

다면체의 쌍대 탐구 과정에서 초등수학영재들이 보여주는 시각화 방법 분석¹⁾

이진수²⁾ · 송상현³⁾

본 연구는 초등학교 6학년 영재학급 학생들이 정다면체 및 삼각다면체의 쌍대 관계를 탐구하면서 입체도형의 구성 요소를 통해 쌍대 관계를 어떻게 인식하고 이미지화하여, 결과적으로는 어떤 시각화 방법을 사용하는지 분석하는데 목적이 있다. 이를 위해 인천과 서울지역에 거주하는 총 4개 학급 60명의 학생들이 대상으로 학습지를 분석하였으며, 이들 중 소속 학급 내 성취 수준이 중상 이상인 12명의 학생들을 대상으로 관찰 및 면담을 통해 사고 과정을 보다 상세히 분석하였다. 다면체의 쌍대 관계를 탐구하는 과정에 필요한 구성요소에는 면, 꼭짓점, 모서리의 개수라는 일차적인 요소가 존재하고 한 면에 모인 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수라는 이차적인 요소가 존재한다. 일반적인 학생들은 구성 요소들의 개수에 집중하여 유사점 구별이라는 방법을 주로 사용하는데, 이 경우 정다면체의 쌍대관계는 쉽게 인식하였다. 하지만 삼각다면체의 쌍대관계까지 인식해 낸 학생들의 경우는 한 단계 더 나아가서 입체의 이미지를 떠올리며 유사점이 과연 공간에서 어떤 형태로 나타나는지를 확인해 본 결과 공간으로 전환되는 사고는 (대상 회전), (보조선 그리기), (입체도형 일부 만들기), (입체도형 안에 입체도형 만들기)의 형태로 나타나서 시각화하게 됨을 확인하였다.

주제어: 수학영재, 정다면체, 삼각다면체, 쌍대, 시각화

I. 서 론

기하영역은 수학 교육과정에서 큰 비중을 차지하고 있지만, Gutierrez가 지적하고 있듯이 현재의 기하교육은 3차원 공간기하에 관한 연구보다는 2차원 평면기하 연구에 치중되어 있다. 이러한 현상에 대해 Freudenthal은 일방적인 평면기하 공부 3차원 대상의 도입 없이 너무 오래 지속되면 학생들의 공간능력을 사장시킬 수 있다고 경고하였다(이경화, 최남광, 송상현, 2007, p.487에서 재인용). 결국 학생들은 적절한 때에 공간에 대한 이해가 필요하다. 하지만 제대로 공간을 이해하기 위해서는 학생들이 활용하는 공간감각과 그 하위 요소에 대한 이해가 우선해야한다. 이러한 공간감각에 대하여 학자마다 다소 강조하는 내용요소가 달라서 명확하게 정립된 정의는 없다. 하지만 대부분의 연구에서 공간능력이라고 부르며 이를 공간 시각화(spatial visualization) 능력과 공간 방향화(spatial orientation) 능력으로 나눈다(한기

1) 이 글은 이진수(2013)의 석사학위논문을 발췌/요약 및 수정한 것임.
2) [제1저자] 인천 연성초등학교
3) [교신저자] 경인교대/아주대

완, 2001). 이 중 공간 시각화는 이미 오래 전부터 강조되어 왔다.

Yakimanskaya에 의하면 소련 수학자들은 기하에서 공간적 사고의 중요성을 강조하면서 시각화를 추상적인 기하 지식과 각각의 개념들을 동화시키기 위한 기초로 보고 특히 공간 시각화 능력을 강조하였다(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.277에서 재인용). 그리고 Fischbein은 시각적 이미지에 따라 생각하며 시각적으로 상상할 수 없다면 정신적으로 인식하는 것은 어렵다고 말하였다(류현아, 2008, p.4에서 재인용).

영재들에 관한 연구는 (비록 그 결과를 일반학생들에게까지 일반화할 수 없다는 단점은 있지만) 보통의 학생들에게는 익숙하지 않은 과제에 대해서도 시각화를 잘 해 낼 수 있고 별도의 수업을 진행하면서 인터뷰까지 응해 줄 수 있는 연구 대상자를 선정하기에 용이하다는 장점이 있다. 이에 본 연구는 대부분 영재학생들에게 익숙한 정다면체와 영재들에게조차 익숙하지 않은 삼각다면체의 쌍대 관계를 탐구할 때 그들은 입체도형의 구성 요소들 간의 관계를 어떻게 인식하는지, 그리고 정다면체의 쌍대 관계를 확인하는 사고의 과정 속에서 초등수학영재들은 대상을 어떻게 이미지화하면서 결과적으로는 어떤 공간 시각화 방법을 주로 사용하는지를 분석하고자 한다. 이를 통해 다면체 지도를 위한 교육적 시사점을 제안할 것이다.

위의 연구 목적을 달성하기 위한 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 초등수학영재들은 다면체의 쌍대 관계를 탐구할 때 입체도형의 구성 요소들 간의 관계를 어떻게 인식하는가?

둘째, 초등수학영재들은 정다면체의 쌍대 관계를 탐구할 때 입체도형을 어떻게 이미지화하며, 결과적으로는 어떤 공간 시각화의 방법을 주로 활용하는가?

II. 이론적 배경

1. 다면체 탐구

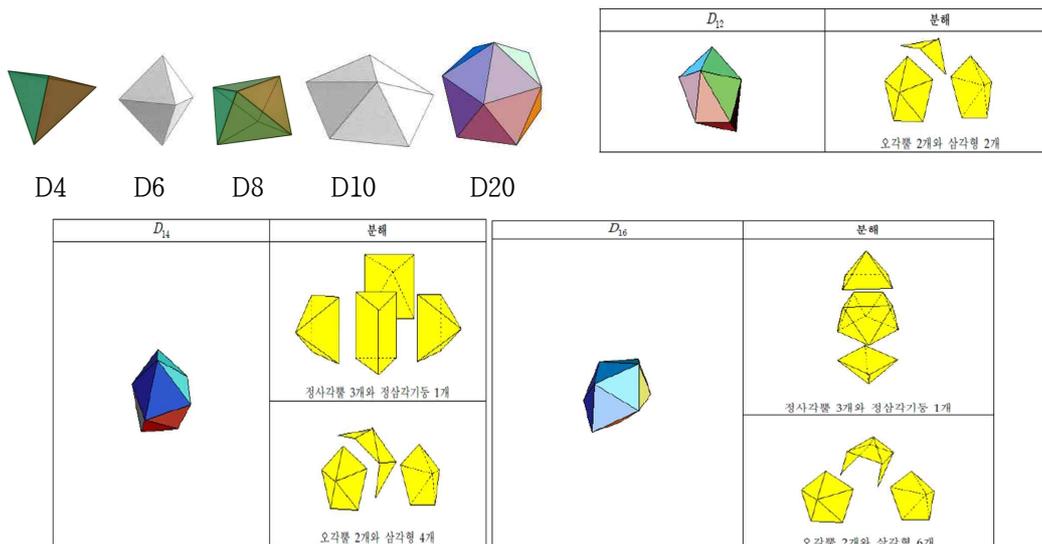
정다면체란 모든 면들이 합동인 정다각형이고 다면각들이 모두 합동인 다면체이다. 정다각형은 모든 위수에 대해 존재하지만 정다면체는 오직 다섯 개만이 존재한다. 정다면체는 각각 그것이 갖고 있는 면의 수에 따라 이름을 붙여, 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체라 부른다. 하지만 학교수학에서는 다면각이라는 정의를 사용하는 것보다 더 간편한 방법을 사용한다. 즉, 학교수학에서 사용하는 정다면체의 일반적인 정의는 다음의 3가지의 조건을 포함한다. “정다면체는 (1)모든 면들이 합동이고 (2)각 꼭짓점에 모이는 모서리(또는 면)의 개수가 같은 (3)블록다면체이다.” (고은성, 이경화, 송상현, 2008a, p.59에서 재인용).

이러한 정다면체의 각 면의 중점을 꼭짓점으로 하는 다면체는 다시 정다면체가 되는데 이러한 관계를 쌍대 관계에 있다고 한다. 두 다면체가 서로 쌍대라면 면의 수와 꼭짓점의 수는 서로 대응되며 한 면을 이루는 변의 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수도 대응되고 모서리의 수는 같게 된다. 정다면체에서 위와 같이 쌍대 관계에 있는 경우는 5가지가 있다. 정육면체와 정팔면체, 정십이면체와 정이십면체 그리고 정사면체는 자기 자신과 쌍대 관계에 있다.

<표 1> 정다면체의 구성요소

이름	면의 모양	면의 개수	꼭짓점의 개수	모서리의 개수	한 면을 이루는 면의 개수	한 꼭짓점에 모인 면의 개수
정사면체	정삼각형	4 ←→ 4	4	6	3 ←→ 3	3
정육면체	정사각형	6 ←→ 8	8	12	4 ←→ 3	3
정팔면체	정삼각형	8 ←→ 6	6	12	3 ←→ 4	4
정십이면체	정오각형	12 ←→ 20	20	30	5 ←→ 3	3
정이십면체	정삼각형	20 ←→ 12	12	30	3 ←→ 5	5

삼각다면체는 정다면체가 되기 위한 조건을 달리하여 모든 면이 서로 합동인 정삼각형이고 각 꼭짓점에 모인 면의 개수는 달라도 되는 볼록다면체를 말한다. 이러한 삼각다면체에는 8종류가 존재하고(이성현, 정인철, 2010), 정다면체 중에서 세 가지(정사면체, 정팔면체, 정이십면체)가 삼각다면체에 해당된다. 삼각다면체에서 한 꼭짓점에 모인 면은 3, 4, 5개 중 하나이다. 또한 삼각다면체에서 면의 개수는 짝수여야 한다. n개의 면을 가진 삼각다면체를 D_n 으로 표시한다. D_4 는 삼각뿔에 해당하며 D_6, D_8, D_{10} 은 삼각뿔, 사각뿔, 오각뿔에 대해 각각 하나의 밑면을 공유하도록 붙여주면 만들 수 있다. D_{12} 는 정오각뿔 2개와 두 도형 사이의 썩기 모양의 정삼각형 2개로 이루어져 있다. D_{14} 는 정사각뿔 3개와 정삼각기둥 1개로 이루어져 있다. 또는 찌그러진 정오각뿔 사이에 삼각형 4개를 끼워 넣은 것으로 볼 수도 있다. D_{16} 은 정사각뿔 3개와 정삼각기둥 1개로 이루어지거나 오각뿔 2개와 삼각형 6개로 만들 수 있다(조한혁, 2005).



[그림 1] 삼각다면체의 종류

2. 공간능력과 공간시각화

가. 공간능력

공간감각(spatial sense)과 공간능력(spatial ability)은 유사한 의미로 간주되고 있다. 공간감각은 주변 상황과 물체 사이에 대한 직관이나 감각으로 보는 것에 비해 공간능력은 공간의 대상, 관계, 변환에 대하여 정신적인 표상을 구상하고 조작하는 능력으로 정의할 수 있다. 교육을 통해 달성하고자 하는 목표가 공간에 대한 일반적인 이해능력이라고 할 때 공간능력은 공간감각을 포함하고 있는 것으로 판단된다(박지영, 송상현, 2010).

Tartre는 McGee의 공간 시각화, 공간 방향화를 좀 더 세분화하여 공간 시각화를 회전과 변환으로, 공간 방향화를 재조직된 전체, 전체와 부분으로 분류하였다. 회전은 마음속으로 임의의 물체를 회전시켰을 때, 원래의 물체와 같은지를 결정하는 것으로 2차원에서의 회전과 3차원에서의 회전이 있다. 변환은 따로 떨어진 마음속의 상들이 서로 다른 조작활동을 통하여 원하는 또 다른 상을 형성하는 것으로 2차원에서 2차원으로 변환, 2차원에서 3차원으로 변환, 3차원에서 2차원으로 변환이 있다. 재조직된 전체는 하나의 표현에서부터 전체의 조직을 구조화시키는 과정이다. 전체와 부분은 전체에서 부분 찾기와 부분들을 종합하여 알맞은 전체 생각해 내기가 있다고 하였다(유경선, 2012, p.8에서 재인용).

McGee는 공간 능력을 ‘그림 상으로 제시된 대상을 마음속으로 조작하거나 회전하거나 방향을 바꾸는 능력으로 주어진 대상을 정신적 이미지에 의하여 회전시키거나 재배열 혹은 조합시키는 능력으로 정의하고 그 하위 요인으로 시각화와 방향화를 제시하고 있다(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.278에서 재인용).

Lohman은 공간능력을 추상적인 공간 이미지를 생성하고 유지하며 교묘하게 다룰 수 있는 능력이라고 정의하였다. 그는 공간 능력을 공간 관계, 공간 방향, 공간 시각화로 구분하였다. 공간 관계란 물체나 도형을 마음속으로 회전시킬 수 있는 능력이며 공간 방향은 주어진 대상물이 실제로 그대상이 보여지는 것과 다른 공간적 조망으로부터 어떻게 나타내어질 것인가를 상상할 수 있는 능력이고 공간 시각화란 공간 관계와 공간 방향의 두 특징을 가지며 전체적인 형태를 완성시키기 위하여 한 대상물의 조각들을 심적으로 재배열하는 능력을 말한다(한기완, 2002, p.10에서 재인용).

Linn & Peterson은 공간능력을 공간지각(spatial perception), 정신적 회전(mental relation), 공간 시각화(spatial visualization)으로 구분하였다. 공간지각이란 주의를 흐르게 하는 다른 정보에도 불구하고 중력적, 운동감각적 단서를 통해 자신의 방향에 대한 공간 사이의 관계를 인지할 수 있는 능력을 말한다. 정신적 회전은 2차원 혹은 3차원의 물체를 회전하였을 때 회전 결과를 인식할 수 있는 능력이다. 그리고 공간 시각화란 주어진 공간적 정보를 머릿속에서 가시화하여 그려보고 다단계의 조작을 할 수 있는 능력이고 말하였다(신국환, 1998, p.17에서 재인용).

Thurstone은 지능이 여러 가지 능력으로 구성되어 있다고 주장한 학자이며 지능 검사 결과의 요인 분석을 토대로 일관성 있게 나타나는 7가지의 기본 정신 능력을 정리하면서 그 중 하나로 공간 요인을 제시하였다. 그는 공간 능력에는 공간 시각화(spatial visualization), 공간 관계(spatial relation), 공간 방향(spatial orientation)의 하위 요인이 포함 된다고 설명하였다(조영선, 2010, p.8에서 재인용).

나. 공간시각화

Zimmermann & Cunningham은 수학에서 시각화는 정신적으로 또는 종이나 펜으로 또는 테크놀로지로 이미지를 형성하는 과정이고 수학적으로 더 잘 이해하며 수학적 발견 과정을 자극하는 것을 목적으로 이미지를 사용하는 과정이라고 하였다(류현아, 2008, p.13에서 재인용). 이러한 관점을 바탕으로 시각적 사고란 문제를 해결하거나 이해를 확장시키기 위해 외재적 또는 내적인 시각적 표현에 근거하여 이루어지는 사고를 말한다(고은성, 이경화, 송상현, 2008b).

Gutierrez는 수학에서 시각화를 ‘정신적이든 물리적이든 시각적 또는 공간적 요소에 기초한 일종의 추론 활동’이라고 정의하였고(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.278에서 재인용), 류현아(2008)은 2차원 평면이나 3차원 공간에서 제시된 공간도형에 대하여 정신적으로 회전시키거나 재배열하여 시각적 또는 공간적 이미지를 구성하고 조정하는 것을 의미하는 것으로써 공간 이미지를 정신적으로 구성하는 것뿐만 아니라 그것을 외적으로 2차원 평면에 표현하는 것도 포함된다고 말하고 있다.

그리고 McGee는 공간시각화란 제시된 공간의 시각적 대상물을 마음속으로 조작하거나 돌리거나, 비틀거나, 뒤집는 능력이라고 말하였다. 이는 도형의 내적 부분간 이동을 한 도형, 혹은 3차원 공간에서 만들어진 대상물을 인식하고, 기억하고 회상하는 과정, 혹은 평면에서의 패턴을 접거나 펼치는 과정에 관계되는 것이다(조영선, 2010, p.9에서 재인용). 이러한 공간 시각화의 하위 요인으로는 내부의 움직임은 윤곽을 인지, 유지, 연상하는 능력과 상상의 움직임을 인지하거나 상상 속에서 대상을 조작하는 능력, 위치 변화의 관계를 상상하는 능력, 공간 패턴의 이미지를 다른 배열로 조작하거나 변형하는 능력이 있다고 말하였다(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.278에서 재인용).

또한 Del Grande은 공간 지각의 하위 영역으로 7가지를 제시하고 있는데 모든 영역이 시각적 능력에 관련된 요인에 초점을 두고 있다고 하였다. 7가지 영역은 ① 눈-운동신경의 조정 ② 그림-배경 지각 ③ 불변성 인지 ④ 위치 지각 ⑤ 공간 관계 지각 ⑥ 시각적 구별 ⑦ 시각적 상기로 분류할 수 있다. 지금부터 제시된 7가지 하위 영역에 대하여 자세히 알아보려고 한다. ① 눈-운동신경의 조정은 몸의 움직임과 시각을 상호 조정하는 능력, ② 그림-배경 지각은 교차하거나 숨겨진 모양이 있는 복잡한 배경에서 도형을 지각하는 능력, ③ 불변성 인지는 대상의 표면적인 인상이 달라도 모양이나 크기 등 불변인 속성을 인지하는 능력, ④ 위치 지각은 공간 대상과 자신을 연결하는 능력, ⑤ 공간 관계 지각은 2개 이상의 대상을 대상 중 하나와의 관계로 또는 대상들 상호간의 관계로 보는 능력, ⑥ 시각적 구별은 대상들의 유사점과 차이점을 구별하는 능력, ⑦ 시각적 상기는 보지 않고 대상을 정확하게 회상하는 능력, 보거나 보지 않으면서 그 대상의 특징을 다른 대상의 특징과 연결하는 능력을 말한다고 하였다(류현아, 2008, p.15에서 재인용).

III. 연구의 절차와 방법

1. 연구 과제

본 연구에서는 수학영재들이 입체도형의 구성요소와 그 사이의 관계를 이해하고 그 바탕으로 쌍대 관계에 있는 도형을 찾을 수 있는지 파악하며 쌍대 관계를 탐구할 때 나타나는

다양한 공간 시각화 방법을 살펴보고자 한다. 이를 위해서는 시각적 사고가 다양하고 쉽게 관찰될 수 있는 연구 과제로 정다면체와 삼각다면체의 쌍대 관계 탐구를 연구 과제로 활용하고자 한다.

첫 번째 연구과제는 입체도형의 구성요소 사이 관계의 이해 정도에 따라서 다면체 쌍대 관계를 찾는 과정에서 끼치는 영향을 확인하는 과제이다. 두 번째 연구과제는 정다면체의 쌍대 관계를 탐구할 때 학습목표를 성공적으로 도달한 학생들이 활용한 공간 시각화 방법의 차이를 알아보는 과제이다. 자세히 살펴보면 <표 2>와 같다.

<표 2> 연구과제에 대한 내용 및 자료 제시 방법

문제상황		제시내용	자료 제시 방법
연구 과제 1	활동 1-1	정육면체와 정팔면체의 쌍대 관계 찾기	점선 겨냥도(3D-2D)
	활동 1-2	정십이면체와 정이십면체의 쌍대 관계 찾기	글
	활동 1-3	정다면체의 구성요소 찾고 관계 알아보기	점선 겨냥도(3D-2D)
	활동 2-1	삼각다면체의 쌍대 관계 찾기	실선 겨냥도(3D-2D)
	활동 2-2	삼각다면체의 구성요소 찾고 관계 찾아보기	
연구 과제 2	활동 1-1	정육면체와 정팔면체의 구성요소 찾기	실선 겨냥도(3D-2D)
	활동 1-2	정육면체와 정팔면체의 구성요소 관계 찾기	
	활동 2-1	정육면체→정팔면체 만들기	조노돔(3D-2D)
	활동 2-2	정팔면체→정육면체 만들기	
	활동 2-3	정육면체와 정팔면체의 관계 찾기	
	활동 2-4	정팔면체→정육면체 과정 불필요한 요소 찾기	
	활동 3-1	정십이면체→정이십면체 만들기	점선 겨냥도(3D-2D), 전개도(2D-2D)
	활동 3-2	정이십면체→정십이면체 만들기	
활동 3-3	정십이면체와 정이십면체의 관계 찾기		

2. 연구 대상자

본 연구의 대상자는 인천지역의 S초등학교 지역공동 발명영재학급 초등학생 6학년 17명, 서울지역 G교육청 영재교육원 초등학생 6학년 20명, 인천지역 Y초등학교 단위학교 영재학급 초등학생 6학년 9명, 인천지역 G초등학교 지역공동 영재학급 초등학생 6학년 14명이다. 총 4개 학급 60명이 연구에 참여하였으며 이 중 12명의 인터뷰 및 활동지를 자세히 분석하였다.

첫째로 이들 중 구성 요소 사이 관계의 이해 정도에 따른 다면체 쌍대 관계 이해에 대한 연구 과제에는 인천지역의 S초등학교 지역공동 발명영재학급에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 17명과 서울지역 G교육청 영재교육원에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 20명을 대상으로 문제 해결과정을 관찰하였다. 37명의 학생들이 활동한 탐구 과정

및 결과를 바탕으로 구성요소 사이 관계의 이해가 쌍대 관계에 영향을 끼치는 여부를 확인할 수 있었다. 추가로 인천지역의 S초등학교 지역공동 발명영재학급에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 2명과 서울지역 G교육청 영재교육원에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 2명의 학생에 대해서는 개인적 사고특성을 질적으로 분석하여 구성요소 인식 과정을 확인하고 활동지 내용을 사례로 제시하였다.

둘째로 정다면체 쌍대 관계를 탐구할 때 학생들이 사용한 공간 시각화 방법을 확인하고 이를 유형화하여 분석하는 연구과제에는 인천지역의 G초등학교 지역공동 영재학급에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 14명, 인천지역의 Y초등학교 단위학교 영재학급에서 영재교육을 받고 있는 초등학교 6학년 9명을 대상으로 문제 해결과정을 관찰하였다. 선정하기에 앞서 두 영재학급 20명의 학생인 총 40명의 학생들을 대상으로 정다면체 쌍대 관계를 탐구하는 활동을 실시하였다. 하지만 이들 중 17명의 학생은 제시된 문제 상황에서 정다면체의 쌍대 관계에 있는 도형을 발견하지 못하였다. 그래서 위에서 말한 쌍대 관계를 발견한 23명의 학생들에 대한 공간 시각화 사고 방법을 분석하고자 하였고 이에 연구 대상자를 다음과 같이 선정하였다. 또한 그들 중 G초등학교 지역공동 영재학급 학생 4명, Y초등학교 단위학교 영재학급 학생 4명의 활동지, 활동장면, 인터뷰 등을 활용하여 학생들이 활용한 공간 시각화 요소를 더 자세히 분석하고자 하였다.

<표 3> 연구 대상자와 인터뷰 대상자

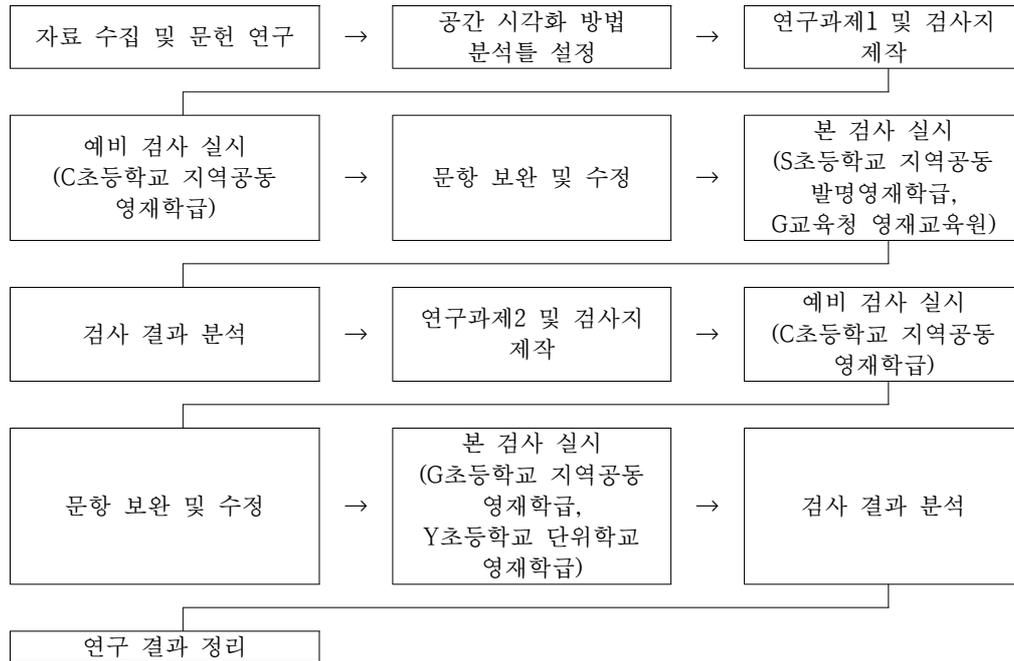
소 속	인원	인터뷰 학생(코드)	소속 학급 내 학업 성취수준
서울 G교육청 영재교육원	20명	A-DH	최상
		A-JY	상
인천 S초등학교 지역공동 발명영재학급	17명	B-SM	상
		B-JH	중
인천 G초등학교 지역공동 영재학급	14명	D-SH	상
		D-YC	상
		D-YE	중상
		D-CH	중상
인천 Y초등학교 단위학교 영재학급	9명	C-CH	상
		C-YJ	상
		C-SY	중상
		C-SC	중상
4개 학급	60명	12명	

3. 연구 절차

본 연구의 자료 수집과 분석은 다음의 절차에 따라서 진행되었다. 문헌 연구를 통하여 공간 시각화 능력에 대한 자료를 수집하고 공간 시각화 방법에 대한 여러 학자들의 견해를 분석하였다. 분석한 내용을 바탕으로 공간 시각화 방법 분석틀을 설정한 후 다면체의 쌍대

관계 탐구 과정을 통하여 입체도형의 구성요소 사이의 관계를 어떻게 인식하는지 알아보기 위한 과제에 알맞은 검사지를 제작하고 예비검사를 통하여 문항을 점검한 후 수정, 보완하여 본 검사를 실시한다. 또한 연구문제 2를 해결하기 위한 검사지를 제작한 후 예비검사를 실시하여 부족한 부분을 수정, 보완하고 그 결과를 바탕으로 결론을 도출하고자 한다.

<표 4> 연구 절차



4. 자료 분석 방법

본 연구에서는 정다면체의 쌍대를 탐구할 때 나타나는 공간 시각화 방법을 <표 5>와 같이 나타내었다. 이 분석 방법은 Gutierrez가 말한 시각화란 정신적이든 물리적이든 시각적 또는 공간적 요소에 기초한 일종의 추론 활동이라는 점(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.278에서 재인용)을 기초로 하고 류현아(2008)가 말한 공간 시각화란 공간 이미지를 정신적으로 구성 및 외적으로 2차원 평면에 표현하는 것이라는 내용을 기본으로 분석하고자 한다. 또한 McGee가 공간 시각화의 하위요인으로 말한 내부의 움직이는 윤곽을 인지, 유지, 연상하는 능력, 상상의 움직임을 인지하거나 상상 속에서 대상을 조작하는 능력, 위치 변화의 관계를 상상하는 능력, 공간 패턴의 이미지를 다른 배열로 조작하거나 변형하는 능력도 분석에 고려하였고(류현아, 정영옥, 송상현, 2007, p.281에서 재인용), Del Grande가 말한 공간 시각의 하위 영역 중 그림-배경 지각, 위치 지각, 공간 관계 지각, 시각적 구별, 시각적 상기(류현아, 2008)에 대한 부분도 고려해 보았다. 여러 학자들의 공간 시각화의 하위요인에 대한 분석을 기초로 하고 류현아(2008)가 말한 공간 시각화 능력을 바탕으로 시각적 구별, 차원 변환, 그림-배경 지각, 위치지각, 새롭게 만드는 능력, 패턴 변형 및 재배열하는 능력으로 공간 시각화의 방법을 선정하였다. 자세한 학생들의 공간 시각화 사고를 분석하기 위하여 학생들이 작성한 활동지, 인터뷰 내용, 연구자의 수업 관찰 기록지를 활용하였다.

<표 5> 공간시각화의 정의와 시각화 방법

정의	정신적이든 물리적이든 시각적 또는 공간적 요소에 기초한 일종의 추론 활동		
변환	시각적 구별	유사점과 차이점을 구별하여 변환	시각적으로 보거나 상상하여 대상의 특징 및 대상 사이의 관계 변화를 파악하는 것
	차원변환	공간도형 차원의 변환 하는 것	
지각	그림-배경 지각	복잡한 배경에서 지각하는 것	내부의 움직이는 윤곽을 인지, 유지, 연상하는 것
	위치 지각	대상 또는 학습자의 상대적 위치 변화	
변형	새롭게 만드는 능력	정신적으로 상상하거나 조작하여 새로운 도형을 만드는 것	기존 도형의 틀 안에서 비틀거나 조작하여 형태를 변화시키는 것
	패턴 변형 및 재배열 능력	공간 패턴의 이미지를 다른 배열로 조작하거나 변형	

IV. 연구 결과

1. 구성요소 사이 관계의 이해 정도에 따른 다면체 쌍대 관계 이해

G교육청 영재교육원 초등학교 6학년 학생 19명과 S초등학교 지역공동 발명영재학급 6학년 학생 15명이 정다면체의 쌍대 관계에 있는 도형이 어떤 도형인지 인식하였다. 물론 34명의 학생 중 삼각다면체의 쌍대 관계를 탐구하지 못한 학생도 있지만 그 학생들은 어떤 도형이 쌍대 관계에 있는지 이해하지 못하는 것이 아니라 삼각다면체라는 생소한 도형을 머릿속으로 떠올리지 못하여서 탐구하지 못한 것으로 판단된다. 이에 연구과제1에서는 다면체의 쌍대 관계 탐구에 성공한 34명의 학생을 바탕으로 구성요소들 간의 관계 이해 정도가 삼각다면체 쌍대 관계 이해에 얼마나 많은 영향을 끼치는지 알아보려고 한다.

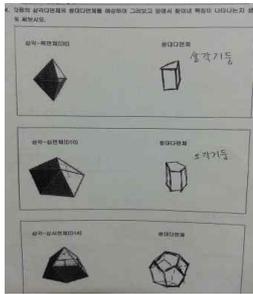
다면체의 쌍대 관계를 인식해 낸 34명의 학생들의 활동지 분석을 토대로 수학영재학생들이 구성요소를 정확히 파악하고 그 파악한 내용을 바탕으로 다른 구성요소와의 관계를 이해하고 있는지 파악하고자 하였다. 특히 성취도 수준이 서로 다른 S초등학교 지역공동 발명영재학급 학생 2명, G교육청 영재교육원 학생 2명은 더 자세한 분석을 하고자 질적 분석을 실시하였다.

첫째, 정다면체의 쌍대 관계를 탐구할 때, 한 학급에는 입체도형들의 구성요소를 정리한 표까지는 제공하지 않고 정육면체와 정팔면체의 그림만 제공한 후 “각 면의 중심을 서로 연결하면 어떤 다면체가 만들어질 것인가?” 라는 물음을 던져서 예상한 내용을 그림으로 표현할 수 있도록 설계하였다. 그리고 정십이면체의 경우도 똑같은 방법으로 연결하면 어떤 입체도형이 나올지 알아보는 과정도 추가하여서 정다면체의 쌍대 관계를 학생들이 파악할 수 있는지에 대하여 파악하고자 하였다. 다른 학급에는 정다면체의 쌍대 관계를 탐구하고자 하는데 있어서 구성요소들 사이의 관계를 알고 있는 것이 쌍대 관계 탐구에 어떤 영향을 미치는지를 파악하기 위하여 입체도형별 구성요소를 파악할 수 있도록 학생들에게 표의 형태로 제시하였다. 표를 미리 제시한 경우는 구성요소들의 개수에만 주목하므로 도형의 이미지를 시각화하는데 방해 요소로 작용하기도 하였다.

둘째, 익숙한 정다면체와는 달리 익숙하지 않은 삼각다면체의 쌍대 관계를 찾는 마지막 문제의 경우 이미지를 시각화하기 어려우므로 쌍대 관계의 탐구를 위해서는 입체 도형의 구성요소들부터 파악하여 할 수 있도록 표의 구성도 조금 달리하여 제공하였다. 즉, 삼각다면체는 서로 다른 면의 종류를 가지고 있으므로 면의 구성하는 도형의 종류에 따른 면의 수를 따로 분류하는 것이 학생들의 올바른 이해를 확인할 수 있다고 생각하여서 면의 개수를 삼각형, 사각형, 오각형이 각각 몇 개인지 확인할 수 있도록 표를 구성하였고 합계란을 만들어서 삼각다면체에서 전체 면의 개수도 눈에 띄 수 있도록 칸을 나누어서 구성요소 사이의 관계에서 연관성을 찾을 수 있도록 구성하였다.

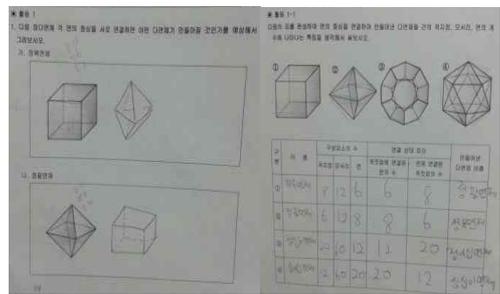
가. 쌍대 관계 탐구 과정에서 학생들이 보인 구성요소 인식 유형

학생 A-DH의 8명의 학생들은 주어진 정다면체와 삼각다면체의 모든 입체도형에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였다. 그리고 4개의 정다면체와 3개의 삼각다면체에 대한 ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수의 관계 파악과 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수 모두를 정확하게 기입하였다. 특히 학생 A-DH의 경우 구성요소를 정확하게 찾아내었다. 먼저 정다면체 쌍대 탐구를 정확하게 이루어내었다. 정육면체의 겨냥도(3D/2D)가 그려진 도형 옆에 각 면의 중점을 연결하여 정팔면체를 정확하게 그리고 정팔면체라는 이름까지 기록하였다. 또한 정팔면체의 경우도 마찬가지로 정육면체를 정확하게 그리고 이름도 정육면체라고 정확하게 기록하였다. 정다면체의 마지막 탐구문제인 정십이면체를 글로 제시하였을 때 정이십면체라고 말로 표현하였다. 이런 점에 비추어 보았을 때 정다면체의 쌍대 관계에 있는 도형을 정확하게 답하였다고 할 수 있었다. 학생 A-DH는 정다면체와 마찬가지로 삼각다면체의 쌍대 관계도 정확하게 찾았다. 삼각육면체의 그림 옆에 삼각기둥을 그림으로 그리고 이름도 구체적으로 적었다. 또한 삼각십면체의 그림 옆에도 쌍대 관계에 해당하는 것이 오각기둥임을 알고 그렸다. 마지막으로 삼각십사면체의 경우 그림으로 그려서 정확하게 표현하였다. 학생 A-DH의 경우 그림으로 표현하였지만 그림을 그리기 쉽지 않아 다른 학생의 경우는 오각형 6개, 사각형 3개로 구성된 입체도형이라고 글을 적었다. 이 도형들이 어떻게 모여 있는지에 대한 질문에 정확하게 표현하였다. 다만 그림으로 표현하기는 어려워서 글로 표현했다고 말하였다.



[그림 2] A-DH 학생의 활동지

구분	정다면체	쌍대	정다면체	쌍대	정다면체	쌍대	정다면체	쌍대
꼭짓점	4	5	6	8	12	20	30	40
모서리	6	9	12	18	24	30	36	42
면의 수	4	3	6	8	12	20	30	40
면의 종류	사각형	삼각형	사각형	삼각형	사각형	삼각형	사각형	삼각형



[그림 3] B-SM 학생의 활동지

학생 A-JY의 17명의 학생들은 비록 주어진 정다면체에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였지만 삼각다면체의 경우는 이와는 다른 모습을 보였다. 삼각다면체 중에서 삼각육면체와 삼각십면체의 경우 입체도형에 대한 쌍대 관계에 있는

도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였다. 하지만 유독 삼각-십사면체의 경우에는 어려움을 표현하였다. 삼각-십사면체의 쌍대 관계에 있는 도형을 그리는 곳에는 빈 칸으로 남아있거나 올바르게 그린 칠각기둥의 모습을 그린 학생도 있었다. 또는 이런 저런 모습의 입체도형을 그려본 흔적만이 남아있는 학생도 존재하였다. 4개의 정다면체에 대한 ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수의 관계 파악과 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수는 모두를 정확하게 기입하였다. 그리고 삼각다면체 중에서 삼각-육면체, 삼각-십면체의 경우에 해당하는 구성요소도 모두 정확하게 찾았다. 하지만 삼각-십사면체의 구성요소의 경우 일부의 구성요소에 대하여 올바른 답을 찾았지만 또 다른 구성요소에 대하여는 제대로 된 구성요소의 개수를 파악하지 못하고 그 관계를 제대로 인식하지 못하였다. 그래서 삼각-십사면체의 구성요소에 대한 이해도는 알고는 있으나 정확하지 않은 이해로 판단하는 것이 옳바르다고 여겼다.

학생 B-SM의 4명의 학생들은 주어진 정다면체에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였다. 하지만 삼각다면체의 경우는 이와는 다른 모습을 보였다. 삼각-육면체와 삼각-십면체는 입체도형에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였지만 삼각-십사면체는 쌍대 관계에 있는 도형을 찾지 못하였다. 특히 학생 B-SM의 경우 정다면체 쌍대 탐구는 앞서 다른 학생들과 마찬가지로 정확하게 이루어내었다. 정십이면체의 쌍대 관계에 대하여도 정확하게 파악하였다. 하지만 구성요소에 대한 부분은 앞에서 말한 학생들과 조금 달랐다. 주어진 정다면체의 ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수의 관계에 대하여 제대로 이해하였다고 판단하였다. 하지만 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수관계는 정확하게 알지 못하였다. 하지만 묻고 답하는 과정에서 완벽히 이해하지 못한 것이 아니라 어느 정도의 이해가 되었음을 알 수 있었고 이러한 이해를 바탕으로 정다면체의 쌍대 관계를 찾을 수 있었던 것으로 생각된다. 하지만 삼각다면체에서는 대부분의 구성요소를 잘 찾았으나 정다면체의 구성요소를 확인할 때와 비슷하게 몇몇 구성요소를 잘못 기재하였다. 이런 점에서 볼 때 어느 정도 구성요소를 파악하고 있으나 완벽하게 알고 있지는 못한 것 같다. 그럼에도 불구하고 이번에도 삼각다면체의 쌍대 관계에 해당하는 도형의 그림을 정확하게 그렸다. 하지만 삼각-십사면체에 대한 구성요소는 제대로 이해하지 못하였고 삼각-십사면체의 경우 쌍대 관계를 찾지 못하였다.

학생 B-JH의 1명의 학생들은 주어진 정다면체에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 정확하게 표현하였고 정다면체의 모든 구성요소를 정확하게 기록하였다. 하지만 모든 삼각다면체에 대한 쌍대 관계에 있는 도형을 그림 또는 글로 전혀 표현하지 못하였으며 구성요소도 제대로 찾아내지 못하였다. 주어진 정다면체의 ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수와 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수 모두를 정확하게 기록하였다. 하지만 삼각다면체의 탐구 과정에서는 구성요소를 전혀 파악하지 못하였고 삼각다면체에서 쌍대 관계에 있는 어떠한 도형도 제대로 표현하지 못하였다.

나. 구성요소 인식 정도에 따른 쌍대 관계 이해정도 분석

다면체 쌍대 관계를 탐구에 필요한 구성요소의 수는 앞에서 말한바와 같이 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수, 한 면을 이루는 꼭짓점의 수가 존재하며 본 연구의 연구문제1에서는 위의 5가지 요소를 일차적으로 판단하여 파악할 수 있는 ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수와 한 눈에 보이지는 않지만 구성요소 사이의 관계를 이해

함에 있어서 꼭 필요한 요소인 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수로 구분하여 분석하였다.

구성요소에 대한 분석결과는 위의 2가지 구성요소를 각각 정확하게 이해하고 있는지 ○, 알고는 있으나 정확하지 않게 이해하고 있는지 △, 전혀 정확하지 않은 이해를 하고 있는지 ×에 따라 다음의 기호로 학생들의 이해정도를 구분하였다.

정다면체 쌍대를 탐구할 때는 다음과 같은 결과가 나타났다. 면, 꼭짓점, 모서리 개수를 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대하여 이해하는 학생은 당연히 그 관계를 정확하게 이해하고 그렸다. 하지만 면, 꼭짓점, 모서리 개수의 비교만 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 완벽하지 않은 학생의 경우와 그 반대의 경우에 제시된 정다면체의 쌍대에 해당하는 도형을 알고 그릴 수 있는 학생이 존재하였다. 이는 앞에서 이야기한 모든 구성요소인 5가지를 알아야 다면체의 쌍대 관계를 파악할 수 있지만 정다면체의 경우 규칙적으로 패턴이 반복되는 경향이 있기 때문에 비록 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 부족하더라도 쌍대 관계를 찾는데 어려움이 없는 학생이 있었던 것으로 판단된다. 물론 구성요소에 대하여 제대로 된 이해가 전혀 없었던 학생은 비록 정다면체가 규칙성이 있다고는 하나 쌍대 관계에 있는 도형을 탐구하지 못하였다.

삼각다면체 쌍대를 탐구할 때는 다음과 같은 결과가 나타났다. 처음에는 정다면체와 비슷한 결과가 나타났다. 삼각다면체 쌍대를 탐구할 때 면, 꼭짓점, 모서리 개수를 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대하여 이해하는 학생은 삼각다면체의 쌍대인 도형을 정확히 그렸다. 그리고 면, 꼭짓점, 모서리 개수의 비교만 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 완벽하지 않지만 어느 정도 이해하고 있는 학생 또는 그 반대의 구성요소만을 이해한 학생들은 삼각다면체의 쌍대에 해당하는 도형을 표현하였다. 하지만 면, 꼭짓점, 모서리 개수와 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 모두 되지 않았던 학생은 쌍대 관계를 찾는데 어려움을 호소하였다.

삼각-십사면체 쌍대를 탐구할 때는 정다면체, 삼각다면체와는 다른 결과가 나타났다. ① 꼭짓점, 모서리, 면의 수와 ② 한 면을 이루는 꼭짓점의 수, 한 꼭짓점에 모인 면의 수 모두를 정확하게 이해한 학생은 당연히 삼각-십사면체의 쌍대를 탐구하는데 성공하였다. 하지만 면, 꼭짓점, 모서리 개수의 비교만 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 완벽하지 않지만 어느 정도 이해하고 있는 학생 또는 그 반대의 구성요소만을 이해한 학생들은 제대로 삼각-십사면체의 쌍대에 해당하는 도형을 표현하지 못하였다. 이러한 이유는 앞서 탐구한 정다면체와 삼각다면체에서는 그림으로 한 눈에 입체도형의 모양을 떠올릴 수 있었지만 이 입체도형의 경우는 모양을 떠올리기에 어려운 도형이었기 때문에 이 도형의 경우 구성요소를 정확하게 파악한 학생만이 그림으로 표현하였고 그렇지 못한 학생의 경우 쌍대 관계를 제대로 찾지 못하였다. 또한 정다면체와는 달리 불규칙하게 반복되는 패턴이 존재한 것 또한 학생들이 쉽게 답을 찾지 못하는 이유가 된 것 같다.

앞에서 자세히 설명한 집단별 학생들에 따른 쌍대 관계 발견여부와 입체도형 구성요소 사이의 관계 이해 여부의 관계는 다음의 표에 제시된 질적 사례를 연구한 4명의 학생이 탐구한 결과와 같다.

<표 6> 쌍대 관계 발견 여부와 구성요소 관계 이해 정도

구 분	정다면체			삼각다면체		
	쌍대 관계 발견	구성요소 이해		쌍대 관계 발견	구성요소 이해	
		면, 꼭짓점, 모서리	한 면을 이루는 꼭짓점, 한 꼭짓점에 모인 면		면, 꼭짓점, 모서리	한 면을 이루는 꼭짓점, 한 꼭짓점에 모인 면
A-DH	○	○	○	○(○)	○(○)	○(○)
A-JY	○	○	○	○(×)	○(△)	○(△)
B-SM	○	○	△	○(×)	△(×)	△(×)
B-JH	○	○	○	×(×)	×(×)	×(×)

※ 정확한 이해 ○, 알고는 있으나 정확하지 않은 이해 △, 정확하지 않은 이해 ×
 ※ 삼각다면체 ()안의 내용은 삼각-십사면체 탐구에 해당함.

2. 쌍대 관계 탐구과정에서 활용하는 공간시각화 방법 분석

연구대상자 중 23명(G초등학교 지역공동 영재학급 14명, Y초등학교 단위학교 영재학급 9명)의 학생이 정다면체를 제시하였을 때 그림을 통하여 그 정다면체의 쌍대 관계에 있는 정다면체를 찾고 서로 쌍대 관계가 있다는 것을 발견하였다. 이에 본 연구에서는 정다면체의 쌍대 관계 탐구과정에서 학생들이 사용한 공간시각화 방법을 분석하기 위하여 쌍대 관계 탐구에 성공한 학생 23명(G초등학교 지역공동 영재학급 14명, Y초등학교 단위학교 영재학급 9명)만을 대상으로 활용한 공간 시각화 방법에 대한 사고를 분석하고자 한다.

가. 정다면체 구성요소 관계 탐구에서 공간시각화 방법 분석

활동 1-1에서는 정육면체와 정팔면체의 실선 겨냥도(3D-2D)를 제시하고 입체도형의 구성요소를 제대로 인식하는지 확인하는 문제이다. 활동 1-2에서는 구성요소 인식을 바탕으로 정육면체와 정팔면체 사이의 관계를 그림, 글, 표 등 자신이 원하는 다양한 방법으로 나타내도록 하여서 학생들의 사고를 보려고 하였다. 이에 모든 활동지 문항에 대한 사고 분석은 활동지와 인터뷰한 내용을 바탕으로 이루어졌다. 정다면체 구성요소 관계 탐구 상황에서 학생들이 활용한 공간 시각화 방법은 아래의 표와 같다.

<표 7> 정다면체 구성요소 관계 탐구에 성공한 학생들이 활용한 시각화 방법

공간 시각화 방법		활동 1-1			활동 1-2		
성취수준		○	△	×	○	△	×
시각적 구별	유사점 구별				13	8	
	차이점 구별					2	
차원 변환	3D-2D(겨냥도) → 3D				1		
	3D-2D(겨냥도) → 2D-2D(전개도)						
	3D → 3D-2D(겨냥도)				5		
	3D → 2D-2D(전개도)						

	2D-2D(전개도) → 3D					
	2D-2D(전개도) → 3D-2D(겨냥도)					
그림-배경지각	그림-배경지각	22	1			
위치지각	자신 회전					
	대상 회전				3	
새롭게 만드는 능력	보조선 그리기				3	
	입체도형 일부 만들기				1	
	입체도형 안에 입체도형 만들기				2	
패턴변형 및 재배열	패턴 변형					
	패턴 재배열	6			1	

(G지역공동, Y단위학교영재학급 23명 대상)

※ 옳은 사고 ○, 미심쩍은 사고 △, 시도는 하였으나 틀린 사고 ×
 [참고] 공간시각화의 용어에 대한 설명은 <표 5>를 참조바람.

다양한 학생들의 사고과정을 보았을 때 일반적인 학생들은 구성 요소들의 개수에 집중하여 유사점 구별이라는 방법을 주로 사용하지만 일부의 학생들은 한 단계 더 나아가서 공간을 떠올리며 유사점이 과연 공간에서 어떤 형태로 나타날지 생각을 해본다고 하였다. 보통 이런 공간으로의 전환되는 사고는 (대상회전), (보조선 그리기), (입체도형 일부 만들기), (입체도형 안에 입체도형 만들기)의 형태로 나타나서 시각화 하게 된다.

나. 정육면체와 정팔면체의 쌍대 탐구에 대한 공간시각화 방법분석

정육면체와 정팔면체의 쌍대 탐구에서 활동 2-1에서는 정육면체로부터 어떻게 정팔면체로 만들 수 있는지를 찾아서 그림, 글 등 다양한 방법으로 표현해 보도록 하는 문제이다. 활동 2-2번은 2-1번과는 내용면에서 유사하지만 자료 제시방법에서 차이를 보인다. 정팔면체로부터 정육면체를 어떻게 만들 수 있을지를 나타내는 문제인데 그림이나 어떠한 다른 조건을 제시하지 않고 활동 2-1로부터 학생들이 유추할 수 있도록 문제를 구성하였다. 그리고 활동 2-3번 문제의 경우에는 앞선 2가지 문제에서 학생들이 알게 된 내용이 무엇인지 표현해 볼 수 있는 기회를 제공하고 마지막으로 2-4번 문제의 경우 조노돔으로 정팔면체로부터 정육면체의 쌍대를 찾을 때 발생할 수 있는 현상을 그림으로 제시하여 쌍대 관계를 찾는 과정에서 불필요한 구성요소를 인식하는지 여부와 어떻게 판단하고 있는지를 확인하려고 문제를 구성하였다. 정육면체와 정팔면체의 쌍대 탐구 상황에서 학생들이 활용한 공간 시각화 방법은 아래의 표와 같다.

<표 8> 정육면체와 정팔면체의 쌍대 탐구에 성공한 학생들이 활용한 시각화 방법

공간 시각화 방법		활동 2-1			활동 2-2			활동 2-3			활동 2-4		
성취수준		○	△	×	○	△	×	○	△	×	○	△	×
시각적 구별	유사점 구별	4			9			16	4				
	차이점 구별												
차원 변환	3D-2D → 3D	20			3	1		1	1		4		

	3D-2D → 2D-2D	3	1								
	3D → 3D-2D	10		15	5		7	1	2		
	3D → 2D-2D			1			2				
	2D-2D → 3D	3									
	2D-2D → 3D-2D										
그림-배경지각	그림-배경지각								16	3	1
위치지각	자신 회전	2		1	1		2				
	대상 회전	19		11	3						
새롭게 만드는 능력	보조선 그리기	19		13	6						
	입체도형 일부 만들기	5		3							
	입체도형 안에 입체도형 만들기	4		4	1		7	1			
패턴변형 및 재배열	패턴 변형	1		1							
	패턴 재배열	4		2							

(G지역공동, Y단위학교영재학급 23명 대상)

※ 옳은 사고 ○, 미심쩍은 사고 △, 시도는 하였으나 틀린 사고 ×

여러 가지 활동 중 문제 2-1의 상황을 살펴보고자 한다. 문제 2-1에서 학생 전원이 조노돔 겨냥도(3D-2D)를 보고 자신의 머릿속에서 입체도형(3D)을 상상하여서(3D-2D → 3D) 문제를 해결하였다. 떠올린 입체도형을 통하여 여러 가지 시각화 방법을 활용하여서 시도를 해보고 자신이 탐구한 내용을 표현하고자 하였다. 10명에 해당하는 절반 정도의 학생들은 자신이 상상한 3차원 도형(3D)을 겨냥도의 형태로(3D → 3D-2D) 나타내고자 하였다. 그리고 3명의 학생들은 일반적인 학생들이 시도하는 겨냥도 형태가 아닌 차원 변환 중에서 (3D-2D → 2D-2D) 사고를 활용하여 평면으로 표현하고자 하였다. 대다수의 학생인 19명이 사용한 방법은 바로 새롭게 만드는 능력 중 (보조선 그리기) 사고를 활용한 방법이다. 조노돔으로 구성된 그림을 통하여 정육면체의 면의 중심에 정팔면체의 꼭짓점이 부딪혀 있는 모습을 보게 되고 단순히 한 개의 꼭짓점과 면이 만나고 있는 상황이 아니라는 것을 파악하게 된다. 그래서 (대상 회전)의 방법을 통하여 그림으로 표현된 정육면체 안에 정팔면체가 있는 사진을 돌려서 확인해보는 방법으로 문제를 해결하게 된다. 4명의 학생들을 위와 같이 각 면의 중심에 점을 찍고 연결해보는 활동을 생각하여 시도하다가 굳이 모든 면과 점을 연결하지 않아도 된다는 사실을 깨닫게 된다. 그래서 모든 면에 적용시키는 것이 아니라 일부의 면이나 꼭짓점에 적용하여 패턴을 재배열하면 전체에도 똑같이 적용된다는 사실을 통하여 문제를 해결하고자 하였다.

다. 정십이면체와 정이십면체의 쌍대 탐구에 대한 공간시각화 방법 분석

문제 3-1과 문제 3-2의 경우에는 정십이면체는 위에서 바라본 겨냥도의 모습으로 문제가 제시되었고 정이십면체는 전개도 형태로 제시되었다. 내용을 확인하자면 활동 3-1번은 정십이면체로부터 정육면체와 정팔면체의 쌍대 탐구에서 찾은 방법을 활용하면 어떤 도형이 나올지 찾아보고 이를 그림, 글 등의 방법으로 나타내게 문제를 구성하였다. 그리고 활동 3-2번의 경우는 정이십면체로부터 활동 2에서 찾은 방법을 활용하면 어떤 도형이 나올

지 찾아보고 이를 그림, 글 등의 방법으로 나타낼 수 있게끔 문제를 구성하였다. 마지막으로 문제 3-3번은 활동 3-1, 3-2로부터 찾은 정십이면체와 정이십면체 사이의 관계를 표현하도록 하였다. 이러한 문제 구성에 대한 학생들이 활용한 공간 시각화 방법은 아래의 표와 같다.

<표 9> 정십이면체와 정이십면체의 쌍대탐구에 성공한 학생들이 활용한 시각화 방법

공간 시각화 방법		활동 3-1			활동 3-2			활동 3-3		
성취수준		○	△	×	○	△	×	○	△	×
시각적 구별	유사점 구별	6	1		6			12	2	
	차이점 구별									
차원 변환	3D-2D → 3D	9	1	2	8	1	2			
	3D-2D → 2D-2D									
	3D → 3D-2D									
	3D → 2D-2D							1		
	2D-2D → 3D		5	4	5	5	4			
	2D-2D → 3D-2D									
그림-배경지각	그림-배경지각									
위치지각	자신 회전	4			3					
	대상 회전	3			2			1		
새롭게 만드는 능력	보조선 그리기	7	2		4	2				
	입체도형 일부 만들기	7			6	1		1		
	입체도형 안에 입체도형 만들기	1	1	1	2			1		
패턴변형 및 재배열	패턴 변형				1			1		
	패턴 재배열	7			5	1				

(G지역공동, Y단위학교영재학급 23명 대상)

※ 옳은 사고 ○, 미심쩍은 사고 △, 시도는 하였으나 틀린 사고 ×

학생들이 사용한 여러 가지 시각화 방법을 소개하고자 한다. 한 가지 방법으로는 시각적 구별 중 (유사점 구별) 방법을 활용하여 6명이 문제를 해결하였다. 위와 같이 (유사점 구별) 방법을 활용한 학생은 문제 3-1과 문제 3-2 모두에서 같은 방법을 활용하여 문제를 해결하고자 하였다. 다른 방법으로 문제를 해결한 학생들은 정십이면체 겨냥도 그림에 초점을 맞추어서 사고하였다. 차원 변환 중 (3D-2D → 3D)를 사용하여 머릿속으로 비교적 떠올리기 쉬운 정십이면체를 생각하였다. 그리고 그 방법을 바탕으로 위치 지각을 활용하여 3명의 학생은 (대상 회전)을 시도하였다. 또 다른 학생들은 규칙성에 따라 재배열 될 것으로 생각한 경우도 많았다. A의 경우 면 3개만 생각하여 삼각형이 만들어 똑같은 패턴으로 반복되면 입체도형이 완성될 것이라 생각하였다. 또 B 도형의 경우 전개도에서 5개의 면이 모여서 만난다는 부분을 착안하여 오각뿔 형태가 반복되는 도형을 찾는 방법으로 문제를 해결하기도 하였다.

V. 결 론

본 연구를 통해 얻은 결과를 바탕으로 얻은 교육적 시사점을 결론으로 대신하고자 한다.

첫째, 입체도형의 구성요소에 대한 인식 여부나 정도는 다면체의 쌍대 관계를 탐구함에 있어서 중요한 요소이다. 도형이 복잡할수록 시각화보다는 구성요소들의 개수가 주는 정보의 중요성이 크기 때문에 복잡한 입체도형일 때 그 구성요소들 간의 관계를 정확하게 파악할 수 있다. 하지만 그런 구성요소를 구하는 표를 사전에 제공하면 학생들이 도형을 직접 시각화하는 데 방해가 될 수도 있다. 공간 시각화의 경험은 주어진 일부 문제의 해결을 넘어 보다 발전적인 문제의 해결에 도움이 될 수 있으므로 도형을 탐구할 때 표에 의존하기보다는 시각화를 통해 학생 스스로 필요한 정보를 얻어낼 수 있도록 안내하거나 보충 질문을 통해 점검해야 한다.

정다면체 쌍대를 탐구할 때는 면, 꼭짓점, 모서리 개수를 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대하여 이해하는 학생은 당연히 그 관계를 정확하게 이해하고 그린다. 하지만 면, 꼭짓점, 모서리 개수의 비교만 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 완벽하지 않은 학생의 경우도 그 정다면체의 쌍대에 해당하는 도형을 알고 그릴 수 있는 학생이 존재하였다. 이런 상황에서 보았을 때 정다면체 쌍대를 탐구함에 있어서는 모든 구성요소를 알고 구성요소 사이의 관계를 정확하게 알면 당연히 정다면체 쌍대를 정확히 탐구할 수 있다. 하지만 5가지 구성요소 사이의 관계를 어느 정도만 인식하고 있다면 충분히 정다면체에서는 쌍대 관계에 있는 도형을 찾을 수 있다.

삼각다면체 쌍대를 탐구할 때 면, 꼭짓점, 모서리 개수를 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대하여 이해하는 학생은 삼각다면체의 쌍대인 도형을 정확히 그렸다. 그리고 면, 꼭짓점, 모서리 개수의 비교만 이해하고 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 완벽하지 않지만 어느 정도 이해하고 있는 학생은 문제를 해결하였다. 하지만 면, 꼭짓점, 모서리 개수와 한 면을 이루는 꼭짓점 개수와 한 꼭짓점에 모인 면의 개수에 대한 이해가 모두 잘 되지 않았던 학생은 쌍대 관계를 찾는데 어려움이 있었다.

하지만 삼각-십사면체의 경우는 구성요소를 정확하게 파악한 학생만이 그림으로 표현하였고 그렇지 못한 학생의 경우 쌍대 관계를 제대로 찾지 못하였다. 이러 점에서 보았을 때 복잡한 입체도형일수록 그 구성요소와 구성요소 사이의 관계를 정확하게 파악하고 있어야 쌍대 관계를 정확하게 인식할 수 있다.

이러한 사실에 비추어 볼 때 입체도형의 쌍대 관계를 파악하기 위해서는 입체도형을 충분히 관찰할 시간을 제공하는 것이 필요하다. 충분한 시간을 통하여 학생 스스로 입체도형의 구성요소를 인식한다면 비록 복잡한 다면체의 경우에도 분명히 구성요소를 정확히 파악할 수 있을 것이다. 관찰할 시간을 제공하였음에도 불구하고 학생 스스로 구성요소를 파악하지 못할 경우에는 입체도형의 쌍대 관계 탐구에 들어가도 제대로 탐구를 하지 못할 것이다. 이런 경우, 교사가 다른 입체도형의 제공을 통한 안내를 하면 학생들이 보다 더 쉽게 접근할 수 있을 것이다. 즉, 교사가 더 간단한 입체도형을 제공하여 학생 스스로 구성요소를 파악할 수 있게 하는 것도 하나의 방법이라 여긴다. 다른 방법으로는 교사가 보충 질문을 하는 것이다. 학생이 스스로 사고할 수 있도록 하는 발문을 통하여 한 단계씩

이해하여 구성요소를 파악할 수 있게 할 수도 있다.

둘째, 정다면체의 쌍대 관계를 제대로 파악하려면 문제 상황에 따라 여러 가지의 다면적인 공간 시각화를 동시에 활용하고 있는지를 점검하고 다른 방식의 공간 시각화를 시도해 볼 수 있도록 자료를 구체화하여 안내하거나 발문해 주어야 한다. 정다면체의 쌍대 관계를 탐구함에 있어서 다양한 공간 시각화 방법이 활용되고 있으며 보통 2가지 이상의 공간 시각화 방법이 동시에 활용된다는 사실을 연구문제2를 통하여 알게 되었다.

쌍대 관계 탐구를 위하여 학생들은 시각적 구별 영역에서는 유사점 구별의 방법을 활용하였다. 차이점 구별의 방법을 활용하여 문제를 해결하려는 학생이 단 2명 있었지만 문제를 해결하는 과정에서 제대로 활용되지 못하고 다시 유사점을 찾는 방법을 활용하였다. 차원 변환의 경우는 문제에서 제시한 자료의 형태에 따라 다른 시각화 방법을 활용하였지만 대다수의 학생들은 각 문제마다 3D로부터 또는 3D로 차원을 변환하여 문제를 해결하였다. 이 때 위치지각 영역에서 대상회전 방법을 활용하게 된다. 하지만 일부의 학생들은 2D로부터 또는 2D로 차원을 변환하여 문제를 해결하는 방법을 선호하였다. 이 경우 차원변환뿐만 아니라 위치지각 영역에서 자신회전의 방법을 동시에 활용하여 문제를 해결한다. 그림-배경 지각의 경우 문제의 특성상 필요한 경우에 사용되며 대부분 그림-배경 지각은 필요한 문제에서 정확하게 활용한다. 새롭게 만드는 능력과 패턴 변형 및 재배열 영역도 연계하여 사용하는 방법들이 존재하였다. 대부분의 성공하는 학생들이 사용하는 방법은 보조선 그리기이다. 면의 중심에 점을 찍고 연결하는 방법을 대다수의 학생들이 활용하였다. 일부의 학생들은 입체도형의 위와 아래의 패턴이 반복된다고 여기면 입체도형 일부 만들기와 패턴 재배열 방법을 같이 활용하여 문제를 해결하였다. 특히 이 방법은 도형이 복잡하여 전체 모습을 떠올리기 어려운 경우 많이 사용되었다. 정십이면체와 정이십면체의 쌍대 관계를 탐구에 성공한 학생들 중 많은 학생들이 이 두 가지 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하였다.

이러한 사실에 비추어 볼 때 정다면체의 쌍대 관계를 파악하기 위해서는 다면적인 공간 시각화를 동시에 활용하는 것이 필요하다. 이런 경우 정다면체 자료의 다양한 제시방법을 통하여 다면적인 공간 시각화를 학생들이 활용할 수 있게 된다. 학생에 따라 제시하는 자료의 회전방향, 점이나 선과 같은 표현도구, 입체나 평면으로 표현하는 차원변화 등을 조금씩 바꾸어서 제공하면 더 효과적으로 공간 시각화 방법을 학생 스스로 활용할 수 있게 될 것이다. 또한 학생들이 정다면체의 쌍대 관계를 탐구하는 과정 중에서 학생들이 올바르게 공간 시각화를 활용하고 있는지 확인하는 지속적인 발문이 필요하다. 학생이 표현한 그림이나 글에 대하여 어떤 방법을 통하여 나타내게 되었는지, 어떤 과정을 통하여 나타내게 되었는지를 지속적으로 묻고 답하는 과정을 통하여 분명히 올바른 공간 시각화 방법을 다면적으로 활용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- 고은성, 이경화, 송상헌 (2008a). 수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석. **한국영재교육학회지 <영재교육연구>**, 18(1), 53-77.
- 고은성, 이경화, 송상헌 (2008b). 시각적 사고와 분석적 사고 사이에서 이미지의 역할. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 10(1), 63-78.
- 김혜정 (2003). **공간 시각화 활동을 통한 기하학습이 공간감각능력과 의사소통능력에 미치는 효과**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 류현아, 정영옥, 송상헌 (2007). 입체도형에 대한 6~7학년 수학영재들의 공간시각화 능력 분석. **학교수학**, 9(2), 277-289.
- 류현아 (2008). **중등 기하문제 해결에서 시각화와 추론 과정**. 건국대학교 박사학위논문.
- 박지영, 송상헌 (2010). 초등수학영재를 위한 폴리큐브 교수·학습 자료 개발 연구. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 12(3), 353-370.
- 송상헌 (2001). 초등 수학 영재의 판별과 선발. **한국영재교육학회지 <영재교육연구>**, 11(2), 87-106.
- 신국환 (1998). **초등학생의 공간 지각 발달에 관한 연구**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 유경선 (2012). **공간능력과 수학적 창의성 신장을 위한 도형학습 과제의 효과**. 서울교육대학교 석사학위논문.
- 이경화, 최남광, 송상헌 (2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구 과정. **대한수학교육학회지 <학교수학>**, 9(4), 487-506.
- 이성현, 정인철 (2010). 포디 프레임을 활용한 델타다면체 탐구. **전국수학교육연구발표대회는문집**, 44, 183-187.
- 이진수 (2013). **정다면체의 쌍대를 탐구할 때 초등수학영재들이 보여주는 시각화 방법 분석**. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 조영선 (2010). **초등학생들의 공간 감각 실태 조사 4~6학년을 중심으로**. 경인교육대학교 석사학위논문.
- 조한혁 (2005). 마이크로월드를 통한 수학 영재교육. **한국교육개발원 영재교육 교원 심화연수교재**, 296-310.
- 한기완 (2001). 공간감각의 개념 분석 및 교수-학습 방안 탐색. **한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>**, 5(1), 57-69.
- 한기완 (2002). **초등학교 수학에서 공간감각 지도에 관한 연구**. 단국대학교 박사학위논문.
- Krutetskii, V. A. (1976). **The psychology of mathematical abilities in school children**. The University of Chicago Press.

<Abstract>

Analyzing the Modes of Mathematically
Gifted Students' Visualization on the Duality of Regular Polyhedrons

Lee, Jin Soo⁴⁾; & Song, Sang Hun⁵⁾

The purpose of this study is to analyze the modes of visualization which appears in the process of thinking that mathematically gifted 6th grade students get to understand components of the three-dimensional shapes on the duality of regular polyhedrons, find the duality relation between the relations of such components, and further explore on whether such duality relation comes into existence in other regular polyhedrons.

The results identified in this study are as follows: First, as components required for the process of exploring the duality relation of polyhedrons, there exist primary elements such as the number of faces, the number of vertexes, and the number of edges, and secondary elements such as the number of vertexes gathered at the same face and the number of faces gathered at the same vertex.

Second, when exploring the duality relation of regular polyhedrons, mathematically gifted students solved the problems by using various modes of spatial visualization. They tried mainly to use visual distinction, dimension conversion, figure-background perception, position perception, ability to create a new thing, pattern transformation, and rearrangement.

In this study, by investigating students' reactions which can appear in the process of exploring geometry problems and analyzing such reactions in conjunction with modes of visualization, modes of spatial visualization which are frequently used by a majority of students have been investigated and reactions relating to spatial visualization that a few students creatively used have been examined. Through such various reactions, the students' thinking in exploring three dimensional shapes could be understood.

Key words: Mathematically Gifted Student, Regular Polyhedrons, Triangularity, Polyhedron, Duality, Visualization

논문접수: 2013. 07. 26

논문심사: 2013. 07. 31

게재확정: 2013. 08. 20

4) nabatt@hanmail.net

5) song2343@hanmail.net