韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2013. 02. 제 52권, 제 1호, 19-41.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
February. 2013, Vol. 52, No. 1, 19-41.

수학적 사고에 동원되는 두뇌 영역들과 이의 교육학적 의미

김연미(홍익대학교)

Ⅰ. 서론

일찍이 프랑스의 수학자 Hadamard(1990)는 "수학분야에서의 발명의 심리학"에서 다음과 같은 생각을 표현하였다. "수학자들이 뇌의 생리학에 대하여 충분히 알고, 또 신경생리학자들이 수학적 발견에 대하여 충분히 알게 되어서 효율적인 협동이 가능한 그런 날이 과연 올 수 있을까?" 수학자나 심리학자가 아니더라도 누구나 한 번 쯤은 Einstein이나 Newton과 같은 천재들의 두뇌는 일반인들의 그것과 어떻게 다를까 궁금해 본 적이 있을 것이다. 또 수학과 같은 고등 정신활동을 수행할 때 개인의 머릿속에서 어떤 일들이 벌어지는 지에 대하여도 호기심을 느꼈을 것이다. 파스퇴르 연구소 소장인 Changeux(2002)는 뇌에서 수학이 어떻게 나타나는 지를 밝히는 것이 신경과학의 큰 목표라고 언급하였다. 추상화, 유추, 논리적 사고를 특성으로 하는 수학의 이런 측면들은 감각이나 지각을 넘어선 고등 정신 기능이므로 신경학 분야에서 관심을 갖는 것은 당연하다고 볼 수 있다. 전통적으로 수리철학의 사조 중에는 수학의 본질을 언어로 간주하고, 형식적인 기호체계와 논리를 중시하는 입장이 있다. 반면 Einstein, Hadamard 등과 같이 수학적 사고에서 시공간적인 추론의 역할을 강조하는 수학자, 물리학자들도 있는데, 그들은 자신들의 사고과정을 성찰한 결과 언어와는 독립적인 시공간적 표상 능력의 중요성을 강조하였다. 과연 어떤 주장이 더 설득력이 있고 수학 능력에 보다 중요한 것은 어떤 능력일까? 현재까지는 심리과정이나 뇌에서의 정보처리과정을 과학적으로 보일 수 없었기 때문에 학습심리학에서 수행된 연구들이 과학으로 인정받지 못하였다. 그렇다면 우리는 이러한 주장들을 어떻게 과학적이고 객관적으로 입증할 수 있을까? 수학 학습에 영향을 주는 기초 인지 기능과 고등 사고의 토대인 추론, 개념형성 등에 대한 상세한 신경학적 이해는 정보처리와 인지과정에 대한 이해를 넘어서 수학적 재능이나 개인 차이, 남녀 간의 차이, 훈련의 효과에 대한 이해를 높일 것이고 다양한 학습법의 비교에도 도움을 줄 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

지난 20여 년간 인지 신경학이나 신경 심리학 분야는 뇌 영상 기술의 발달에 힘입어 괄목할 만한 업적을 이루었다. 그 결과로 위에서 언급한 한편의 학자들, 즉 신경 생리학자들은 뇌에서 행해지는 수 처리나 기초적인 수학적 사고에 대하여 타 분야와 공유할만한 지식을 축적하게 되었다. 이러한 지식들은 사칙 연산을 담당하는 회로들이 동일한 신경회로를 기반으로 하는지 혹은 각각 독립적인 회로에 기반 하는가를 규명하려는 시도부터 수학학습장애나 부진의 원인을 신경학적으로 규명하는 것에 이르기까지 매우 광범위하다. 그렇다면 수학교육학 분야에서도 그동안의 신경학 분야에서의 발전성과를 이해하고 나아가 그러한 성과들이 수학 교육에 어떤 도움이 될 수 있는지 점검할 필요가 있다는 것이 연구자의 소견이다. 수학적 활동과 사고과정을 중개하는 신경 시스템을 규명하는 작업은 과학적이고 교육학적인 중요성을 인정받았고, 뇌 기반 교육, 신경교육(neuroeducation), 그리고 수학 인지 등과 같은 새로운 연구 분야들이 탄생하였다. 현재까지 수행된 학습심리학 분야의 연구들이 단지 이론으로 남아야했던 배경에는 심리 과정 혹은 정보처리 과정을 객관적으로 보여줄

* 접수일(2012년 08월 08일), 수정일(2012년 09월 27일), 게재확정일(2013년 1월 22일)
* ZDM분류: C30
* MSC2000분류: 97C50
* 주제어: 수 인지, 개념적/절차적 지식, 작업 기억, 심상, 시공간잡기장, 뇌 기반 교육, 실행기능, 뇌 가소성
* 본 연구는 2012년도 홍익대학교 학술 연구 조성비의 지원에 의하여 수행되었음.

수 없었던 것이 주된 원인일 것이다. 그러나 수학학습 심리학에 신경심리학적 연구 방법이 더해짐으로써 수학 교육은 학습과학으로의 입지를 다질 수 있을 것이다(황우형, 2003). 최근 미국의 한 대학에서는 고등 수학적 문제해결에서 초인지의 역할을 뇌 영상 촬영을 통하여 확인하는 주제로 수학 교육학 박사학위가 청구되었는데(Schroeder, 2011) 이것도 새로운 패러다임의 변화가 반영된 것으로 보인다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방향

위의 사실들을 바탕으로 본고에서는 다음을 연구의 방향으로 선택하였다. 먼저 가장 기본이 되는 수 처리 과정과, 수학적 사고의 기원에 대한 신경심리학적 관점들을 살펴본 다음에 사칙 연산을 포함한 대수적 활동, 문장제 및 함수 이해와 관련되어 활성화되는 뇌 영역을 확인해 본다. 이를 통하여 기초적인 수학적 사고 단계에서 학습 수준이 점차로 올라가면서 고차적 사고를 할 때 활성화 되는 영역들이 어떻게 변화하는지 알아본다. 두 번째는 수학적 사고 능력과 일반적인 인지 능력과의 관계를 고찰하고자 한다. 수학적 성취는 지능과 상관관계가 높고 지능은 언어, 장기기억이나 작업 기억 용량, 공간 지각 등의 일반적인 인지 능력을 반영한다. 일반적인 인지 기능을 담당하는 것으로 알려진 전두엽은 특히 주의/집중, 부적절한 반응의 억제, 계획 수립과 초인지적 활동에서 중요한 역할을 하며 수학 영재들이 일반 집단에 비하여 발달된 영역이기도 하다. 전두엽의 여러 기능들을 살펴본다. 세 번째로 고차적 사고로 분류되는 추론이나 개념형성과 관련되어 활성화되는 뇌 영역을 살펴봄으로써 본고에서 던진 질문, 즉 수학적 사고의 본질이 언어인가? 혹은 시공간적 표상을 기본으로 하는가? 에 대한 해답을 모색할 것이다. 만일 두 가지 모두가 가능한 시나리오이고 개인의 차이나 혹은 남녀 간의 차이가 사고 과정 중에 반영될 수 있다면 이것의 수학 교육학적 시사점은 무엇인지 고민할 필요가 있다. 마지막 주제는 성장과 훈련에 따른 뇌의 변화이다. 수학에서 좋은 성적을 받기 위해 학생들은 수학학습에 많은 시간을 투자하고 참고서와 문제집을 풀어본다. 이러한 반복 경험이나 연습의 효과는 머릿속에서는 어떤 변화로 나타날 것인가? 문제풀이 속도가 빨라진다는 것은 어떤 의미인가? 성장이나 학습 혹은 반복적 경험에 따른 신경학적인 변화는 뇌가 스스로 구성하고 변화에 적응하는 특성이 있기 때문인데 그러한 사례들을 뇌가소성(brain plasticity)[1)]을 통해 살펴보고자 한다.

2. 연구 방법

먼저 수학 활동에 직접 관여하는 인지 기능인 장기기억, 작업 기억 용량, 공간 지각력, 추론 능력 등을 명확히 이해하고 그 기능들을 담당하는 뇌의 영역들을 파악하기 위하여 수학 활동과 다양한 인지 기능들과의 상관관계를 뇌 영상 촬영을 통하여 연구한 선행 문헌들을 분석한다. 그러한 연구들은 문제해결과정 중에서 계획 수립과 자기통제를 담당하는 것으로 알려진 전두엽의 역할과 수 감각, 시공간적 지각과 관련된 두정엽의 활성화를 주로 탐구하였다. 두 번째로 고차적 사고로 분류되는 추론이나 개념형성과 관련하여서는 사고과정 중에 활성화되는 뇌 영역 뿐 아니라 이들을 보는 학계의 상반된 입장을 살펴보고 통합 가능성을 살펴볼 것이다. 세 번째로 나이의 증가에 따른 성장과 반복적 경험/훈련에 따른 뇌의 변화를 이해하기 위하여 아동과 성인에게서 연산능력의 차이가 기능의 효율성에 의한 것인지 혹은 이를 담당하는 영역의 차이에 의한 것인지를 문헌분석을 통하여 확인하고자 한다. 그 외에도 기초 연산을 담당하는 뇌의 영역에서 연산의 훈련이나 대수 방정식의 연습에 따른 관련 두뇌 영역 즉 신경기반(neural basis)의 변화를 연구한 신경심리학적 연구 결과들을 분석 논의할 것이다. 이러한 질문에 대한 완벽한 답을 제시하기에는 아직은 객관적으로 축적된 지식과 연구자의 식견이 부족하지만 현재까지 알려진 정보를 토대로 관심 있는 관계자들의 통찰과 지혜가 모이면 그 답을 모색하는 중에 학생들이 '작은 수학자'처럼 사고하고, 수학을 어려워하는 많은 학생들을 도울 수 있는 길을 찾을 수 있을 것이라고 사료된다.

---

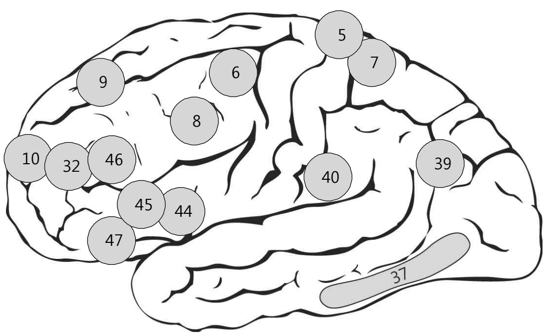
1) 학습, 경험, 기억, 뇌 손상 후의 회복 등에서 확인되는 것처럼 뉴런 사이에 새로운 시냅스 연결을 형성하거나 신경회로를 재조직 할 수 있는 능력으로 뇌가 일단 민감한 시기를 지나면 변화하지 않는 기관이라는 과거의 시각을 대체하게 되었다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 수 인지, 연산 및 대수

1) 수 처리와 수학적 사고의 기원

인간의 아기들은 영아기에 이미 작은 수의 집합(최대 넷까지)의 크기를 인식하고 변화를 감지한다고 한다(Wynn, 1992). 학습이 없는 동물들(침팬지, 비둘기, 사자 등)에게서도 발견되는 작은 집합의 농도를 본능적으로 이해하는 능력은 수 개념을 점차로 확장시키는 바탕이 된다. 인간은 유아기를 거치면서 수 단어를 배우고, 숫자를 읽게 되고, 초등학교 3학년쯤이면 심적 수직선(mental number line)을 머릿속에 형성한다. 이러한 수 처리는 뇌 속의 한 영역에서 처리되는 것이 아니며, 일반적으로 생각되듯 좌반구에서만 독점적으로 처리되는 것도 아니다. Dehaene(1997)은 100 – 7 -7 – 7- 7... 과 같은 반복 뺄셈을 할 때 뇌의 어떤 부분이 연관되었는지 확인하기 위하여 스스로 스캐너에 들어갔다. 활성화가 증가된 영역들은 수에 대한 상상과 관련 있는 좌우 측두엽의 방추이랑(fusiform gyrus), 시공간적 능력과 수의 크기를 처리하는 좌우 두정엽 피질(parietal cortex), 산술적 사실의 기억과 연관된 측두엽(temporal lobe), 그리고 주의/집중, 판단의 사령탑인 전두엽의 아래 이마 영역(inferior frontal area) 등을 포함하였다(그림1 참고). 뺄셈과 같은 비교적 단순한 연산도 신경회로들 간의 복잡한 연결을 필요로 하는 것을 알 수 있다.



[그림 1] 수학적 사고와 관련된 뇌 영역 및 설명
[fig. 1] Brain Areas related to mathematical thinking

일련의 번호는 Brodmann 영역[2)]을 나타낸다.

- 전 대상 이랑(Ba 32, anterior cingulate gyrus): 목표 설정에 따른 주의집중, 모니터 등의 작업 기억을 담당하며, 고등 사고와 문제 해결을 위해 필요하다.
- 중간 이마 이랑(Ba 46, middle frontal gyrus): 시공간적 작업 기억과 주의/집중을 담당한다.
- 두정 내 고랑(intraparietal sulcus): 두정엽의 위와 아래를 나누는 고랑으로 아래쪽에 각 이랑(Ba 40)과 모서리 위 이랑(Ba 39, supramarginal gyrus)이 위치한다. 수 감각 핵심 센터. 수의 이해, 수의 비교, 어림, 심적 수직선이 표상되는 곳이다.
- 두정엽 위 뒤쪽 소엽(Ba 5,7 posterior superior parietal lobule): 시공간적 작업 기억, 공간적 주의/집중, 물체의 심적 회전, 암산(심적 칠판으로 비유됨) 등과 관계있다.
- 좌 뇌의 각이랑(Ba 40,angular gyrus): 수의 언어적 처리와 관계있는 영역, 구구단이나 단순 산수적 사실의 인출에 관여한다. 측두엽의 음운적 고리와 두정엽이 교차하는 곳에 위치한다.
- 아래 이마 이랑(Ba 44, 45, inferior frontal gyrus): 음운적 작업 기억을 담당하고 브로카 언어영역(언어의 이해 및 발화)을 포함하고, 특히 문장제 문제와, 복잡한 문제에서 더욱 활성화 된다.
- 방추 이랑(Ba 37, fusiform gyrus): 측두엽의 한 부분으로 얼굴과 신체적 정보의 처리, 단어의 처리, 색의 처리와 같은 시각 자극의 최종적 인식 처리를 담당한다.

(1) 삼중부호화 모델과 수 처리의 두 가지 경로

수 인지(numerical cognition) 분야의 영향력 있는 Dehaene & Cohen(1997)의 삼중부호화 모델(Triple Code model)에 의하면 숫자는 (a) 인도-아라비아 숫자열(예 356)과 같은 시각적 부호(visual arabic code)로, (b) ‘삼백 오십 육’ 같은 구술적 단어의 형태로(verbal code), (c) 시-공간적으로 심적 수직선(mental number

2) 독일의 해부학자 Brodmann에 의해 1909년 뉴런의 조직 구성과 피질의 해부학적 형태에 따라 정의되고 숫자화 되었으며 후에 좀 더 정교화 되어 현재까지 널리 사용된다. 그렇지만 뇌의 기능적 성질을 반영한 것은 아니므로 숫자가 달라도 기능은 유사할 수 있다.

line)에 아날로그적으로 부호화될 수 있는데, 처음의 두 부호화는 의미와는 무관한 추상적 부호화이며, 마지막 아날로그적 부호화는 의미론적 부호화라 할 수 있다(10 보다 12가 큰 수라는 것을 알고 수직선 위에서 큰 수가 오른쪽에 위치한다는 것을 이해한다는 의미이다). Dehaene이 처음 제안하였을 때는 이는 일종의 가설이었지만 후에 수 처리와 관련된 많은 뇌 영상 촬영 등에서 성인에게서는 수가 기호로 또 동시에 시-공간적으로 처리되는 것을 확인할 수 있다(Terao, Koedinger, Sohn, Qin, Anderson, & Carter, 2004). 그런데 이들에 의하면 작은 수와 큰 수는 다른 방식으로 처리된다. 1, 2, 3, 등의 작은 수는 인간이 선천적으로 소유하는 수 감각을 이용하여 처리되고, 그 이상의 경우는 언어 발달과 교육을 통하여 발달한다(Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003). 실제로 작은 수의 크기를 직관적으로 알아차리는 본능적인 수 감각은 후두엽의 시각 영역을 기반으로 하고, 하나, 둘, 셋...으로 세는 작업은 전두피질의 발성을 담당하는 언어 영역과 시공간 능력과 관련된 좌측 두정엽에서 담당한다는 것이 알려졌다. 이런 이유로 인간의 수 처리 능력의 본질에 대하여는 완전한 합의가 이루어지지 않았다. Dehaene을 중심으로 하는 그룹에서는 언어를 기반으로 하는 한 축을 통하여 개념과 기호의 사용 및 정확한 계산이 행해지고, 시공간적 능력을 담당하는 두정엽에서 수 감각(수의 이해, 추정, 비교 등)을 담당한다는 것을 근거로 언어와 시공간적 능력을 수학적 사고의 본질로 규정한다. 이에 반하여 Simon(1999)은 언어 능력은 훨씬 나중에 발달하므로 수학적 능력의 근원으로 볼 수 없고, 수 처리 능력은 지각과 주의를 담당하는 일반적인 능력을 바탕으로 하여 대상을 인식하고 개별화하는 것에서 기원하며, 수 처리를 담당하는 특수한 영역이 존재한다기보다는 수 처리 역시 일반적인 시공간 처리를 위해 특화된 두뇌 영역에서 의존한다는 주장이다(Simon, 1999; van Nes & De Lange, 2007). Freudenthal 역시 대상들 사이의 유사성을 판단하는 능력(혹은 차이를 구별하는 능력)이 인지발달에서 수 감각보다 앞선다고 주장하였다(van Nes & De Lange, 2007에서 재인용). 이에 대하여Dehaene 등은 곱셈구구와 같은 기술은 언어 영역을 기초로 하므로 처음부터 수학을 위하여 특화된 회로가 아닌 언어 회로를 재활용한 것이지만 수 처리에 동원되는 모든 영역이 그런 것은 아니며, 수의 크기 비교/추정을 담당하는 두정엽 내 고랑(intraparietal sulcus)([그림 1])은 수의 표상을 위해 특화된, 생물학적으로 결정된 영역이라고 주장한다. 그들은 이에 대한 근거로 수와 연산에서 활성화되는 영역이 문화적 차이와 상관없이 재현 가능하다는 사실과 발달상의 수학학습장애(dyscalculia, 혹은 계산 장애)의 경우 두정엽 내 고랑의 문제(기능부진 또는 회백질[3]의 저밀도)에서 발생한다는 점 등을 근거로 꼽았다. 이러한 논의가 계속되는 이유는 학습이 일반적이고 구성적인 스키마에 의존하는지 혹은 영역 특정적인 구체적이고 세분화된 회로에 의존하는가를 이해하고 판단하는데 도움을 줄 것으로 기대하기 때문이다. 수학교육과 관련된 심리학자 중에서 Piaget는 전자를 지지하는 입장이다. 그는 언어습득과 수학적 능력은 인지발달이 선행된 후에 이루어지는 것으로 논리적 사고와 추리하는 능력에 따라서 언어와 수학적 능력이 발달한다고 주장하였다. 그러나 신경심리학계에서는 본능적인 수 감각은 일반적인 인지 발달 이전에도 이미 존재하고 언어 습득의 경우에는 오른손잡이라면 좌 뇌에 언어의 이해, 통사적 처리, 발성에만 특화된 신경회로가 존재한다고 받아들여진다.

(2) 사칙연산

오랫동안 학자들의 관심을 끈 것은 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 사칙 연산에서 연산 유형에 따라 독립적인 신경회로가 존재하는지, 혹은 모든 연산 유형에 공통적인 단일한 회로가 존재하는지, 혹은 공통의 회로를 공유하며 여기에 각 연산 고유의 신경회로가 결합된 것인지의 여부였다(Kong, Wang, Kong, Vangel, Chua, & Gollup, 2005). 계산 장애(acalculia) 환자들로부터 보고되는 데이터들은 이러한 장애가 특정 연산에 국한될 수 있음을 보여주는데 이는 각각의 연산에 고유한 신경회로가 존재함을 의미한다. 그러나 이것은 이들 연산이 서로로부

3) gray matter 라고 불리며 뇌, 척수를 이루는 물질로 뉴런 세포체의 수상돌기, 신경 교세포(glial cells)들로 구성된다. 모세혈관과 뉴런 체세포의 색이 회색, 밤색 계통이기 때문에 붙여진 이름이다. 이와는 대조적으로 백질(white matter)은 미엘린화 된 축색(axon)을 의미하는데(축색을 감싸는 피막) 미엘린의 색이 희기 때문에 붙여진 이름이다.

터 완전히 독립적이란 의미는 아니다. 모든 연산들은 공통의 회로를 공유 하는데, 그곳이 전두엽과 두정엽이다. 초등학교 때부터 배우는 연산의 순서는 대략 한 자리 덧셈, 뺄셈 -> 복잡한 덧셈과 뺄셈 -> 구구단 -> 단순한 나눗셈 -> 복잡한 곱셈, 나눗셈의 순서인데 기능적 자기공명영상 촬영도 계산이 복잡해질수록 위의 순서에 따라 더 많은 신경회로가 동원되는 것을 보여준다. 그런데 수의 계산에 동원되는 회로는 간단한 산술적 사실의 인출인 경우에는 손가락 세기와 관련 있는 전 운동 영역(premotor area, Ba 8,9)이 포함되지만, 계산이 복잡해질수록(36×24) 수의 시각적 심상을 유지하고 시공간적 정보(자릿수 정렬이나 중간결과 등)를 처리하는 영역(전두엽과 두정엽)의 활성화가 커진다는 것이 확인되었다(Zago, Pesenti, Mellet, Crivello, Mazoyer, & Tzourio- Mazoyer, 2001). 일반적으로 성인이나 초등학교 고학년 아동들은 뺄셈보다 곱셈구구를 쉽게 여기고 결과도 빠르게 구하고 실수할 확률도 낮다. 이것은 단순 곱셈은 많은 반복 학습에 의해 $2\times3=6$(이삼 육)과 같이 하나의 사실로서 기억 속에 저장되어서 언어적으로 부호화된 사실들을 자동인출(Ba 40)하면 되지만 뺄셈의 경우에는 수의 크기에 대하여 추론해야 하며 자릿수 정렬과 같은 시공간적 처리와 관련된 영역들(Ba 7, 39)이 동원되기 때문인데 이것이 자동인출보다 훨씬 느린 과정이기 때문이다.

이와 같이 성인과 아동 사이에 연산 속도에서 차이가 존재한다면 문화의 차이가 수 인식과 연산에 어떤 영향을 끼칠까 하는 질문이 떠오를 수 있다. 서양의 아동들이 5세 무렵까지 익숙해지는 수 단어는 한국이나 중국의 아동들과 비교하여 많은 차이가 있다고 알려져 있다. 매우 체계적인 한국과 중국의 수 단어(십이, 삼십사 등)에 비하여 영어권에서는 수 단어(twelve, thirty four)를 일일이 배워야 한다. 이러한 언어적 차이가 연산 능력에도 심각한 차이를 가져온다는 주장을 종종 듣는다. 문화의 차이나 학습법의 차이가 세기와 연산 방식에 어떤 영향을 주는지를 이해하는 것도 흥미로운 주제이다. Tang, Zhang, Chen, Feng, Ti, Shen, Reiman, & Liu(2006)는 각각 영어와 중국어가 모국어인 참가자들이 기호(ρ,σ)와 수를(6, 8)비교하고 더하는 과제에 대한 영상 실험을 하였다. 공통적으로 활성화된 후두엽과 두정엽 외에도 몇 가지 특이한 점들이 관찰되었다. 영어권 참가자들은 언어영역과 보완운동영역(Ba 6, supplemental motor area)[4]에서 큰 활성화를 보였지만 중국인들은 활성화된 영역들이 상대적으로 매우 적었다. 또 중국인들은 수(8)를 처리할 때와 기호(ρ)를 처리할 때의 영역들이 거의 일치하였지만 영어권 참가자들에서는 수를 처리할 때가 기호를 다룰 때보다 훨씬 넓은 영역들이 활성화되었고 중국인들에 비교하여도 뇌의 많은 부분들이 활성화되었다. 보다 넓은 영역들이 활성화된다는 것은 정보를 처리하고 결과를 인출하기 위해서 뇌가 더 많은 탐색을 하고 에너지를 소비한다는 의미이다. 위의 실험에 대한 본 연구자의 견해는 중국인들은 수를 기호로 즉시 처리하지만 영어권 참가자들은 수를 일단 묶음으로 음성화 한 다음에 기호화한다는 추측이다. 만일 한국의 아동들이 수 단어를 삼십 오, 육십 대신에 서른다섯, 예순셋으로만 배운다면 35 + 63 의 연산을 할 때 현재보다 훨씬 힘들게 학습할 것이고, 뇌영상 촬영을 해 본다면 영어권 아동들과 비슷한 특징 - 시공간적 처리보다는 언어적 처리가 우세할 것이라는 판단이다. 우리나라는 수 단어를 두 가지 방법으로 모두 가르치고 있다. 일상생활과 문화에서 삼십오와 서른다섯이 혼용되기 때문에 모두 능숙하게 다룰 필요가 있다. 대학생이 되어서도 51을 쉰 일로 읽는 학생들이 눈에 띄는 것은 국어와 수학 교과에서 함께 고민할 주제인 것 같다. 이와는 별개로 연구자들은 중국 아동들은 산술을 주판을 통하여 배우는 경우도 있기 때문에 수에 대한 시공간적 이해가 성인이 되어도 남아있다는 해석을 한다. Varma, McCallin, & Schwartz (2008) 등은 위의 결과에 대하여 질문을 던진다. Diene's 블록과 같은 교구를 사용하여 10진법을 배우는 아동들은 후에 성인이 되어 교구의 사용 없이 수에 대한 추론을 하게 되었을 때도 아동기에 사용한 전 운동 영역(premotor area)을 활성화시킬 것인가? 만일 그렇다면 그 결과로 지필 계산이나 실제로 조작하는 과제들에 어떤 긍정적인 혹은 부정적인 영향을 미칠 것인가? 등이다. 교구의 사용은 아동들에게 흥미를 유발시킨다는 점에서, 신체적 활동이 이해와 기억을 높여준다는 점에서, 그리고 심상을

4) 운동을 계획하고 실행에 옮기는데 역할을 하며 발성을 하기 위해서는 보완운동영역이 손상되지 않아야 한다.

구성하는 능력이 약한 아동들에게 시각화를 도와줌으로써 전조작기에서 구체적 조작기로 그리고 형식적 조작기로 이행하는 것을 도와준다는 주장을 하는 학자들도 있지만 한편에서는 교구가 나타내려고 하는 개념을 기호 또는 추상적인 개념으로 대응시키는 것은 별개이기 때문에 결과적으로 아동들이 이중 표상을 학습해야 하므로 교구의 사용이 그다지 효율적이지 못하다는 반론도 제기된다(Mc Neil & Jarvin, 2007). 이와 같이 전략의 차이나 문화의 차이가 가져오는 영향은 매우 흥미로운 질문이지만 교구의 사용과 관련된 신경기반의 변화는 아직은 시도되지 않은 과제로 수학교육과 신경학이 관심을 가질 수 있는 분야라고 생각된다.

2) 대수 방정식과 문장제

(1) 대수 방정식 풀이

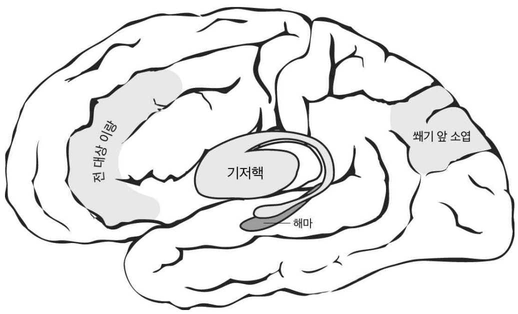
아동들이 대수 방정식 풀이를 학습할 때 뇌가 활성화 되는 패턴이 어떻게 바뀌는가를 조사한 실험이 있다(Qin, Carter, Silk, Stenger, Fissell, Goode, & Anderson, 2004; Anderson, 2005). 12-15세의 Pre-Algebra를 수강하는 10명의 학생들은 6일에 걸쳐 1차 방정식 풀이를 배우고 기술을 학습하였다. 방정식들은 난이도 혹은 문제 해결 절차에 따라 $1x+0=4$, $1x+8=12$, $7x+29=4$의 세 단계로 제시 되었다. 훈련을 마친 6일 째에는 문제 푸는 시간이 주목할 만큼 감소되었다. 이 기간 동안 세 유형의 대수 문제를 풀면서 그들의 뇌가 활성화 되는 패턴을 동일한 문제를 해결하는 대학생들의 그것과 비교 하였다. 자기공명영상 실험은 대수 방정식 풀이과정에 독립적인 여러 영역이 동원되는 것을 확인하였으며, Anderson 등은 문제 해결과 관련된 인지는 아래 [그림 3]에서 제시된 것처럼 독립적 모듈의 상호작용에 의하여 발생한다고 제안한다. 영상촬영의 결과를 살펴보면 다음과 같다. ① 청소년, 대학생 모두 뇌의 인지 영역 다섯 부분이 활성화 되는 것을 관찰하였다. 이들 영역은 주어진 방정식(예 $3x-5=7$)을 풀 때 $3x-5=7$의 부호화를 유지하는 시 지각 모듈(후두엽)을 비롯하여, 식이 바뀔 때마다 새로운 표상($3x=12$)을 나타내는 심상 모듈(왼쪽 두정엽 피질), 방정식을 풀기 위해 필요한 대수적 규칙과 산술 지식($5+7=12$)을 생각해내는 기억 인출 모듈(왼쪽 전두엽 피질), 문제 상황을 판단하고 목표를 유지하고 전략을 세우는 제어 모듈(전 대상 이랑, anterior cingulate gyrus), 절차적으로 병렬 알고리즘을 수행하는 단계(기저핵[5]의 꼬리기관, caudate), 그리고 연산결과($x=4$)를 손 운동으로 바꾸어 쓰게 하는 운동 제어 모듈(오른 손을 제어하는 왼쪽 운동 감각 피질) 등이 결합되어 있었다([그림 3]). ② 훈련의 효과로 활성화 되는 영역이 감소하였는데 대학생들의 경우는 왼쪽 전두엽에서만 연습 후에 활성도가 감소했지만 청소년들의 경우는 왼쪽 전두엽과 왼쪽 두정엽 모두 연습 후 활성화 되는 영역이 감소하였다. 연습과 훈련 후에 활성화되는 영역이 감소했다는 것은 반복 경험과 연습의 효과로 뉴런과 뉴런을 연결하는 시냅스에서의 정보처리 속도가 빨라졌고 한편으로는 상대적으로 적은 수의 뉴런만으로도 과제를 처리할 수 있게 되었음을 의미한다. 이것은 구체적인 과제를 담당하는 신경회로가 생성되었다는 뜻이므로 학습심리학이론 중에서 구성주의적 관점을 지지한다. 또 기억인출 과정을 여러 개의 경쟁하는 기억의 자취(후보)들 중에서 불필요한 정보는 억제하고 옳은 것을 선택하는 과정으로 해석한다면, 훈련과 반복 경험에 의해 정답으로 선택 되었던 기억의 자취가 강화되면서, 답을 얻는 과정이 점차 단축되고 따라서 속도가 빨라진다는 설명이다. 이것은 자극과 반응의 관계를 통한 행동주의적인 해석으로 이해되는데 결국 학습과정에는 구성적 측면과 행동주의적 측면이 모두 존재 한다고 보인다.

(2) 문장제

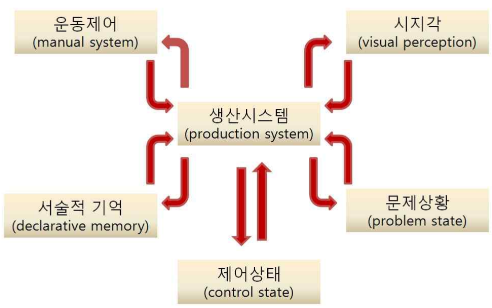
대수 문장제는 아동들이 어려워하는 영역이다. 문장제 문제해결은 문장의 이해가 선행된 후 주어진 조건들을 수식으로 표현하고 구조를 표상하는 과정을 포함하기 때문이다. 그러나 이것은 사고과정을 매우 단순하게 묘사한 것이고 실제로는 각 단계마다 복잡한 인지과정과 전략이 포함된다. 문장 이해를 위해서는 단어의 뜻을 정확히 파악하고 분석해야 하며, 문제에 맞는 그림

5) 기저핵은 선조체라고도 불리며 대뇌반구의 중심부위에 자리 잡은 큰 핵의 집단으로 부분적으로 시상을 둘러싸고 있다. 기저핵은 불수의적인 운동의 통제와 관련이 있다. 기저핵이 손상될 때 파킨슨 씨 병이 나타나고 아동들의 틱(tic) 장애도 기저핵의 기능과 관련이 있다. 그 외에도 습관이나 일상적 활동과 관련된 절차적 학습과도 관련이 있다.

이나 도표를 만들 때에도 올바른 개념적 모델을 먼저 찾아야 하고, 기호로 나타낼 양을 결정해야 한다. 또 어떤 연산이 필요한지도 결정해야 하는데 필요한 연산의 늘어날수록 문장제는 어렵게 다가온다. 그래서 교사들은 저학년 시기에는 기호의 사용보다는 그림이나 도형을 이용하여 문제 상황의 이해를 돕는다. 어느 정도 나이가 들면 보조적인 그림이나 도형이 필요 없지만 저학년 시기에는 전략의 차이가 문제해결에 영향을 끼치는 이유는 무엇일까? 이와 관련된 연구들을 살펴보자.



[그림 2] 대수 방정식 풀이와 관련된 뇌 영역들
[fig. 2] Brain areas related with algebraic equations



[그림 3] 문제해결과 관련된 인지구조
[fig. 3] Cognitive structure related to problem solving (Anderson, 2005)

Sohn, Goode, Koedinger, Stenger, Fissell, Carter(2004)는 동일한 대수문제를 두 가지 다른 형식으로 제시하였다. 첫 번째는 문장제(예: Brian은 시간 당 $7을 벌며 팁으로 $9을 받았다. 4시간 일했을 때 총 수입은 얼마인가?)였고, 두 번째는 기호와 식(예: 7H + 9 = E. E=30, H=?, H=시간, E=수입)으로 제시하고 성인들이 어떻게 해결하는가를 뇌 영상 촬영을 통하여 조사하였다. 그들은 두 가지 형식이 행동적으로는 차이가 없지만, 문장제의 경우는 전두엽 앞(Ba 9)쪽이 더욱 활성화되었고, 기호와 식으로 주어진 경우는 두정엽(Ba 7)의 활성화가 두드러졌다고 보고한다. 연구자들은 전두엽 앞쪽에서는 문장제의 언어적 표상, 필요한 연산의 탐색이 이루어지고, 두정엽에서는 시공간적 표상이 이루어졌다고 추측한다. 또한 두 형식의 차이가 행동적으로 차이가 없다는 것은 문제의 부호화 단계에서 동일하게 효율적인 서로 다른 전략을 선택할 수 있음을 보여준다고 판단한다.

Lee, Lim, Yeong, Ng, Venkatraman, & Chee(2007)은 싱가포르의 성인들을 대상으로 여러 유형의 문장제를 기호를 이용한 표현과 그림과 도형을 이용한 표현 두 가지를 제시하면서 뇌 영상 촬영으로 활성화되는 영역을 확인하였다. 그들은 기호를 사용한 경우나 도형(그림 모델)을 사용한 경우 모두 기본적인 수 처리 영역들이 활성화되는 것을 확인하였다. 그런데 기호를 사용하는 경우가 두정엽의 쐐기 앞 소엽(precuneus, Ba 7)([그림 2])을 더욱 활성화시키는 것을 확인하였다. 이 영역은 심상의 형성 및 조작 그리고 공간적 작업 기억과 관련된 과제에서 활성화된다. 그들은 이에 대한 해석으로 그림 모델을 사용할 때가 문제해결에 요구되는 주의집중의 양이 훨씬 적기 때문이라고 설명한다. 이렇게 함으로써 작업 기억의 용량이 남아있어서 다음 단계를 생각할 여지가 생기는 것이다. 본 연구자의 견해를 부연한다면 문제 상황이 그림모델을 통해 시각적으로 제시된 경우에는 구체적 이미지가 이미 존재하므로 문제 상황의 표상을 위한 작업이 최소화 되지만 추상적 개념을 다루는 경우에는 문제 상황을 표상해야 하므로 후자가 더욱 많은 작업 기억의 용량을 사용한다는 견해다. 위의 연구 결과들은 성인들에 해당하므로 아동들에게 동일하게 적용하는 것은 무리가 있다. 성인의 경우는 많은 수학적 경험을 통하여 특화된 신경회로가 구성되었을 가능성이 있기 때문이다. 그리고 성인들에게서 공간적 표상이나 작업 기억의 부담으로 두정엽의 활성화가 광범위하다면 아동들에게서는 더 큰 부담으로 작용할 것이다.

Prabhakaran, Rypma, & Gabrieli(2001)은 스탠포드 대학생들을 대상으로 문장제에서 전전두 피질과 측두엽에 위치한 언어영역의 역할을 확인하기 위하여 실제 계산은 요구하지 않고 문제해결에 필요한 연산만 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 중에서 판단하는 문장제를 제시하였다. 문제들에서 요구하는 연산들은 0회(답이 문장 안에 이미 제시된 경우), 1회, 2회로 다른 유형을 제시하였다(예. 건물을 보험에 들려고 한다. 건물의 가격은 $100,000이고, 건물 가격 $1000당 보험료는 $15이다. 총 보험료를 구하려면 어떤 연산이 필요한가?). 그들이 뇌 영상 촬영으로 확인한 것은 문장제에서 요구하는 연산의 횟수가 0회 → 1회 →2회로 증가하면 측두엽의 활성화는 이에 비례해서 증가했고 전전두피질의 경우는 연산 0회와 비교하여 1, 2회는 매우 급격한 변화를 보이지만 1회와 2회 사이에는 큰 차이가 없었다. 연구자들은 이것을 다음과 같이 해석한다. 측두엽의 언어 영역은 문장의 이해 단계에서 그 역할을 하고, 그 이후의 추론(필요한 연산을 결정하는)과정에는 전전두 피질이 가담한다는 의미이다. 이것은 언어와 인지를 동등하게 본 Vygotsky의 '언어적 사고'의 개념이나 인지가 언어에 선행한다고 생각한 Piaget의 개념과는 차이가 있으며 언어와 사고의 경계가 존재함을 보여준다. 그러므로 계산 기술에는 문제가 없으면서도 문장제를 어려워하는 경우라면 그 원인에는 두 가지 이상의 가능성이 존재한다. 첫 번째는 문장의 분석과 이해 단계에서 어려움을 겪을 가능성이고, 두 번째는 양들 사이의 관계를 적절하게 기호로 나타내고 구조를 표상하지 못하는 경우가 있으며, 문제 해결에 필요한 연산을 결정하지 못하는 경우 등이다.

3) 함수

함수는 많은 학생과 교사들에게 어려운 대상이다. 함수 개념의 역사적 변천과정(기하적 표현, 종속의 개념, 대응개념)이 교육과정에 지속적으로 영향을 주고 있으며, 함수의 다양한 표현(대수적 표현, 그래프, 순서쌍, 표 등) 및 함수 기호의 이중적 의미($f(x)$가 경우에 따라 함수의 이름으로, 또는 함수 값을 구하는 과정과 그 결과를 모두 나타낸다) 등이 혼란을 야기하는데, 이와 같은 이유 등으로 대학생이 되어서도 함수의 조작에는 능숙하지만 함수 개념은 불확실한 경우를 종종 목격한다. 중고등학교 수준에서 함수의 다양한 표상들을 능숙하게 다룰 수 있다면 이것은 후에 고등 수학적 사고에 요구되는 개념 형성이나 사고의 유연성의 기초가 될 것이다. Thomas, Wilson, Corballis, Lim & Yoon(2010)은 학부생들을 대상으로 함수(1차 함수, 2차 함수)를 그래프 또는 대수적 표현으로 제시하고 이들 사이의 변환(그래프에서 그래프로, 대수식에서 대수식으로, 그래프와 대수식 사이의 상호 변환) 과제에 대한 뇌 영상 촬영을 통하여 함수 이해와 관련된 뇌 영역을 확인 하였다. 연구진은 함수 표현이 그래프로 주어지거나 대수식으로 주어진 경우 모두 두정엽을 활성화시키는 것을 확인하였다. 활성화된 영역들은 위에서 살펴본 대수 방정식 풀이에서 확인한 영역들과 일치하였다. 또 참가자들이 다른 형식 사이의 변환과제(그래프↔ 대수식)를 해결할 때가 동일한 형식 사이의 과제보다 위의 영역들과 좌 뇌의 아래 이마 이랑이 더욱 광범위하게 활성화됐다. 연구자들은 이 영역들이 함수의 표현 형식을 변환할 때 언어적, 공간적 작업 기억, 혹은 수의 표상 작업을 반영한다는 해석을 하고 있다. Thomas와 동료들은 자신들의 연구결과가 수학교육에 의미하는 바를 다음과 같이 주장한다. 수와 산술계산에 동원되는 것과 동일한 영역들이 함수의 그래프, 대수적 표현과 이들 사이의 변환에도 가담한다는 발견은 고등사고의 특징 중 하나인 표현의 융통성이 기초적인 인지과정과는 별개의 신경기반을 갖는 것이 아니라 이를 기반으로 한 확장이라는 사실이다. 그러므로 수 감각과 공간 인지를 강조하는 교수법은 수에 숙달하는 것을 넘어서, 고등 수학적 개념의 획득을 위하여 필수적이라는 주장이다. 실제로 고등 미적분을 공부하는 대학생들의 뇌 영상을 촬영한 연구에서도 비슷한 결과를 보여준다. Krueger, Spampinato, Pardini, Pajevic, Wood, Weiss, Landgraf, & Grafman(2008)은 대학생들에게 적분 문제를 풀고 나서 제시된 답이 정답인지를 확인하라는 과제를 주었다. 그 결과 역시 적분 계산과 같은 고등 수학적 활동($\int_a^b \frac{dx}{x^2+a^2}$ 등의 적분)을 할 때도 양과 연산을 처리하는 기초 산수 영역들과 시공간적 작업 기억과 관계있는 영역, 전전두피질 영역(연산의 순차적 명령, 집행 기

능의 제어, 구술적 응답의 억제)이 활성화되는 것을 확인하였다. 고등 수학적 활동을 할 때 기초 산수 영역과는 다른 영역이 활성화 될 것을 기대했다면 이 사실은 의아스러울 수도 있으나 복잡한 사고도 결국은 단순한 규칙들과 사실들을 논리적으로 종합하는 과정을 포함한다는 사실에서 출발해야 할 것이다.

이상에서 살펴본 수학 활동과 관련된 뇌 영역들에서 확인한 것은 수학적 활동은 분산된 신경회로를 통하여 이루어진다는 것과 수 처리부터 함수에 이르기까지 수 감각과 공간 지각을 담당하는 영역들을 기초로 한다는 사실이다. 수학적 사고를 담당하는 단일한 신경회로가 존재하지 않는 이유에 대하여는 진화론적 설명이 제시된다. 즉 수학적 사고는 인류 역사상 늦게 발달하기 시작하였기 때문에 수학만을 위한 독립적인 영역이 자리잡지 못했으며, 그런 이유로 기존에 다른 기능을 담당하던 신경 회로들을 빌려서 전용하게 되었다는 설명이다.

2. 수학 활동과 관련된 인지 기능

1) 장기 기억

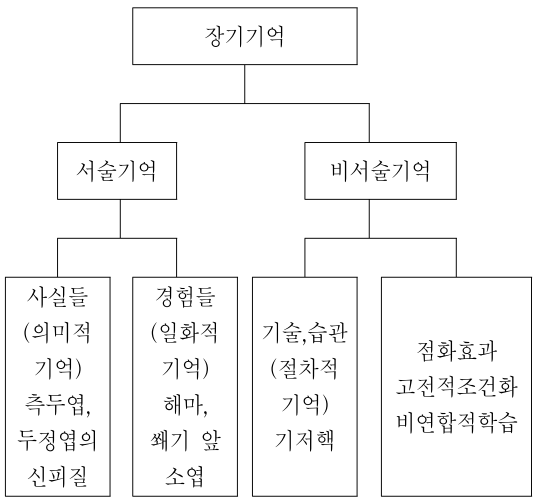
수학교육에서는 개념 이해와 구조적 지식형성을 매우 중시한다. 그렇지만 필요한 규칙이나 공식을 자동적으로 사용할 수 있으면 문제를 해결하는데 도움이 된다. 단순한 산술적 사실들과 알고리듬을 판단하기 위해 뇌 용량을 많이 사용한다면 문제풀이를 위한 아이디어나 창의적 사고를 할 여유가 남아있지 않기 때문이다. 그러므로 개념적 지식이나 절차적 지식, 그리고 단순한 사실들 모두 장기기억으로 공고해질 필요가 있다. 수학학습장애 아동의 경우에는 장기기억에서 인출의 어려움이 가장 큰 특징으로 지목되기도 한다(Geary & Hoard, 2005). 오랫동안 수학교육계와 인지 심리학에서는 위의 지식들 중 어느 쪽이 먼저 형성되는가를 놓고 토론을 했다(Rittle-Johnson & Alibali, 1999). Dubinsky(1991)는 학습에 대한 구성주의적 관점에서 Piaget의 반성적 추상화 개념을 확장하여 APOS 이론을 제안하였는데 이것은 수학 지식이 발달하는 과정이 위계적으로 다음의 순서 활동(action) → 과정(process) → 대상화(object) → 구조(schema) 의 순서를 따른다는 것이고 각 단계의 수료는 다음 단계로 진행하기 위하여 필수적이라고 주장한다. 이에 반하여 Tall(1998)은 ‘대상적 관점’을 소유하기 위하여 ‘action’이 선행되어야 한다는 사실에 의문을 보이며 Dubinsky의 이론은 고등수학이나 기하에 적용하기에는 무리가 있고 좀 더 유연한 이론이 필요함을 주장한다. 이에 따라 Tall은 ‘과정’과 ‘개념’이 통합된 ′procept′(process + concept) 개념을 도입하였다. 그런데 대학생들 중에도 어떤 주제에 대하여 개념은 이해하지만 절차적 과정에 대한 지식이 뒷받침되지 못하는 경우도 있고, 혹은 그 반대의 경우도 자주 목격한다. 그것은 한 분야에 대한 지식이 다른 쪽의 지식을 획득하기 위한 충분조건이 아니기 때문인데 그 이유는 개념적 지식과 절차적 지식, 그리고 산술적 사실들은 각각 뇌의 독립적인 영역에서 처리되고 저장되기 때문이다(Delazer, Domahs, Bartha Brenneis, Lochy Trieb & Benke, 2003; Anderson, 2005). 위에서 언급한 대학생들의 경우는 이들 사이의 통합이 원활하지 않기 때문으로 해석된다. 개념적 지식은 서술적 기억[6]중 의미기억(semantic memory)[7]으로 분류되며, 해마를 거쳐서 측두엽과 두정엽의 신피질에 저장된다([표 1]). 단순한 산술적 사실의 인출에는 각 이랑([그림 1] 참고)과, 언어 영역 등이 활성화된다. 반면 수학의 절차적 지식과 기술은 비서술적 기억(걷기 같은 무의식적 기억)으로 분류되고 일반적인 기술의 사용과 동일한 영역들과 동일한 곳에서 처리 된다(두정엽과 전두엽, 기저핵 등). 악기 연주하기, 자전거 타기 등과 같은 기술은 치매가 나타난 후에도 늦게까지 보존되는 경우가 있는데 이 기술들이 비서술적 기억을 담당하는 영역에서 처리되기 때문이다. 장기기억은 결국 뉴런과 뉴런 사이의 연결인 시냅스가 반복적인 강화에 의해서 공고해지는 과정이다. 절차적 지식과 개념적 지식이 동일한 곳에서 정보처리 되지 않고 분리되어 처리되고 저장된다는 사실과 이들을 담당하는 영역들 사이의 직접적 연결이 어린 시절에는 상대적으로 적기 때문에 절차적 지식의 학습이 개념 형성으로 직결되지 못하는 이유다. 인간의 뇌가 기억을 위해 이렇게 다양한 경로를 만든 이유는 무엇일까? 그것은 만일 한 영역에서 개념과 절차를 동

6) 사실(프랑스의 수도는 파리다)이나 지식(고래는 포유류이다)처럼 의식적으로 회상될 수 있는 기억들

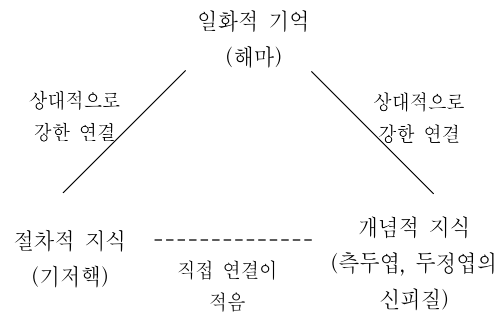
7) 뜻, 이해, 개념적 지식, 사실적 정보 등의 지식

시에 관장한다면 개념(혹은 절차적 지식)을 습득하는 신경회로를 통해 절차적 지식(혹은 개념)을 쉽게 습득할 수 있지만 동일한 이유로 그 영역이 손상을 입으면 개념과 절차적 지식 모두 잃게 된다. 만일의 경우에 대비하여 인간의 뇌가 우회 경로를 준비해둔 것으로 해석할 수 있다.

[표 1] 기억의 구분(Squire, 1994에 기초함)
[Table 1] Classification of Memory



그러므로 교사들로서는 개념형성을 돕기 위한 구체적인 방법을 생각하지 않을 수 없다. Davis, Hill & Smith(2000)은 기억에 기초한 수학 교수법 모형에서 몇 가지를 제안하였다. 그들 제안의 중점은 일화적 기억(episodic memory)을 활용하자는 것이다. 실제로 위의 표처럼 서술기억을 의미적 기억과 일화적 기억으로 나눈 것은 Tulving(1983)에 의한 것이다. 그러나 수학적 주제에 대한 개념 형성 과정을 숙고해 보면 둘 사이의 구분이 그다지 명확한 것은 아님을 알게 된다. 어떤 수학적 개념은 그 개념을 배우던 상황이 함께 떠오를 수 있고 개인적으로 의미 있는 경험일수록 기억에 잘 저장될 것이다. 그런 맥락에서 그들은 절차적 지식과 개념적 지식 사이에 일화적 지식을 징검다리로 사용하자는 제안을 한다. Davis와 동료들(2000)의 모형과 제안은 다음과 같다([그림 4]). ① 아동의 뇌에는 절차적 지식을 담당하는 영역으로부터 서술적 기억인 개념을 담당하는 영역을 연결하는 회로 연결이 상대적으로 부족하다. ② 그러나 일화적 기억을 담당하는 해마(hippocampus)[8]는 뇌의 전 영역과 직접적인 연결이 상대적으로 많다. ③ 교사가 절차적 지식의 기억으로부터 일화적 기억 형성에 도움을 줄 수 있다. ④ 교사가 일화적 기억으로부터 개념형성으로의 전이를 돕기 위해 해마와 신피질 사이에 존재하는 기존의 회로에 다양한 자극을 주자는 것이다.



[그림 4] 기억들 사이의 연결
[fig. 4] Connections between memory

그런데 일화적 기억 형성에서 중요한 것은 수업자의 관심의 초점이다. 개념과는 관계없는 불필요한 정보에만 집중한다면 의미 있는 기억 형성은 없을 것이다. 반면 학생들이 문제해결 과정을 토론하고 설명하고 발표하는 것들은 의미 있는 일화적 기억이 될 것이다. 절차적 지식은 비서술적 기억이라는 특성상 언어적 토론 형식으로 접근하게 되지 않으므로 학생들로 하여금 답을 얻는 과정에 대하여 말해보도록 기회를 줌으로써 그들이 수행한 절차가 일화적 기억이 되도록 도와주는 것이다. 실제로 해마는 뇌의 여러 곳 중에서 가장 가소성이 뛰어난 곳으로 알려져 있다. 지능이나 작업 기억과 관련된 전두엽은 가소성이 낮기 때문에 지능이 급격히 바뀌지 않고 전 생애에 걸쳐서 비교적 안정적인 이유이기

8) 측두엽에 위치하며 변연계의 일부로 정보를 단기기억으로부터 장기 기억으로 공고히 하는 것, 공간 내비게이션에서 중요한 역할을 한다([그림 2]).

도 하다. 그렇지만 해마가 일화적 기억과 학습에 관여하고 가소성도 뛰어나다는 사실은 매우 고무적이다. 그런데 기억이 소실되지 않게 오랫동안 저장하는 적절한 방법은 무엇일까? 물론 일정 간격으로 반복하고 되풀이 한다면 기억은 사라지지 않을 것이다. 그런데 더 나은 방법은 없을까? 워싱턴 대학의 연구진들은 몇 가지 비교 실험을 통하여 시험이 기억을 강화하는 우수한 방법임을 증명하였다(Chan, McDermott, & Roediger, 2006), 전통적으로 시험은 배운 것을 평가하기 위한 수단으로 사용되어 왔지 기억을 강화하는 방법으로는 여겨지지 않고 있다. 200여명의 대학생을 세 집단으로 나누었는데 시험을 치는 집단과, 그 시간 동안 학습 자료를 복습을 한 집단 그리고 아무 것도 안한 집단으로 나누었다. 그리고 24시간 후에 다른 시험을 쳤을 때 처음 시험을 친 집단(물론 성공적으로)이 두 번째 시험의 새로운 문제들에서도 스스로 복습을 한 집단이나 아무 것도 하지 않은 집단에 비하여 성적이 월등했다는 것이다. 이 연구의 결과는 무엇보다 시험 자체가 기억을 강화시키는 훌륭한 수단임을 보여준 것이다. 두 번째는 시험을 먼저 친 집단이 처음 시험에서는 측정하지 않았던 새로운 문제를 두 번째 시험에서 측정했을 때도 높은 성적을 보였다는 것은 어떤 한 개념을 기억에서 활성화시킴으로써 그와 관련된 다른 개념들이 동시에 활성화된다는 기억의 연합이론을 확인시켜주는 것으로 해석된다. 그런데 시험의 어떤 측면이 혼자서 복습을 하고 자료를 한두 번 더 공부한 집단보다 유리하게 작용했을까? 시험을 친 경우에 자료들이 더 오래 기억에 남는다는 사실은 많은 사람들이 공유하는 경험이다. 시험을 치루는 동안 고도의 정신집중을 하고 이 때 기억을 공고하게 만드는 것과 관련된 신경 물질이 더 분비되기 때문이라고 추측되는데 현재로서는 정확한 메커니즘은 확인되지 않았다. 연구자들의 가설은 시험 중에 나중에 인출을 하기 위해 필요한 기술을 일단 발휘했기 때문에 개념이나 절차적 기억의 인출 경로를 강화시켜주었다고 해석한다. 스스로 복습하는 과정도 자료를 다시 한 번 돌아보게 하지만 간단한 자유 연상 테스트와 같은 형식도 미래의 시험에서 요구하는 기술, 즉 인출 훈련의 기술을 습득하게 해 주었다는 것이다. 그러므로 지필고사가 아닌 토론과 발표도 시험의 형식을 약간만 택하더라도 인출 훈련으로 강한 일화적 기억을 형성해주고 뿐만 아니라 연관된 다른 개념을 떠오르게 하는 연합기억의 효과를 줄 것으로 기대된다.

2) 구체적 개념과 추상적 개념

수학은 추상적인 개념들을 다룬다. 그런데 많은 경우에 구체적 개념(강아지)은 추상적 개념(함수)보다 쉽게 인식되고 잘 기억된다. 추상화 과정은 구체적인 개념이나 관찰 가능한 현상으로부터 특정한 목적에 적합한 정보만을 추출해서 높은 단계의 개념을 형성하는 것이다. 그런데 추상적인 개념을 이해하는 것은 왜 더 어려울까? 자명해 보이는 이 질문을 인간의 머릿속에서 일어나는 사고과정으로 바꾸면 해석이 단순하지 않다. 첫 번째 설명은 구체적인 개념(당근, 강아지)들은 언어적이면서 동시에 시각적으로 이중 부호화를 통해 표현되지만 추상적인 개념(자유)의 경우는 언어적 부호화 과정만으로 표현되기 때문에 구체적 개념이 더 많은 뇌 영역을 활성화시킨다는 해석이 있다(Paivio, 1991). 즉 구체적 개념은 좌 뇌의 언어 영역과 우뇌의 이미지 처리센터를 활성화시키고(이중 부호화), 추상적 단어 처리는 주로 좌 뇌의 언어 영역만 활성화시키기 때문에 시각적 정보를 처리하는 우뇌의 활성화는 일어나지 않을 것이란 추측이었다. 또 다른 해석으로는 구체적 개념이 보다 많은 상황적 정보에 접근할 수 있기 때문에 쉽게 인식되고 기억할 수 있다는 설명도 있다(Schwanenflugel, 1991). 수학적 개념은 어떨까? 추상적 개념이라는 속성상 언어 영역이 주로 활성화 된다고 가정할 수 있을까? 수리철학의 한 사조에서는 수학을 기호언어로 간주하고 논리적으로 조직된 개념 체계라고 받아들인다. 그렇지만 한 가지 명확한 것은 수학적 용어, 대상 혹은 개념은 그 용어를 사용하는 사람의 수학적 수준에 따라 매우 다양한 표상을 만든다는 것이다. 이들은 시각적/공간적 정보일 수도 있고 혹은 언어적 정보일 수도 있다. 그러므로 추상적 개념이 언어적 부호화 과정만을 따른다는 것은 지나친 단순화이다. 대수 문장제의 경우도 기호의 사용이 심상의 조작과 관련 있는 두정엽 뒤 윗부분을 활성화시킨다는 사실을 앞에서 살펴보았다. Barsalou, Simmons, Barbey, & Wilson(1999)은 의미적 지식(semantic knowledge)은 감각 운동적 경험을 통하

여 획득되고, 그렇게 획득된 지식의 인출은 지식이 부호화 된 시점에 연루되었던 감각, 운동, 그리고 심리적 상태의 부분적인 재현을 포함한다고 주장한다. 어떤 개념이 활성화되기 위해서는 여러 회로들에 분산 저장된 그 개념의 부분집합들이 활성화되어야 하고, 그 개념에 대하여 알려진 것들을 재현하는 과정이 포함된다. Barsalou & Wiemer-Hastings(2005)는 구체적 개념과 추상적 개념의 표상에는 비슷한 점과 다른 점이 있다고 주장한다. 두 개념 모두 상황에 따른 내용에 의하여 표상된다는 공통점이 있지만, 상황 안에서의 초점의 내용은 다르다는 것이다. 구체적 경험의 경우 상황적 내용물은 개인적이며 공간적으로 둘러싼 대상물들에 대한 것인 경우가 많은 반면에, 추상적 개념은 단일한 초점의 대상이 결여되었기 때문에 추상적 의미의 표상이 보다 복잡하고 다른 형태의 콘텐츠에 의해서 분산되어 나타난다는 설명이다. 비록 수학이 전개되고 소통되는 형식은 기호 언어의 사용에 의존하고 논리적인 구조를 가지고 있지만 기호가 지시하는 개념은 사용하는 사람의 수학적 수준에 따라서 다른 심적 이미지를 연상시키며, 그것들을 정신적으로 조작하는 과정은 언어와 논리 이상의 것들이 포함된다.

3) 작업 기억

작업 기억이란 추론, 이해 등과 같은 과제를 해결하기 위하여 짧은 시간 동안 정보를 저장하면서 동시에 조작하고 처리하는 것으로 인지과학에서 60년대에 사용하던 단기 기억의 개념이 진화된 것이다. 단기 기억은 수동적으로 정보를 유지하는 것인데 반하여 작업 기억은 정보를 적극적으로 처리하고 조작한다는 것을 강조한다. 간단한 예를 들면 숫자 2, 7, 3, 9, 5를 불러준 후에 따라 해 보라고 하면 단기 기억을 측정하는 것이고, 잠시 후에 숫자를 거꾸로 말해보라고 하면 작업 기억을 측정하는 것이다. 작업 기억의 용량이 지능과 높은 상관관계를 가지고 있을 뿐 아니라 아동기의 작업 기억 용량이 후의 학업 성적을 예측한다는 연구가 있다(Alloway & Alloway, 2010). 그런데 작업 기억의 용량은 제한되어 있어서 한 개인이 동시에 보유할 수 있는 항목의 수는 1개에서 4 항목을 넘지 못하며, 다중 과제를 수행하는 경우는 더 감소한다. 영향력 있는 작업 기억의 모형 중 하나가 Baddeley & Hitch(1974)의 모형이다. 그들에 의하면 작업 기억이 하나의 저장고로 이루어진 것이 아니라, 상호작용하는 분리된 요소들로 이루어진 기억 시스템이다. 작업 기억의 구조는 각각 언어적 정보와 시공간적 정보를 담당하는 두 개의 영역 특정적(domain specific)인 하부 저장 시스템과, 이들로부터 정보를 수렴 받아, 조절하고, 명령을 내리는 영역 일반적(domain general)인 중심 실행기능으로 이루어진 구조라는 개념이다. 첫 번째 하위 구조인 음운적 고리(phonological loop)는 음성적 정보를 저장하며, 반복할 경우 사라지지 않도록 갱신할 수 있다. 전화번호를 계속 되뇌면 잊지 않는 이치다. 두 번째 하부 구조인 시공간 잡기장(visuospatial sketch pad)에서는 시각적 정보와 공간적 정보를 저장/조작하고 심적 이미지를 구성하는데 쓰인다. 성인에게서 시공간 잡기장은 '심적 칠판(mental sketchboard)'처럼 작용한다고 제안된다(Heathcote, 1994). 연산의 수행 중에 이 심적 칠판에 자료가 부호화 되고, 유지되며 조작된다는 의미이다. 이렇게 공간과 운동 정보를 처리하고 정교화 한 후에 전두엽의 중심실행기관으로 정보의 이동이 일어난다. 중심실행기능은 정보를 기억에 유지하면서 동시에 주의를 기울이고 부적절한 정보는 억제하고, 문제해결의 순서를 정하는 등의 인지 과정을 제어하는 역할을 한다. 집중, 억제와 같은 제어 능력의 개인차이가 지능의 개인차이와 추론 능력, 학업 성취 등과 밀접한 관계가 있다는 것이 확인 되었다(Alloway, Gathercole, Kirkwood & Elliott, 2009). 그렇지만 작업 기억과 수학 성취와의 관계는 연령에 따라, 영역에 따라서도 달라지는 것으로 알려진다. 취학 전 아동에 대한 Rasmussen & Bisanz(2005)의 연구는 아동들이 문제를 해결하기 위하여 동원하는 인지적 자원들이 비교적 짧은 시간에도 변할 수 있다는 사실을 밝혔다. 예를 들면, 작업 기억의 여러 요소들 중에서 시공간 작업 기억이 취학 전 아동들의 덧셈과 뺄셈 수행에 대한 가장 높은 예측을 한다. 그러나 1학년이 되면 시공간 작업 기억은 예측의 기능을 상실한다. 나이가 든 아동들에서는 언어적 작업 기억과 중심 실행 기능이 더 좋은 예측이다(Holmes & Adams, 2006). 그 이유는 어릴 때는 손가락이나 그림 모델을 사용하여 다양한 수학 문제를 해결하지만, 언어

능력과 언어적 기억이 발달함에 따라 문제 해결을 위해 언어에 점차로 더 의존하게 된다는 것이다.

작업 기억의 용량 증가가 지능 발달에서 중요한 역할을 한다는 주장은 아동기의 작업 기억 용량이 후에 추론 능력에 대한 예측을 한다는 실험으로 확인되었다(Jarrold & Bayliss, 2007). 그 이유는 작업 기억과 일반 유동성 지능[9](general fluid intelligence)이 공통의 신경 기반을 갖고 있기 때문인 것으로 해석된다. 이 공통의 신경 기반이 바로 전두엽의 아래 이마 이랑과 중간 이마 이랑이다.

특히 언어적 작업 기억을 담당하는 아래 이마 이랑에서는 ① 수학 기호(+, −,×,÷)의 의미 파악, 개념들 및 규칙의 언어적 표현, ② 수 단어의 발화, 수의 문법적 이해 및 처리, 계산과정 중 산술적 사실들의 인출, ③ 정답과 오답 사이의 차별/분리작업 등에 관여하는 것으로 알려졌다(Thompson-Schill, D'Esposito, Aguirre, & Farah, 1997). 또한 복잡한 문제, 사고력을 요구하는 문장제에서 더욱 활성화 된다.

4) 시공간적 능력

아인슈타인은 "단어나 언어는, 써진 것이든 발화되었든 나의 사고과정에서 아무런 역할을 하지 않는 것으로 보인다. 나의 사고의 기본 단위는 부호 또는 이미지들이고, 좀 더 명확히 하자면 내가 마음대로 재생하고 재조합할 수 있는 것들이다"라고 Hadamard에게 보낸 편지에서 언급하며 그의 창의적 사고과정에 언어보다는 시공간적 사고 과정이 중요함을 내비친다. 실제로 높은 수준의 인지적 과제에서 정보를 통합하는데 중요한 역할을 하는 영역이 전두엽만은 아니다. 앞에서 수 개념의 핵심 영역이라고 소개한 두정엽은 일반적으로는 공간 지각의 중추로 알려져 왔다. 공간 능력이란 심적 이미지를 형성하고, 시각화하며, 기억하고, 이미지를 변환하는 능력이다(McGee, 1979). 공간 능력은 대상에 대한 시각적 이미지의 조작과, 전개도와 실제 도형과의 관계처럼 대상들 사이의 관계에 대한 이해를 포함한다.

그렇지만 McGee(1979)에 의하면 성인의 50% 이상이 이미지를 제어하고 조작하는데 어려움을 겪는다고 한다. 공간 능력은 수학 성취도가 우수한 그룹의 특성이기도 한데 대학생들도 수식으로 주어진 영역을 시각화하는 과제(예 $z = x^2 - y^2$, 말안장 곡면)에서 어려움을 호소하는 경우가 빈번하다. 한편 초기의 학자들 중에는 공간 능력은 타고나는 것으로 학습될 수 없다고 믿는 학자들이 있었지만 최근에는 잘 계획된 공간 과제들을 통해 심적 이미지의 형성과 조작 능력이 개선될 수 있다는 주장이 힘을 얻고 있다(Mohler, 1997). 하버드 대학에서 실시한 공간능력의 성차 극복의 사례를 살펴보자. Wright, Thompson, Gains, Newcombe, & Kosslyn (2008)은 31명의 남녀 대학생들을 대상으로 장기간의 집중적인 훈련에 의해 공간 능력 개선을 시험하였다. 그들은 3가지 유형의 컴퓨터 과제를 사용하였는데 학생들은 21일 동안 매일 3차원 블록의 심적 회전과 심적 종이접기 과제를 훈련하였다. 훈련 기간이 끝난 후에는 전이를 확인하기 위하여 훈련 중 포함되지 않은 다른 공간 능력 테스트와 언어 유추 테스트를 시행하였다. 결과는 훈련받지 않은 다른 공간 과제 뿐 아니라 언어 유추 과제에서도 약간의 전이 효과가 관찰되었다. 또한 초기에는 남녀 학생간의 성별 차이가 존재하였지만 훈련 후에는 눈에 띄지 않을 정도가 되었다는 것이다. 그 외에도 연구자들은 공간 능력이 뛰어난 그룹과 뒤진 그룹 사이의 행동적 측면에서의 차이도 발견하였다. 우수한 그룹은 초기에 어려움을 겪지 않고 꾸준히 능력이 향상되었다. 그들은 공간 과제를 즐기면서 수행하고 자신들의 최고 한계까지 도달하게 된다. 뒤쳐진 그룹은 그 상태를 극복하는데 한동안 어려움을 겪었다. 그들은 느리게 발전하지만, 포기하지 않는 경우에는 빠른 도약의 단계로 결국 이행하였다. 그러므로 학생과 교사 모두 포기하지 않는 것이 중요하다.

5) 추론

추론은 좁은 의미로는 주어진 전제들로부터 결론을 이끌어 내는 인지적 과정부터 넓게는 정보를 분석하고 복잡한 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 것까지 포함하는 개념이다. 암묵적인 혹은 내재적인 정보를 명시

---

9) 지능은 결정성 지능(crystalized intelligence)과 유동성 지능(fluid intelligence)로 구분하는데 결정성 지능은 학습이나 문화, 언어습득과 관련이 있지만 유동성 지능은 이들과 무관하며 비언어적 추론능력과 유사한 개념이다.

적 정보로 바꿀 때에는 언제나 추론 활동이 따르게 된다(Knauff, Mulack, Kassubek, Salih, & Greenlee, 2002). 문제해결 과정에서도 추론 능력은 핵심적인 역할을 한다. 그런 이유로 지능과 같은 인간의 정신적 능력을 측정하는 주된 지표로 추론 능력은 꾸준히 연구되어 왔고, 추론의 심리과정을 뇌 영상 촬영을 통하여 모형화하는 시도가 90년 대 부터 활발히 진행되었다.

(1) 연역추론

연역추론에는 삼단 논법(P이면 Q이다. Q이면 R이다. 그러므로 P이면 R이다)과 명제적 연역(P이면 Q이다. P가 성립한다. 그러므로 Q이다)이 포함된다. 연역적 추론 과정에서 언어(통사와 논리)가 주된 역할을 하는가, 혹은 정신적인 이미지와 공간적 표상이 주된 역할을 하는가에 따라 상반된 주장이 존재한다. 추론이 유추($A: A' = B: B'$)의 경우처럼 언어에 기초한 문법적 조작에 의존한다는 주장과, 이와는 반대로 심상이나 공간적으로 조직된 심적 모형을 구성하고 조작함으로써 추론이 진행된다는 주장은 아직 타협점을 찾지 못하고 있다. 전자를 형식적 규칙 적용 가설이라 부르고, 후자는 정신 모형 이론(mental model theory)이라고 부른다.

• 형식적 규칙 적용(formal rule approach)가설에서는 연역추론은 [주어진 전제들의 언어적 표상 → 논리적 규칙의 단계적인 적용과 통사적 적용 → 결과의 유도]라는 과정을 통하여 진행된다.

이 이론에 의하면 연역추론에서는 규칙들의 지배를 받는 통사적 관계(주어 목적어 서술어들 사이의 관계)를 통한 표상이 이루어진 후에 논리적 연결고리를 따라 추론하는데 이때에도 주어진 전제들이 명시되는 시점의 문장의 구조적 성질이 그대로 반영된다. 그런데 이 이론에서는 전제들의 의미적 관계에는 관심을 두지 않는다. 하지만 사람들은 논리적으로는 옳은 과정을 거친 결론이라도 자신들의 신념과 상충하는 경우에 결론을 부정하는 경우도 많다. 다음 예를 보자.

사과는 빨갛다($P \rightarrow Q$)

빨간 것은 독이 있다($Q \rightarrow R$)

그러므로 사과는 독이 있다($P \rightarrow R$)

이것은 논리적으로는 옳은 귀결이지만 일반적으로는 믿을 수 없는 결과이기 때문에 상당수 사람들은 이 결과($P \rightarrow R$)가 틀리다고 판단한다.

• 정신모형이론(mental model theory)에 따르면 추론 과정은 [전제들의 공간적 표상(심적 이미지의 형성) → 이미지의 조작과 재구성 → 결과 유도} 과정을 따른다. 즉 전제가 되는 문장 자체의 구조적 성질보다는 그들이 나타내는 세계의 구조적 성질(예를 들어 "A는 B의 오른쪽에 있다"는 명제에 대하여 'B A' 로 공간적 관계를 머릿속에서 그려본다)을 내적으로 표상하고, 공간적인 조작과 추구를 하는 것이다. 그러므로 정신모형이론에서는 추론 과정에 동원되는 신경회로들은 시공간적 처리 과정에 관여하는 신경회로들이다(Goel & Dolan, 2001). 이런 맥락에서라면 앞서 소개한 아인슈타인의 진술은 정신모형이론을 지지하는 것으로 보인다. 그렇다면 좀 더 일반적인 추론 과정은 어떠할까?

(2) 일반 추론

Jung & Haier(2007)는 90년대 이후의 추론과 관련된 37편의 뇌 영상 촬영기법을 사용한 논문들(지능검사, 연역적/귀납적 추론, 삼단논법, 체스, 유추문제, 비언어적 도형분석, 수학적 추론 등의 과제를 다룸)을 메타 분석한 결과, 추론 활동은 전전두피질, 두정엽, 측두엽, 대상이랑, 그리고 후두엽의 특정영역을 공통적으로 활성화시킨다는 것을 발견하였다([그림 1] 참조). 그런데 흥미로운 것은 비언어적으로 제시된 도형 분석 과제들이 언어 영역을 활성화시키기도 하고, 삼단 논법이나 명제적 연역이 공간 지각과 관계있는 우뇌 두정엽 뒷부분을 활성화시킨다는 보고들이다. 일반적인 예측을 뛰어 넘는 놀라운 결과였다. 두정엽 윗부분은 공간적 표상이 유지되는 영역이므로 결국 논항구조(structure of argument)가 표상되는 곳으로 이해된다. 연역적 추론을 할 때 개인에 따라서는 그림, 그래프, 다이어그램, 집합관계 등을 포함한 다양한 표상을 사용한다는 사실을 생각해보면 두정엽이 관여하는 것을 납득할 수 있다. 그것이 삼단 논법이거나 명제적 추론인 경우에도 적용된다. 그런데 이와 같은 사실은 이미 수학교육학자들에 의해 예측된 바 있다. 즉 시각적 표상이 수학의 모든 추론과 논

리에서 사용된다는 제안이 Krutetskii(1976)에 의해 이루어진 바 있다. 또 언어와는 관계없는 도형 분석 과제에서도 내적언어를 사용해서 분석하기도 하고, 답을 선별하는 과정에 음운적 작업 기억을 담당하는 영역이 동원되는 것을 앞에서 살펴보았다. 결국 언어에 기초한 논리적 규칙적용과 공간적 표상 모두 추론 과정에서 사용하는 전략이다. 일반적으로 명제적 연역 추론과정에는 언어/논리를 담당하는 회로가 보다 활성화 되고, 공간 분석, 회전 등의 추론에는 시공간 지각과 관계있는 우뇌 두정엽의 뒷부분이 더욱 활성화 된다. 추론과 같은 지적인 활동도 뇌의 특수한 영역 한 곳에 제한된 것이 아니며, 전두-두정엽의 여러 회로들의 상호관계에 의해 발생한다는 것을 이해할 수 있다(Newman & Just, 2005; Jung & Haier, 2007)

추론 과정에 대한 논쟁이 오래 지속되는 이유는 실제로 개인에 따라서 언어-분석적 전략과 시-공간적 이미지의 조작이라는 다른 전략이 사용될 수 있기 때문이다. 이 사실은 특히 남녀의 사고과정의 차이를 이해하는데 도움을 준다. 일반적으로 남학생들 중에는 공간적인 전략을 사용하는 경우가 상대적으로 많고, 여학생들은 언어-논리에 기초해서 분석적인 접근을 하는 경우가 많다고 한다(Zhu, 2007). 이런 전략의 차이는 어린 시절에 특정 방식으로 문제를 해결하고자 했을 때 성공하거나 실패한 경험들이 누적되면서 공고해졌을 가능성이 있다. 그리고 한 가지 전략만을 사용해도 결과가 맞을 경우에 구태여 전략을 바꿀 이유를 학생들은 찾지 못한다. 또 다른 문제는 특정 전략에의 선호 현상이 교사 자신에게도 해당될 수 있다는 점이다. 교사가 선호하는 방식으로 사고하지 못하는 학생은 학습에서 어려움을 겪을 것이다.

3. 뇌 가소성 및 학습과 훈련을 통한 수학인지 능력의 향상

오랫동안 인간의 인지 능력 특히 지능이나 시공간 지각력, 작업 기억 용량 등은 유아기의 "민감한 시기(critical period)"라 불리는 기간을 일단 지나면 성인이 될 때까지 변하지 않는 고정된 것이라고 믿어져왔다. 그러나 뇌의 구조와 기능이 성년기에도 경험과 환경적 자극에 의해서 변할 수 있다는 것이 밝혀지기 시작했다. 뉴런 사이에 새로운 연결을 형성해서 재조직 할 수 있는 능력을 뇌가소성이라고 부르며 이 능력은 학습, 기억, 그리고 뇌 손상 후의 회복 등에서 잘 알려졌다. 예를 들면 런던의 택시 운전사들에서는 해마 부위의 회백질이 일반인들보다 넓게 확장되었다든지(Maguire, Woollett, & Spiers, 2006), 이중 언어를 사용하는 사람들의 좌 뇌 두정엽내 피질이 한 가지 언어만 사용하는 사람들과 비교했을 때 그 부위에 변화가 있다는 연구들(Michelli, Crinion, Noppeney, O′Doherty, Ashburner, Frackowiak, & Price, 2004)이 속속 관찰되었다. 최근에는 추상적인 정보를 폭넓게 학습한 후에 뇌에서 가소성이 촉진된다는 것이 보고되었다. 독일에서 의과 대학생들을 대상으로 자격시험을 치기 3개월 전과 시험을 친 직후의 뇌 영상 사진을 당시 시험을 위해 공부하지 않은 학생들의 그것과 비교해 보았더니 시험공부를 한 학생들에게서는 두정 피질과 해마 뒷부분에서 학습에 따른 변화가 나타났다. 이 영역들은 학습과 기억 인출과 관계있는 부위들이다(Draganski, Gaser, Kempermann, Kuhn, Winkler, Buchel & May, 2006). 앞에서는 공간 지각력이 꾸준한 훈련에 의하여 향상된 것을 살펴보았다. 수학에서 학습의 효과를 부정할 사람은 없다. 그런데 그 효과는 신경학적으로는 어떤 변화를 가져오는 것일까? 결론은 뇌에는 구조적 변화(해당 부위의 시냅스 밀도가 높아지는 것)와 기능적 변화(정보 처리 속도가 빨라지는 것)가 모두 발생할 수 있다는 것이다. 수학학습과 관련된 신경기반의 변화를 살펴보자.

1) 연산과 도형문제에서 연습의 효과로 인한 신경기반의 변화

일반적으로 충분한 연습 후에는 정확도가 올라가고 풀이 속도도 단축된다. 그런데 연습에 의해서 뇌에서는 구체적으로 어떤 변화가 생기는 것일까? 이러한 문제에 관심을 가진 최초의 연구진은 Pauli, Lutzenberger, Rau, Birbaumer, Rickard, Yaroush, & Bourne(1994)였다. 그들은 큰 수의 곱셈과 작은 수의 곱셈을 청소년들에게 연습시키고 반응시간의 변화, 정확도, 뇌 영역의 활성화를 관찰하였는데 연습량이 증가하면서 전두엽의 활성화는 오히려 감소하는 것을 발견하였다. 반복되는 훈련으로 전두엽의 작업 기억의 부담이 감소하였고, 참가자들

은 기억으로부터 답을 쉽게 인출하게 되었다. 이것은 강도 높은 산술 훈련의 결과로 뇌의 활성화에 변화가 온다는 것을 증명한 최초의 연구라고 할 수 있다. 그 후의 연구들은 점차로 더 복잡한 연산과 기술을 사용하게 되었다. Delazer, Domahs Bartha, Brenneis, Lochy, Trieb, & Benke(2003)는 대학 수준 이상의 성인 16명에게 두 가지 전략으로(순수한 암기를 반복 훈련한 그룹과 알고리즘을 익히는 전략 학습) 연산을 5일에 걸쳐 훈련시켰고 뇌 영상 촬영을 통하여 훈련 전후의 활성화 정도를 비교하였다. 그들이 발견한 사실들은 다음과 같다. 알고리즘 전략을 학습한 그룹에서는 전이효과가 나타났으나 단순 암기로 결과를 외운 그룹에서는 전이 효과가 나타나지 않고 피연산자와 결과를 대응시키는 학습만 발생하였다. 암기 그룹에서는 언어적 정보의 인출과 관련된 영역이 활성화되었지만 전략학습 그룹은 시공간적 처리를 담당하는 영역의 활성화가 더욱 컸다. 또 계산 기술이 우수한 학생일수록 훈련 후에는 알고리즘의 사용보다는 기억 인출이 빈번하였다. 그리고 새로운 과제의 경우는 중심실행기능(계획 수립, 억제, 주의집중)을 담당하는 전두엽 아래 이마 이랑과 수 처리나 복잡한 계산과 관계있는 두정 내 고랑의 활성화가 높았다. 이 의미는 익숙하지 않은 과제를 접했을 때는 전두엽에서 여러 가지 보조적인 역할을 하게 되는데 이것들은 여러 가지 해답을 내놓고 가능한 답을 테스트 해본다든지, 불필요한 정보를 억제하는 것, 문제해결의 순서를 정하는 것 등으로 일종의 비계의 역할을 한다는 뜻이다. 마지막으로 알고리즘 전략을 사용한 그룹에서도 연습의 결과로 두정엽 내부에서도 직접적인 계산을 수행하는 영역에서 기억 인출과 관계있는 영역으로 활성화 패턴이 바뀌었다. 즉 연습에 의하여 신경 회로는 효율성이 높아져서 속도가 빨라지고 계산을 수행하는 전략에서 직접 인출로 전략이 바뀐다. 비슷한 유형의 연구가 Grabner, Ischebeck, Koppelstatter, Reishofer, Koschutnig, Delazer, Ebner, & Neuper(2009)에 의해서도 시도되었는데 연구자들은 성인 남녀에게 5일 동안 복잡한 곱셈 암산(예:14×7)과 다양한 3차원 다면체의 면의 수)을 훈련시키고 훈련 전후의 뇌 영상을 촬영하였다. 그들은 여기서 Delazer와 동료들(2003)과 유사한 결과를 얻었다. 즉 곱셈훈련을 받기 전에는 전두엽이 보다 활성화되었지만 훈련 후에는 자동인출과 관련된 영역으로 활성화 패턴이 바뀌었다. 또 3차원 다면체의 경우는 훈련 후에 시각적 이미지와 기억 인출을 담당하는 영역들의 활성도가 높아졌다. 이러한 일련의 연구가 의미하는 것은 훈련을 통하여 정보의 처리에는 기능적 변화 뿐 아니라 구조적인 변화가 발생한다는 것이다. 즉 훈련 전에 주로 활성화되는 전두엽은 일반적인 인지 기능을 담당하지만 훈련 후에 활성화 되는 영역들은 시공간적 작업 기억과, 공간적 일화기억, 그리고 사실들의 자동인출과 같은 구체적이고 특수한 역할을 담당하는 영역들이다. 이러한 변화는 성장에 따른 능력의 변화에서도 살펴볼 수 있다.

2) 성장에 따른 변화

Rivera, Reiss, Eckert & Menon(2005)는 8세부터 19세까지의 학생들에게 간단한 산술문제(5+3=8, 7-4=3)를 제시하고 주어진 답이 옳은지 그른지를 판단하게 하였다. 연구자들은 푸는 속도가 연령에 따라 빨라지는 것을 관찰하였다(이 경우 모든 학생들이 이미 정답을 잘 구했기 때문에 정확도는 증가하지 않았다). 그런데 뇌 영상 촬영은 나이에 따른 계산 속도의 개선은 특정한 연산을 담당하는 특정 회로의 효율성이 변화하기 때문은 아니라는 것을 보여주었다. 차라리 그것은 영역 일반적인(domain general) 처리로부터 영역 특정적인(domain specific) 처리로의 전환 때문이었다. 어린 아동들에서는 기억(해마)과 작업 기억을 담당하는 회로(전두엽, 대상 이랑), 절차적 계산과 관련된 기저핵이 동원되는데 반하여, 나이든 아동들은 두정엽과 방추이랑을 동원하였다. 성장하면서 전두엽의 활성화가 감소한다는 것은 집중, 작업 기억, 그리고 성숙하지 못한 문제해결 전략과 같은 아동기의 특성이 해소된다는 것을 의미한다. 이것은 중요한 인지적 변화이며, 자칫하면 성장에 따라 신경회로의 기능이 효율적으로 개선된 것으로 해석할 수 있었던 것을 정확하게 이해시켜준 사례로 볼 수 있다. 이러한 변화가 학습과 경험에 의한 것인지, 뇌의 생물학적 성숙에 의한 것인지 혹은 이들의 상호작용에 의한 것인지는 현재로서는 밝혀지지 않았다. 하지만 이와 같은 연구는 아동들로 하여금 사고할 때 전두엽 중심의 영역 일반적인 처리로부터 두정엽의 영역 특정

적인 방식으로 전환시킬 수 있는 방법을 어떻게 구현할 수 있을까를 고민하게 한다. 위와 같은 일련의 연구들이 암시하는 것은 훈련과 연습이다. 물론 훈련과 연습이 기계적인 반복을 끊임없이 해야 한다는 의미는 아니다. 기계적인 반복 연습은 어느 단계에 이르면 자동화되지만 자신의 행동에 대하여 의식과 주의를 기울이지 않게 되는 경우에는 한 단계 도약할 기회를 놓칠 수 있다. 낮은 수준의 인지 활동에는 이러한 방법이 유효할 수 있다. 그러나 잘 준비된 신중한 훈련과 연습이 창의성까지 계발하는지에 대하여는 아직은 규명되지 않았다[10].

위에서 살펴본 바와 같이 학습 방법의 차이가 가져오는 영향과 효과에 대한 논의는 수학교육과 학습 심리학에서 오랫동안 논의해온 주제이다. 이러한 일련의 연구들은 수학 교육학계에서 이미 알고 있는 내용의 상당 부분을 확인시켜준 측면이 있지만 뇌 영상촬영을 통하여 서로 다른 전략이나 교수법의 효과를 비교할 수 있다는 점에서 신경과학이 수학교육에 도움을 주고 또 수학교육은 신경과학에 교육학적으로 의미 있는 실험과제를 제시함으로써 연구의 수준을 높일 수 있는 가능성을 보여준다.

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 수학적 사고에 동원되는 뇌 영역

본 연구에서는 수학적 사고에 필요한 인지 기능들-수 감각, 시공간적 능력, 언어, 장기 기억, 작업 기억, 추론 등-과 관련된 신경회로를 확인함으로써 수학적 사고과정을 규명하고자 하였다. 간단한 연산에도 뇌의 여러 영역들이 상호작용을 하는데 수 처리와 기초 연산에는 두정엽 내 고랑과 전두엽이, 시공간적 처리에는 두정엽 윗부분이 동원되며 전두엽은 고등 사고의 사령탑으로 문제해결 과정 중에 계획하고, 순서를 정하며, 불필요한 정보를 억제 하는 등의 작업 기억과 실행 기능에서 중요한 역할을 하며 특히 수학과 관련된 특화된 회로가 형성될 때까지 어린 시기 동안에는 더욱 많은 역할을 하는 것으로 밝혀졌다. 또한 수학적 지식은 개념적 지식, 절차적 지식들로 구분 가능한데 이것들 역시 뇌의 독립된 영역에서 처리, 저장된다는 것이 확인되었다.

2. 수학 교육에의 시사점

지금까지의 수학학습심리학의 연구와 실험방법으로는 어떤 이론의 타당성을 과학적으로 보여주는데 한계가 있었다. 그 한계 중 하나가 학습과정이나 사고 과정을 직접 관찰할 수 없었기 때문이다. 또한 수학이 추상을 다루는 학문이고 수학 활동에는 매우 다양한 인지 과정이 포함되기 때문에 수학 학습 과정을 이해하는 것은 매우 복잡하고 어렵다. 그러나 수학 인지, 뇌 기반 교육과 같은 학습 현상과 수학적 사고과정을 연구하는 새로운 패러다임이 등장함에 따라서 학습에 대한 연구를 학습과학으로 볼 수 있는 새로운 시각을 갖게 되었다(황우형, 2003). 이러한 분야와의 융합은 수학교육학이 진정한 의미의 과학으로 도약하기 위하여 적합한 도구라고 판단된다.

본고에서 고찰한 다양한 인지 기능 중 어느 하나가 부진해도 수학에서 높은 성취를 이루는 것은 힘들다. 이것은 ‘행복한 가정은 모두 비슷하지만 불행한 가정은 제각기 사연이 다르다’는 격언처럼 수학을 잘하는 학생들에게는 공통적인 특징이 있지만 수학을 못하는 학생들에게는 저마다 다른 원인이 있음을 설명해준다. 수학 활동을 기초 인지 기능 및 구성 요소들로 분해하여 관찰할 수 있다면 학습자의 사고 과정을 교사가 깊이 있게 이해하고 학습자의 어려움을 겪는 원인을 찾는 과정에 직접적인 도움을 줄 것이다. 예를 들어 A라는 학습자가 문장제에서 빈번한 오류를 범하는 경우에 경험이 적은 교사라면 ‘A는 문장제에 약해’라고 생각하고 넘어갈 수 있지만 경험과 전문 지식이 많은 교사라면 A의 문제가 언어와 문장 이해 단계에 있는지 혹은 그 이후의 추론과 같은 사고 과정에서 비롯된 것인지를 파악하고 해결 방법을 생각할 것이다. B라는 학습자가 계산상의 실수를 빈번히 하는 경우에도 그의 계산 실수가 연습부족에서 온 것인지 개념 이해의 부족인지 혹은 억제 능력이 아직 충분하지 못해서 비롯된 것인지를 먼저 이해하려고 할 것이다. 그러므로 수학 인지에 관한 지식

10) 전문가와 전문성에 관련된 연구의 권위자인 Ericsson은 잘 준비된 신중한 훈련(deliberate practice)을 통해 최소 한 10년간 노력하면 전문가가 될 수 있다고 주장한다.

은 교사의 전문성을 높이는데도 기여할 것이다.

수학적 사고과정이 명확히 규명 된다면 수학학습장애 및 부진에 대한 진단과 맞춤형 중재 프로그램의 개발에도 한 몫을 할 것으로 기대된다. 최근에는 수학학습장애 및 부진의 원인을 뇌의 특정 영역의 신경학적 기능 부진이나 해부학적 문제로 파악하고 그에 따른 유형별 분류와 특징을 짝짓는 시도를 하는 학자들이 많아지고 있다(Rubinsten & Henik, 2009; Geary, 2011). 수학학습장애 및 부진의 유형은 크게 구분하면 장기 기억형, 작업 기억 형, 수 감각 형, 그리고 읽기 장애와의 공존 형 등이다. 이들은 단독으로 또는 복합적으로 나타날 수도 있고, 일반적인 학습장애 혹은 ADHD와 공존할 수도 있다(김연미, 2011). 진단이 정확해야 그에게 적합한 중재프로그램을 계획할 수 있으므로 수학적 사고과정에 대한 이해는 수학학습장애와 부진으로 어려움을 겪는 학습자들에게 도움을 줄 것이다.

세 번째로 수학적 지식 중 개념적 지식, 절차적 지식, 산술적 사실들이 뇌의 독립적인 영역에서 처리, 저장된다는 사실은 어떤 의미가 있을까? 만일 위에서 언급한 세 가지 지식이 뇌의 동일한 영역에서 처리되고 저장된다면 그 중 하나를 계발하면 다른 능력들도 쉽게 계발될 수 있지만 동일한 이유로 한 가지 능력을 어떤 이유로 잃게 된다면 다른 능력도 함께 소멸될 것이다. 그런 이유로 인간의 기억 체계는 만일에 대비하여 다양한 경로를 준비해 놓았다. 그래서 힘들지만 개념은 개념대로 절차적 지식과 기술은 그것대로 다른 경로를 통해 익혀야 하는 것이다. 특히 아동기에는 뇌의 영역들 간의 연결이 부족하기 때문에 한 가지 지식만을 강조해서는 안 된다. 본 연구에서는 절차적 지식과 개념적 지식 형성의 매개로 일화적 지식을 사용하자는 제안을 소개하였다. 절차적 지식은 비서술적 기억으로 언어적으로 접근하지 못하는 특성이 있으므로 문제해결 과정에 대하여 설명해보고 토론하는 것들은 일화적 기억과 개념을 형성하는데 도움이 된다는 판단이다. 기억을 강화하는 가장 좋은 학습법이 시험이라는 결과는 의외일 수 있지만 한편으로는 공감이 갈 수 있다. 발표와 토론을 시험 형식으로 제시하면 비슷한 효과를 기대할 수 있을 것이다.

추론이나 문장제를 비롯한 수학의 전 영역에서 언어, 논리 회로뿐 아니라 시공간 회로가 동원된다는 사실은 수학적 사고에 언어(기호 및 개념)의 사용과 심상, 시공간적 능력의 상호작용이 필요하다는 사실을 확인해 준다. 그러나 다양한 전략 사용의 가능성은 개인에 따라서 혹은 성별에 따라 특정 전략을 선호하는 것으로 고착될 수도 있다. 행동적으로는 동일한 결과지만 여학생들의 경우는 언어-분석적 전략을 선호하고 남학생들의 경우 시공간적 전략을 상대적으로 많이 택한다고 한다. 남녀 성별에 따른 전략의 선호 차이에 대한 지식도 예비교사를 위한 교육과정에 포함시킬 필요가 제기된다.

황우형(2003)은 " <중략> 두뇌와 학습에 대한 지금까지의 연구 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다. 두뇌 발달은 앞의 전두엽부터 뒤의 후두엽 쪽으로 이동하면서 발달한다. 따라서 효과적인 학습법은 앞의 전두엽을 자극하는 과정에서 시작해 뒤의 후두엽을 자극하는 과정으로 변화해나가는 것이 가장 이상적이다"라고 제안하였다. 본 연구에서 살펴본 훈련의 효과나 성장에 따른 변화는 위의 진술보다 조금 더 구체적으로 그간의 성과를 요약할 수 있으며 위의 제안에 대한 해결의 실마리를 제시할 수 있다. 즉 아동기, 훈련 및 연습 전에는 작업 기억이나 기억인출을 담당하는 전두엽의 활동이 더욱 활발하고, 대학생, 반복 경험과 연습 후에는 작업 기억의 기능적 효율성이 증진되어 전두엽의 활성화는 오히려 감소하면서 시공간적 표상과 공간적 작업 기억을 담당하는 두정엽과 자동인출과 관련된 영역의 활성화가 높아진다는 사실이다. 그리고 전두엽은 고등사고의 사령탑이라는 중대한 임무 때문에 가장 늦게까지 발달해서 사춘기를 지나 20대 초반까지도 발달한다. ADHD 아동 중에 성인이 되면서 증상이 사라지는 경우가 이에 해당할 것이다. 아동기, 연습, 발달 전에 전두엽의 활성화가 높은 것을 일종의 비계 역할로 해석할 수 있다. 문제해결에 익숙하지 않은 새로운 유형의 과제와 접할 때는 전두엽이 다양한 보조적인 역할을 통해 여러 가지 전략을 구사해보고 타당성도 테스트하지만 문제에 맞는 전략을 자동적으로 구사할 수 있을 때는 두정엽에서 문제의 표상 단계로 신속히 이동한다. 본 연구에서는 전두엽과 두정엽이 수학적 사고에서 가장 중요한 역할을 하는 두 영역인 것을 확인하였다. 그러므로 수학에 어려움을 겪는 학습자라면 전두엽의 작업

기억, 추론 능력과 두정엽의 시공간적 능력을 확인해볼 필요가 있다. 본 연구에서 다루지는 않았지만 이러한 패턴은 수학 우수 집단과 일반 집단의 신경학적 기반의 차이에서도 동일한 양상을 보일 것으로 추측할 수 있다. 이 주제는 후속 연구에서 심도 있게 다루고자 한다.

인지 신경 심리학과 교육학의 상호 기여에 대한 전망은 초기에는 상당히 부정적이었다. 교육학자들이 이미 알고 있는 것들을 확인하는데 그칠 뿐이며 두 분야 사이의 거리가 너무 멀다는 회의론이 지배적이었다. 그러나 두 분야의 협동은 점차 긍정적인 전망으로 바뀌고 있다. 인지 심리학자 Kosslyn(2007)은 인간의 지능 향상과 관련하여 개개인에게 부족한 어떤 구체적인 능력을 개발하기 위한 '목표를 가진 훈련'이 고안될 것으로 전망한다. 하지만 이런 낙관적 전망에 모든 학자들이 동의하는 것은 아니다. 아직 신경과학과 교육학은 매우 다른 분야로 그 차이를 다리 하나로 연결하기에는 멀게 느껴지는 것도 사실이다. 그렇지만 수학교육 분야에서 쌓아온 성과를 토대로 신경과학에 교육학적으로 의미있는 실험과제나 방법을 제시하는 것도 두 분야 간의 의미 있는 협동이라고 생각된다. 그동안 신경심리학에서 수행한 과제들은 기초적인 것들이 대부분이어서 교육학적으로 큰 의미가 없는 것들도 포함되지만 수학교육에서는 교육현장에서 필수적이고 중요한 주제들에 대한 풍부한 지식을 축적하였다. 이러한 지식은 교수 학습법에 대한 전문 지식이 없는 신경 심리학자들에게 큰 도움이 될 것이다. 역으로 인지 신경과학에서 사용하는 도구들은 수학교육에 대한 다양한 가능성을 제공한다. 그것들은 다양한 교수법이 학습에 가져오는 비교와 모니터링, 학습에서 개인차에 대한 이해, 그리고 특수 교육을 필요로 하는 아동들에 대한 조기 진단 등을 꼽을 수 있다(Goswami, 2004). 두 분야의 학자들의 협동은 궁극적으로 수학이라는 고등 정신 활동을 가능하게 하는 뇌에서의 사고과정을 규명함으로써, 수학적 능력을 신장하는 교수학습법을 개발하는데 기여할 것이다.

참 고 문 헌

김연미 (2011). 신경심리학에 근거한 수학학습장애의 유형분류 및 심층진단검사의 개발을 위한 기초연구, 초등수학교육 14(3), 237-260.

Kim, Y.M. (2011). Neuropsychological approaches to mathematical learning disabilities and research on the development of diagnostic test, *Education of Primary School Mathematics 14*(3), 237-260.

황우형 (2003). 수학교육에서 바라본 학습심리학의 발달과 전망, 수학교육 42(2), 121-135.

Whang, W. H. (2003). Prospective view of developmental process and the future prospect of psychology of learning mathematics, *The Mathematical Education 42*(2), 121-135.

Alloway, T.P., Gathercole, S.E., Kirkwood, H., & Elliott, J. (2009). The cognitive and behavioral characteristics of children with low working memory, *Child Development 80*(2), 606-621.

Alloway, T.P., Alloway, R.G. (2010). Investigating the predictive roles of working memory and IQ in academic attainment, *Journal of Experimental Child Psychology 106*(1), 20 - 29.

Anderson, J. (2005). Human symbol manipulation within an integrated cognitive architecture, *Cognitive Science 29*(3), 313-341.

Baddley, A.D. & Hitch, G. (1974). *Working memory.* In G.H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory* 8 (47 - 89). New York: Academic Press.

Barsalou, L.W., Simmons, W., Barbey, A.K., & Wilson, C.D. (1999). Grounding conceptual knowledge in modalityspecific systems, *Trends in Cognitive Sciences 7*(2), 84 - 91.

Barsalou, L.W., & Wiemer-Hastings, K. (2005). Situating abstract concepts. In D. Pecher & R.A. Zwaan (Eds.), *Grounding cognition: The role of perception and action in memory, language, and thinking* (129 - 163). Cambridge: Cambridge University Press.

Chan, J., McDermott, K., & Roediger, I.H. (2006). Retrieval-Induced Facilitation: Initially Nontested Material Can Benefit From Prior testing of Related

Material, *Journal of Experimental Psychology General 135*(4), 553-571.

Changeux, J.P. & Conne, A. (2002). 정신, 물질 그리고 수학 (강주현 역), 서울: 경문사. (원저 1989 출판)

Davis, G., Hill, D., & Smith, N. (2000). A memory-based model for aspects of mathematics teaching. In T. Nakahara & M. Koyama(Eds.), *Proceedings of 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2*, 25-232. Hiroshima: Hiroshima University.

Dehaene, S. (1997). *The number sense*, New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex 33*(2), 219-250.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing, *Cognitive Neuropsychology 20*(3/4/5/6), 487-560.

Delazer, M., Domahs, F., Bartha, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., & Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic—An fMRI Study. *Cogn Brain Res 18*(1), 76 - 88.

Dragansky, B., Gaser, C., Kempermann, G., Kuhn, H., Winkler, J., Buchel, C., & May, A. (2006). Temporal and Spatial Dynamics of Brain Structure Changes during Extensive Learning, *The Journal of Neuroscience 26*(23), 6314- 6317.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (95-126). Dordrecht: Kluwer.

Geary, D.C., Hoard, M.K. (2005). Learning disabilities in arithmetic and mathematics: theoretical and empirical perspectives. In Campbell, J.I.D. (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (253-267). New York: Psychology Press.

Geary, D.C. (2011). Consequences, characterristics, characteristics, and causes of poor mathematics achievement and mathematical learning disabilities, *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics 32*(3), 250-263.

Goel, V. & Dolan, R.J. (2001) Functional neuro-anatomy of three-term relational reasoning, *Neuropsychologia 39*(9), 901 - 909.

Grabner, R.H., Ischebeck A., Koppelstatter F., Reishofer, G., Koschutnig, K. Delazer, M., Ebner, F., & Neuper, C. (2009). Fact Learning in Complex Arithmetic and Figural-Spatial Tasks: The Role of the Angular Gyrus and its Relation to Mathematical Competence, *Human Brain Mapping 30*(9), 2936 - 2952.

Goswami, U. (2004). Neuroscience and Education, *British Journal of Educational Psychology 74*(1), 1-14.

Hadamard, J. (1990). 수학 분야에서 발명의 심리학 (정계섭 역). 서울: 범양사. (원저 1957년 출판)

Heathcote, D. (1994). The role of visuo-spatial working memory in the mental addition of multi-digit addends, *Current Psychology of Cognition 13*(2), 207-245.

Holmes, J., & Adams., J. W. (2006). Working memory and children's mathematical skills: Implications for mathematical development and mathematical curricula. *Educational Psychology 26*, 339-366.

Jarrold, C. & Bayliss, D.M. (2007). Variation in working memory due to typical and typical development. In A.R.A. Conway, C. Jarrold, M.J. Kane, A. Miyake & J.N. Towse (Eds.). *Variation in working memory* (137 - 161). New York: Oxford University Press.

Jung, R.E., & Haier, R.J. (2007). The parieto-frontal integration theory (P-FIT) of intelligence: converging neuroimaging evidence. *Behav. Brain Sci. 30*(2), 135 - 154.

Knauff, M., Mulack, T., Kassubek, J., Salih, H.R. & Greenlee, M.W. (2002). Spatial imagery in deductive reasoning: A functional MRI study, *Brain Research: Cognitive Brain Research 13*(2), 203 - 312.

Kong, J., Wang, C., Kong, K., vangel, M., Chua, E., & Gollup, R. (2005). The neural substrates of arithmetic operations and procedure complexity, *Cognitive Brain Research 22*(3), 397-405.

Kosslyn, S.M. (2007). Human intelligence can be increased, and can be increased dramatically, *Edge World Question Center*. Reprinted in J. Brockman (Ed.), *What are you optimistic about: Today's leading thinkers on why things are good and getting better* (285-287). New York: Harper.

Krueger, F., Spampinato, M.V., Pardini, M., Pajevic, S., Wood, J.N., Weiss, G.H., Landgraf, S., & Grafman. (2008). Integral calculus problem solving: an fMRI study, *Neuroreport 19*(11), 1095-1099.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathe- matical abilities in schoolchildren,* Chicago: Univer- sity of Chicago Press.

Lee, K., Lim, Z.Y., Yeong, S., Ng, S.F., Venkatraman, V., & Chee, M. (2007). Strategic differences in algebraic problem solving: Neuroanatomical correlates, *Brain Research 1155*(June), 163-171.

Maguire, E., Woollett, K., & Spiers, H. (2006). London Taxi drivers and bus drivers: a structural MRI and neuropsychological analysis, *Hippocampus 16*(12), 1091-1101.

McGee, M. (1979). Human spatial abilities: Psycho- metric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological Influences, *Psychological Bulletin 86*(5), 889-918.

Mc Neil, N.M. & Jarvin, L. (2007). When theories don't add up: Disentangling the manipulatives debate, *Theory into Practice 46*(4), 309-316.

Michelli, A., Crinion, J., Noppeney, U., O'Doherty, J., Ashburner, J., Frackowiak, R., & Price, C. (2004). Structural plasticity in the bilingual brain, *Nature 431*(October).

Mohler, J.L. (1997). An instructional method for the AutoCAD modelling environment, *Engineering Design Graphics Journal 61*(1), *5-13.*

Newman, S.D.& Just, M.A. (2005). The neural bases of intelligence: a per-spective based on functional neuroimaging. In J. Sternberg & J. Pretz (Eds.), *Cognition and Intelligence: Identifying the Mechanisms of the Mind* (88-103). New York: Cambridge University Press.

Paivio, A. (1991). Dual coding theory: Retrospect and current status. *Canadian Journal of Psychology/ Revue canadienne de psychologie 45*(3), 255-287.

Pauli, P., Lutzenberger, W., Rau, H., Birbaumer, N., Rickard, T.C., Yaroush, R.A., & Bourne, L.E. Jr. (1994). Brain potentials during mental arithmetic: Effects of extensive practice and problem difficulty. *Brain Research, Cognitive Brain Research 2*, 21 - 29.

Prabhakaran, V., Rypma, B., Gabrieli, J. (2001). Neural substrates of mathematical reasoning: an fMRI study of neocortical activation during performance of a necessary mathematics operations test, *Neuropsychology 15*(1), 115-127.

Qin, Y., Carter, C.S., Silk, E., Stenger, V.A., Fissell, K., Goode, A. & Anderson, J.R. (2004). The change of the brain activation patterns as children learn algebra equation solving, *Proceedings of National Academy of Sciences 101*(15), 5686-5691.

Rasmussen, C., & Bisanz, J. (2005). Representation and working memory in early arithmetic, *Journal of Experimental Child Psychology 91*, 137-157.

Rittle-Johnson, B. & Aliblai, M.W. (1999). Conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: Does one lead to another? *Journal of educational Psychology 91*(1), 175-189.

Rivera, S.M., Reiss, A.L., Eckert, M.A., & Menon, V. (2005). Developmental changes in mental arithmetic: Evidence for increased specialization in the left inferior parietal cortex, *Cerebral Cortex*

15(11), 1779-1790.

Rubinsten O. & Henik A. (2009). Developmental dyscalculia: heterogeneity might not mean different mechanisms, *Trends in Cognitive. Science 13*(2), 92 - 99.

Schroeder, B. (2011). Investigating a metacognitive strategy for solving indefinite integration problems in Calculus, *thesis,* University of Connecticut.

Schwanenflugel, P.J. (1991). Why are abstract concepts hard to understand? In P.J. Schwanenflugel (Ed.), *The psychology of word meanings* (235-250). Hillsdale: Erlbaum.

Simon, T.J. (1999). The foundations of numerical thinking in a brain without numbers, *Trends in Cognitive Sciences 3*(10), 363-365.

Sohn, M.H., Goode, A., Koedinger, K.R., Stenger, V.A., Fissell, K., & Carter, C.S.. (2004). Behavioral equivalence, but not neural equivalence - neural evidence of alternative strategies in mathematical thinking, *Nature Neuroscience 7*(11), 1193 - 1194.

Squire, L.R. (1994). Declarative and non-declarative memory: Multiple brain systems supporing learning and memory. In D.L. Schacter & E. Tulving (Eds.), *Memory Systems* (203-231). Cambridge: MIT Press.

Tall, D.O. (1998). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking, Plenary presentation at *the International Conference on the Teaching of Mathematics,* Samos.

Tang, Y., Zhang, W., Chen, K., Feng, S., Ti, Y., Shen, T. Reiman, E., & Liu, Y. (2006). Arithemetic Processing in the brain shaped by cultures, *PNAS 103*(28), 10775-10780.

Terao, A., Koedinger, K.R., Sohn, M.H., Qin, Y., Anderson, J.R., Carter, C.S., (2004). An fMRI study of the interplay of symbolic and visuo-spatial systems in mathematical reasoning, *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Conference of the Cognitive Science Society.* Mahwah: Erlbaum.

Thomas, M., Wilson, A., Corballis, M., Lim, V., & Yoon, C. (2010). Evidence from cognitive neuro-science for the role of graphical and algebraic representations in understanding function, *ZDM Mathematics Education 42*(6), 607-619.

Thompson-Schill, S.L., D'Esposito, M., Aguirre, G.K., & Farah, M.J. (1997). Role of left prefrontal cortex in retrieval of semantic knowledge: A re-evaluation, *Proceedings of the National Academy of Science 94*(26), 14792-14797.

Tulving, E. (1983). *Elements of Episodic Memory,* Oxford: Oxford University Press.

van Nes, F. & De Lange, J. (2007). Mathematics Education and Neuroscience: Relating spatial structures for the development of spatial sense and number sense, *The Montana Council of Teachers of Mathematics 4*(2), 210-229.

Varma, S., McCallin, B, & Schwartz, D. (2008). Scientific and pragmatic challenges for bridging education and neuroscience, *Educational Researcher 37*(3), 140-152.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infant, *Nature 358*(6389), 749-750

Wright, R. Thompson, W., Gains, G., Newcombe, N. & Kosslyn, S. (2008). Training generalized skills, *Psychonomic Bulletin & Review 15*(4), 763-771.

Zago, L., Pesenti, M., Mellet, E., Crivello, F., Mazoyer, B., & Tzourio-Mazoyer, N. (2001). Neural correlates of simple and complex mental calculation, *Neuroimage 13*(2), 314 - 327.

Zhu, Z. (2007). Gender differences in mathematical problem solving patterens: A review of literature, *International Educational Joural Education 8*(2), 187-203.

Mathematical thinking, its neural systems and implication for education

Yeon Mi Kim
Department of Basic Science, Hong Ik University
e-mail: kimym@hanmail.net

What is the foundation of mathematical thinking? Is it logic based symbolic language system? or does it rely more on mental imagery and visuo-spatial abilities? What kind of neural changes happen if someone's mathematical abilities improve through practice? To answer these questions, basic cognitive processes including long term memory, working memory, visuo-spatial perception, number processes are considered through neuropsychological outcomes. Neuronal changes following development and practices are inspected and we can show there are neural networks critical for the mathematical thinking and development: prefrontal-anterior cingulate-parietal network. Through these inquiry, we can infer the answer to our question.

* ZDM classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C50
* Key Words : mathematical cognition, fMRI, working memory, central executive function, memory based instruction, neural plasticity, mental imagery, fluid intelligence, visuospatial sketchpad