 이해가 완성되었음을 시사한다. P-K모델의 ⑦구조화와 새로운 개념의 ⑧창조가 이에 해당한다.

이러한 분석을 바탕으로 학생면담에서 사용할 분석틀을 구성하였다([표 7]).

[표 7] 분수체 개념형성 단계의 분석틀
[Table 7] Framework for understanding of quotient field

단계	단계 도달 여부의 판단 기준
행동Ⓐ	유리수의 동치를 이해하고 연산을 할 수 있다.
과정Ⓟ	유리수로부터 한 단계 추상화하여 임의의 정역에서 동치류를 이해하고 그것들로 집합을 만들 수 있다.
대상Ⓞ	동치류의 집합에 유리수의 연산과 유사한 연산을 정의하여 집합과 연산을 동시에 생각할 수 있다.
쉐마Ⓢ	유리수 집합과 정수 집합의 관계로부터 유추하여 분수체의 성질을 추상화한 것으로 볼 수 있다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

본 연구는 정수로부터 유리수를 만드는 과정을 바탕으로 임의의 정역으로부터 분수체를 어떻게 추상화하는지에 대한 학생의 이해를 조사하기 위한 것으로써 정성적 연구를 진행했다. 학생 세 명을 각각 면담했는데 학생들의 수준 차이로 인해 모든 질문을 완성하는데 소요된 시간은 2시간에서 3시간 정도로 다소 차이가 났다.

물음(가) 정수와 유리수의 차이는 뭐니? 정수로부터 유리수를 만들 수 있니?

물음(나) 유리수 $2/3$과 $4/5$의 연산을 할 수 있니?

정수로부터 유리수를 구성하는 과정은 세 명 학생들이 잘 인지하고 있는 상태였다. 바로 이 단계가 P-K모델의 ①초기지식 단계에 해당하는 것으로 볼 수 있다. 또한 세 명 모두 분수의 동치를 옳게 이해하고 있었으며 연산하는 것에는 어려움이 없었다. 이는 행동Ⓐ단계가 잘 구성되어 있음을 알 수 있다. 그러나 바로 그 다음 단계인 과정Ⓟ에서부터 이해의 어려움을 드러냈다.

물음(다) 유리수 $2/3$를 $(2,3)$처럼 표시할 수 있을까?

S1: $(2,3)$는 평면 위의 점이고 유리수 $2/3$는 실직선 위의 점인데, 어떻게 같을 수 있나요?

S2: 표현을 그렇게 하는 것은 상관없어 보여요. 집합론에서도 유리수들을 그렇게 표현한 적이 있어요.

S3: 표현방법만 다를 뿐이라고 하면 예를 들어 $4/7$은 $(4,7)$로 생각할 수 있어요. 임의의 유리수를 a/b라고 하면 (a,b)로 쓸 수 있겠어요.

학생 S1은 $(2,3)$을 XY-평면 위의 한 점으로 나타냈고 유리수는 실직선 위에 점으로 표현했다. 가시적으로 표현한 것은 좋은 일이지만 대수적 추상화를 하기에는 많이 부족했다. 익숙한 기호 $2/3$를 다른 기호 $(2,3)$으로 바꿀 때 개념은 변하지 않은 채로 단지 기호만 바꿀 수 있다는 생각에 도달하기 어려웠다. 이는 P-K에서 이전에 생성된 ②이미지구성을 새롭게 하여 ③이미지소유 단계로 넘어가는데 어려움이 생긴 것이다. $(2,3)$이 한 점을 나타내는 기호라는 고정관념으로부터 벗어나기 힘들어 했다. 학생 S2와 S3은 집합론의 기초지식과 유리수의 다른 표현을 이해함으로써 과정개념의 추상화를 하는데 도움이 되었다. 이 학생들에게 유리수 $2/3$를 $(2,3)$로 표시하는 것을 언제 보았는지 보충 질문했다.

물음(다-1) 그래? 유리수 $2/3$를 $(2,3)$로 표시하는 것을 이전에 본 적이 있니?

S1, S2 : 네. 집합론에서 모든 유리수들을 순서쌍처럼 나타내어 직선위의 점들과 대응하도록 했어요.

이 학생들은 유리수집합이 가부번집합임을 증명하는 과정을 대략적으로 기억하고 있었다. 3학년 1학기를 마친 이 학생들은 바로 지난 학기에 배운 집합론의 내용을 기억하고 있었다. 이는 내용면에서 선수과목의 내용을 강의 초입부에 다루어야 하는 중요성을 보여주는 것으로서, P-K의 ①초기지식이나 ②이미지구성을 성공적으로 수행할 수 있는 환경이야말로 최종적인 ⑧추상화단계에 도달하는 발판이 된다는 것과 상통한다. 예를 들어서 군 개념을 배우기 위해 집합과 함수의 이해는 중요하며, [표 4]에서 볼 수 있듯이 군 개념에 대한 오류는 집합과 군을 분별하지 못하는데서 비롯되므로, 군 이론을 시작

하는 강좌 도입부에서 집합과 함수에 대한 주제를 논의하는 것이 바람직함을 알 수 있다.

물음(라) 그러면 모든 유리수를 모은 집합을 써 볼래?

S2: 원래 유리수들의 집합은 $\{a/b\}$이니까 $\{(a,b)\}$로 쓸 수 있을 거예요.

S3: 유리수를 $a/b=(a,b)$로 했으니까, $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$이 유리수집합이 되요.

XY-평면으로 표현하고자 했던 학생 S1은 물음(라)에서도 평면을 그리며 대답을 하려고 했지만 더 이상 진전시키지 못했다. 이 연구를 계속 진행하기위해 S1에게는 $2/3$과 $(2,3)$의 기호를 세심하게 설명해 주었다. 자신이 사용한 a, b에 대한 설명을 처음에는 제대로 못했는데 연구자가 P-K-모델이 의미하는 폴드백 단계를 반복하면서 '안으로' 질문을 한 두 단계 더하자 S2와 거의 동일한 대답을 했다.

물음(마) 유리수의 분모에 대해 뭐 생각나는 것 없니?

S1, S2, S3: 아참. 분모는 0이 될 수 없으니까 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$로 써야 해요.

이 답은 세 명 다 분수를 잘 알고 있음을 시사한다.

물음(바) 그러면 이 집합이 모든 유리수들의 모임인 유리수 집합 $\mathbb{Q}$라고 말할 수 있을까?

S1,2,3: 아. 그래요. 바로 이것이 유리수 집합이에요.

학생들은 별 생각 없이 동의했지만, 이들은 행동Ⓐ로부터 과정Ⓟ 단계를 어느 정도 구성한 것으로 보였다.

물음(사) 유리수 $1/2$, $2/4$, $4/8$가 서로 같은 수인 것을 알고 있니?

S1, S2, S3: 네.

물음(사-1) 그러면 (a,b)와 (c,d)가 같은 것을 어떻게 설명할 수 있을까?

이 물음은 세 명 모두 대답 하지 못했다.

물음(사-2) 그러면 그것들이 어떤 모습인지 말해볼래. 예를 들어 설명할 수 있겠니?

S1: $1/2=2/4=3/6=4/8=\cdots$이니까 조금 전의 표현으로 말하면 $(1,2)=(2,4)=(3,6)=(4,8)=\cdots$예요. 그러면 한 직선 위의 점들이 되는데, 이 점들이 다 같다는 것이... 무슨 뜻이지요?

S2, S3: $2/4=3/6$인 것은 분모와 분자를 서로 바꿔 곱하면 $2 \cdot 6=3 \cdot 4$인 때문인데, 그러면 $(2,4)=(3,6)$ ... 아. 왼쪽의 첫 성분과 오른쪽의 둘째 성분의 곱셈이 왼쪽의 둘째 성분과 오른쪽의 첫 성분의 곱셈과 같아져요.

S3: 아하! 임의의 $(a,b)=(c,d)$는 $ad=bc$일 때 성립해요.

학생 S1은 대답 도중 XY-평면에 점으로 표현했는데, 처음에 만들어진 이미지구성을 끝내 바꾸지 못했으며, 더 이상 효과적인 면담이 진행되지 못했다. 한번 형성된 오개념을 치료하는 것이 어려웠다. 이러한 현상은, Ⅲ장에서 지적했듯이(Dubinsky 외, 1994; Leron 외, 1995a; Brown 외, 1997), 새로운 개념 또는 기호를 이미 친숙한 개념 또는 기호에 관계하여 만들려고 하기 때문이며, 오개념의 원인이 되었다. 학생 S3은 두 원소가 같음에 대한 추상화를 비교적 해 냈는데, 이로써 과정Ⓟ의 개념뿐만 아니라 대상Ⓞ도 발견되었다고 볼 수 있다.

분수체를 만들려면 $T=\{(a,b) \mid a,b \in D, b \neq 0\}$을 동치 관계로 잘라내어 잉여 집합 $T/\sim$를 다뤄야 하는데 학생들은 이 개념을 거의 이해하지 못했다. 앞서 Ⅲ-2에서 APOS-모델에 근거하여 구성한 잉여군 개념 이해의 분석틀에 비추어볼 때 이들은 행동Ⓐ 단계에도 이르지 못한 것으로 보인다. 이는 추상대수 수업에서 잉여군을 배우기는 했지만 잉여군의 예제로 다룬 것이 대부분 $\mathbb{Z}_n=\mathbb{Z}/\langle n \rangle$과 같은 군이었으며, 다른 형태의 군 $T/\sim$에 대해서는 세 학생 모두 전혀 이해하지 못했다. Ⅲ-1에서 언급했듯이 어떤 군에 대해 잘 할 수 있는 과정이 다른 군이 주어졌을 때 적용되지 못하는 것은 과정Ⓟ에서 내면화가 되지 못했기 때문이다. 그러나 본 실험의 목적이 정수로부터 유리수를 구성하는 과정을 유추하여 임의의 정역에서 체를 추상화하는 과정을 만들어 낼 수 있는지에 대한 이해정도를 알아보는 것이었기 때문에

$T/\sim$ 대신 T를 사용해도 큰 차이를 만들지 않는다고 판단하여 집합 T로 계속 면담을 진행했다.

물음(아) 자. 집합 $T=\{(a,b)\mid a,b\in D, b\neq 0\}$에 유리수에서 했었던 것과 유사하게 덧셈과 곱셈의 연산을 정의할 수 있을까?

S2. 잘 모르겠어요. 못할 것 같은데요.

학생 S1과 S2의 면담은 사실상 여기서 종료했다. 이들은 행동Ⓐ와 과정Ⓟ의 다음 단계인 대상Ⓞ에서 어려움을 겪었다. 유리수 a/b로 돌아오지 않고서는 원소 (a,b)를 다루지 못하는 것으로 보였다. P-K의 폴드백만 계속 할 뿐 다음 단계로 넘어서지 못한 것이다. S3과의 면담을 계속했다.

물음(자) 집합 T의 두 원소 (a,b)와 (c,d)의 연산을 생각할 수 있을까?

물음(자-1) (a,b)를 유리수 a/b로 생각하여 유리수들의 덧셈 $a/b+c/d$과 곱셈 $a/b\cdot c/d$을 하는 것처럼 (a,b)와 (c,d)를 연산할 수 있을까?

연속적으로 몇 번의 질문으로 유도했을 때, S3은 종이에 유리수 a/b의 덧셈+과 곱셈·을 두 번 이상 반복했다. 그 후에 a/b대신 (a,b)를 대입해보고 나서야 집합 T위에서 연산 +과 · 를 정의할 수 있었다. 이 과정에서 연구자는 Pirie 외(1989)가 분류한 세 가지 질문의 기술(Ⅲ-3) 중에서 폴드백을 유도하는 '안으로' 질문을 수차례 반복하였다.

S3. 아. 그래요. 집합 T의 원소 (a,b)를 분수 a/b로 생각하면 되는데 왜 그걸 잘 몰랐을까요.

이로써 과정Ⓟ가 대상Ⓞ로 완전히 캡슐화 되었다고 볼 수 있다. 마지막 쉐마Ⓢ를 보기위해 $(T,+,\cdot)$의 대수적 구조를 물어 보았는데 거의 진전을 보지 못했다. Selden 외(1987)가 대학교 수준의 수학 과정에서 학생들이 갖는 오류와 오해를 분류했을 때, 많은 오류들이 주제가 갖는 어려움에 의해서 비롯된 것만이 아니라 학생들의 빈약한 수학적 기초에 의한 것이라고 했다. 이는 실험조사에서도 그대로 드러나서 경험을 바탕으로 A, P, O의 단계를 구성하더라도 학생들의 빈약한 수학 기초로 인해 추상화를 위한 쉐마에 이르기는 쉽지 않았으며, 특히 집합론적 기초 지식이 부족할 때 발생했다.

Ⅴ. 결론 및 제언

추상대수의 개념은 피상적이며 무척 어렵다고 생각하는 학생들이 많이 있다. 이 연구에서는 면담을 통해 학생들이 추상화 개념을 형성해 나가는 단계를 관찰하고 그 과정에서 겪는 어려움의 원인을 분석하였다. 그것을 바탕으로 몇 가지 교수전략을 도출하고자 했다.

대상물에 대한 구조적 이해가 있어야만 응용력을 갖게 되고 결국 문제 해결 단계에 도달할 수 있다는 Dubinsky 외(1994)의 주장은 본 실험 연구에서도 그대로 드러났다. 어떤 군에 대해 알고 있는 성질도 군이 바뀌게 되면 적용하기 어려운 것으로 보였는데, 이것은 전체가 아닌 일부분만 피상적으로 알고 있다는 증거로 해석할 수 있다. 이러한 맥락에서 Dubinsky 외(1994)는 어려운 주제를 가르칠 때 작은 단계로 나누어 일직선식 학습으로 강의를 조직할 것이 아니라 전체 주제를 가지고 일을 할 수 있는 단계식으로 구성된 강의가 효과적이라고 했다. Brooks 외(1993)도 이와 유사한 제안을 했는데 주요개념을 중심으로 학습을 구성하되 내용을 낱개로 나누기보다는 큰 그림을 전체적으로 제시해야한다고 했다. 여기서 말하는 '큰 그림'은 APOS의 최종 단계인 쉐마로 이해할 수 있으며, 동시에 개념들이 서로 어떻게 관련되는지를 인지하는 P-K의 ⑦구조화를 추구하는 준비 단계로 볼 수 있다.

한편 수학은 인간이 활동을 통해 역사적으로 구성한 지식이므로(Freudenthal, 1973), 하나의 개념이 어떻게 발전되어왔는지를 고려하여 구체적인 예제를 다루게 하는 강좌를 설계해야 할 필요성도 부각되었다. 실험에 참여한 학생들은 (a,b)의 +과 · 연산을 정의하기 위해 유리수 a/b의 연산을 수차례 반복한 후 결국 기호 a/b 대신에 (a,b)를 대입해 보고나서야 (a,b)의 +과 · 연산을 정의할 수 있었다. 정의와 정리는 추측과 예제를 통해 생성되었으므로 학생들도 그러한 역사적 순서로 개념을 정립할 수 있는데(Edwards 외, 1999), APOS의 첫

단계인 행동Ⓐ이나, P-K의 ①초기지식과 ②이미지구성이 추측과 예제를 먼저 다루는 과정에 해당한다. 학생들이 예제를 통해 규칙을 관찰하게 하고(행동Ⓐ) 구체적인 행위를 수차례 반복하도록 유도하여(과정Ⓟ), 드러나는 성질의 패턴을 토론하는 그룹 활동을 통해 군의 개념을 추상화(대상Ⓞ)할 수 있도록 한다. 그러한 상황에서 추상대수의 지식을 만들어가는 능력(쉐마Ⓢ)을 갖게 되며, 한편 P-K의 ⑥관찰에 도달하는 길이 된다. 그러나 순서적으로 발전해야 하는 APOS의 4단계 이해가 선형적으로 진행되지 못할 때 오개념이 발생하므로, 학생들 고유의 이해단계를 설명하는 학습모델에 근거하여 필요할 때마다 폴드백 과정을 밟도록 유도하는 교수법이 요구된다.

또한 실험에서 보았듯이 APOS의 Ⓐ와 Ⓟ를 구성했다하더라도 대상물을 추상적으로 구성하는 Ⓞ와 Ⓢ로 진입하기 쉽지 않은 현상을, 추상대수학이 알고리즘으로부터 개념 이해로 방향 전환이 요구되는 과목이라는 Dubinsky 외(1994)의 분석에 근거하여 설명할 수 있다. 그러므로 추상대수를 전통적인 방법, 즉 교수가 개념을 소개하고 증명하고 문제 푸는 과정을 반복하며 학생들은 개념을 의미 있게 이해하기보다는 암기를 조장하는 방식으로 추상대수를 가르친다면 이해의 성장을 기대하기 어렵다. 더욱이 선형대수와는 달리 추상대수에서는 손쉽게 다룰 수 있는 예제가 부족하기 때문에 학습의 어려움이 가중되는데 이러한 어려움을 해결하는 한 가지 방법으로 CAS를 도입한 학생 활동기반의 강좌를 고려할 수 있다. 구성주의적 요소를 도입하여 교수의 일방적인 강연식 강의가 아니라 컴퓨터를 사용한 소그룹활동의 강좌는 학생들의 개념 이해의 인지능력을 높이는 이점을 가질 수 있다. 앞서 문헌연구(Dubinsky, 1995; Leron 외, 1995a; Blanchard 외, 2001; Charlwood, 2002; Maycock, 2002; Perry, 2004)에서 살펴본 것처럼 CAS를 도입한 추상대수 강좌가 외국에서는 활발히 진행되고 있다. 여기서 보고된 결과를 바탕으로, 강의와 CAS 실습으로 구성된 주 3~4시간의 추상대수 강좌를 편성하여, ISETL을 사용할 때는 Dubinsky 외(1993)를, 또는 GAP를 사용할 때는 Gallian(1994)을 교재로 활용할 수 있다.

이 논문에서는 추상대수를 어떻게 강의할 것인가의 방법을 주장하려는 것이 아니라, 다만 의도적으로라도 AOPS나 P-K와 같은 인식론적 학습 모델을 사용하여 교수가 질적 질문을 함으로써 학생들이 추상대수 개념의 이해를 구성해가는 단계를 관찰하고 그 과정에서 부딪치는 어려움의 원인을 파악하고 해결해 줄 수 있는 교수 방안을 논의하고자 했다. 학생들에게 수학적 과정, 대상, 관계를 전달하는 것만으로 의미 있는 학습을 유도하기에 충분하지 않다는 관점에서 CAS 활동을 통해 적절한 사고의 구조를 학생들 스스로 만들 수 있는 교수법의 활발한 연구가 요구된다.

참 고 문 헌

권오남 (2005). 탐구지향 미분방정식 교수-학습의 효과 분석, 수학교육 44(3), 375-396.

Kwon, O.N. (2005). Effects of inquiry-oriented differential equations instruction based on the realistic mathematics education, *The Mathematical Education 44*(3), 375-396.

박혜숙, 김서령, 김완순 (2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용-추상대수학에서의 Z_n의 경우, 수학교육 44(4), 547-563.

Park, H.S., Kim, S.R., & Kim, W.S. (2005). On the applications of the genetic decomposition of mathematical concepts- in case of Z_n in abstract algebra, *The Mathematical Education 44*(4), 547-563.

최영한 (2004). 선형대수의 가르침에 고려하여야 할 사항에 관한 연구, 수학교육논문집 18(2), 93-108.

Choi, Y.H. (2004). Some aspect in teaching linear algebra, *Communications of Mathematical Education 18*(2), 93-108.

Asials, M., Brown, A., Kleiman, J., & Mathews, D. (1998). The development of students understanding of permutations and symmetries, *International J. of Computers for Mathematical Learning, 3*(1) 13-43.

Asials, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S., & Oktac, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups, *J. of Mathematical Behavior, 16*(3) 241-309.

Baxter, N., Dubinsky, E., & Levin, G. (1988). *Learning discrete mathematics with ISETL*, Springer, NY.

Blanchard, P., & Holdener, J. (2001). *Increasing accessibility of examples in abstract algebra using GAP*, AMS Meeting. New Orleans, LO.

Brooks, J.G. & Brooks, M.G. (1993). *In search of understanding: The case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA.

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups, *J. of Mathematical Behavior, 16*(3), 187-239.

Bruner, J. (1977). *The process of education*, Harvard Univ. Press, Cambridge, MA.

Burn, R. (1998). Participating in the learning of group theory, *PRIMUS, 8*(4) 305-316.

Charlwood, K. (2002). Some uses of Maple in the teaching of modern algebra. In E. Hibbard et.al. (Eds.), *Innovations in teaching abstract algebra* MAA, 91-96.

Dubinsky, E. (1995). ISETL: A program language for learning mathematics, *Communications in Pure and Applied Math. 48*, 1-25.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory, *Educational Studies in Math. 27*, 267-305.

Dubinsky, E., & Leron, U. (1993). *Learning abstract algebra with ISETL*, Springer, NY.

Edwards, T., & Brenton, L. (1999). An attempt to foster students' construction of knowledge during a semester course in abstract algebra, *The College Math. J. 30*(2), 120-128.

Findell, B. (2001). *Learning and understanding in abstract algebra*, Ph.D. Thesis, U. New Hampshire.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht, D. Reidel.

Gallian, J. (1994). *Contemporary abstract algebra*, Heath and Company, Lexington, MA.

Katz, V. (2007). *MAA report: Algebra-Gateway to a technological future*, U. District of Columbia, MAA.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, 390-414. Macmillan Publishing Company, NY.

Leron, U., & Dubinsky, E. (1995a). An abstract story, *Amer. Math. Monthly 102*(3), 227-242.

Leron, U., Hazzan, O., & Zaskis, R. (1995b). Learning group isomorphism. *Educational Studies in Math. 29*(2), 153-174.

Levin, G. (1990). Introduction to computer science: an interactive approach using ISETL. *ACM SIGCSE Bulletin, 22*(1), 31-33.

Maycock, E. (2002). Laboratory experiences in group theory: A discovery approach. In Ed. Hibbard, et. al.(Eds.), *Innovations in teaching abstract algebra,* MAA. 41-43.

Perry, A. (2004). A discovery oriented technology enhanced abstract algebra course, *Education, 124*(4), 694.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Columbia Univ. Press. NY.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Math. 9*(3), 7-11.

Pirie, S., & Kieren, T. (1990). A recursive theory for mathematical understanding: some elements and implications, *Annual meeting of Amer. Edu.* Research Association, Boston.

Scher, D., & Findell, B. (1996). *Research in undergraduate mathematics education: A map of the territory*, Education Development Center, INC. http://blue.butler.edu/~phenders/STUFF/Mathematical%20thinking/

Selden, A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving, *Proc. of the 2nd International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III*, Cornell U. 457-470.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Math, 12*(2), 151-169.

Thrash, K., & Walls, G. (1991). A classroom note on understanding the concept of group isomorphism, *Math. and Computer Edu. 25*(1), 53-55.

Zazkis, R., Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: A study of students understanding of the group D_4. *J. for Research in Math. Edu. 27*(4), 435-457.

A case study for student's understanding -abstraction process to quotient fields

Choi Eun Mi
Department of Mathematics, Hannam University, Daejeon, Korea
emc@hnu.kr

Research in undergraduate mathematics education has been active very recently. The purpose of the paper is to investigate how college students make abstraction from some known informations about integer and rational numbers in abstract algebra. Three college students were involved in the study. We analyze student's personal answers in order to find where their misunderstandings and difficulties come from based on the theoretical frameworks on mathematical understanding such as APOS-model and P-K-model. Finally we discuss about constructivist teaching ways for abstract algebra and propose new paradigm for teaching undergraduate mathematics.

* ZDM classification : D35
* 2000 Mathematics Classification : 97D30
* key words : Understanding, College mathematics education, Abstract Algebra