Journal of Korean Institute of Intelligent Systems, Vol. 23, No. 4, August 2013, pp. 366-370
http://dx.doi.org/10.5391/JKIIS.2013.23.4.366

Theil방법을 이용한 퍼지회귀모형

Fuzzy Theil regression Model

윤진희* · 이우주** · 최승회***†
Jin Hee Yoon, Woo-Joo Lee, and Seung-Hoe Choi†

*연세대학교 경제학과, **연세대학교 수학과, ***한국항공대학교 인문자연학부
† School of Liberal Arts and Science, Korea Aerospace University

요 약

설명변수와 반응변수 사이의 통계적 관계를 설명하기 위해 사용되는 회귀모형을 분석하는 방법을 회귀분석이라 한다. 본 논문에서는 독립변수와 종속변수에 대한 퍼지관계를 표현하는 퍼지회귀모형를 추정하기 위하여 이상치에 민감하지 않은 로버스트한 추정량인 Theil방법을 소개한다. Theil방법은 설명변수와 반응변수의 α-수준집합의 각 성분으로 구성된 집합에서 선택한 임의의 두 쌍 자료로부터 계산된 변화율의 중위수를 두 변수에 대한 변화량의 추정량으로 간주한다. 본 논문에서 제안된 Theil방법이 최소자승법을 이용하여 추정된 퍼지회귀모형보다 더 정확할 수 있음을 예제를 통하여 확인한다.

키워드 : 퍼지회귀모형, Theil 방법, 최소자승방법, 퍼지이상치

Abstract

Regression Analysis is an analyzing method of regression model to explain the statistical relationship between explanatory variable and response variables. This paper introduce Theil's method to find a fuzzy regression model which explain the relationship between explanatory variable and response variables. Theil's method is a robust method which is not sensive to outliers. Theil's method use medians of rate of increment based on randomly chosen pairs of each components of α-level sets of fuzzy data in order to estimate the coefficients of fuzzy regression model. We propose an example to show Theil's estimator is robust than the Least squares estimator.

Key Words : Fuzzy Regression model, Theil's method, Fuzzy outlier

1. 서 론

자연이나 사회에서 발생하는 현상을 수학적인 도구인 수, 혹은 수와 연관된 기호나 공리를 이용하여 표현하고, 그 현상을 설명해 가는 과정이 수학의 중요한 목적중 하나이다. 자연적인 현상이나 사회적인 현상을 추상화하여 수학적인 문제로 만드는 과정에서 발생하는 문제는 불확실성(uncertainty)이다. 불확실성에는 시간이 흘러가거나 실험을 통하여 불확실성이 해결되는 확률적인 불확실성과 실험이나 시간과는 무관한 퍼지적 불확실성이 있다. 확률적인 불확실성에 대한 연구는 활발히 진행되어, 많은 분야에서 응용되고 있다.

Zadeh는 실험이나 시간과는 무관한 퍼지적 불확실성을 애매함(ambiguity)과 모호함(vagueness)으로 설명하고, 애매하거나 모호한 문장으로 표현된 정보들을 처리하기 위하여 필요한 시스템을 구현하기 위하여 퍼지이론(fuzzy theory)을 소개하였다[1-2]. 확률적인 불확실성과 퍼지적 불확실성인 모호함과 애매함은 각각 여러 개 중에서 하나를 선택하여야 할 경우와 사물을 구별할 때 경계가 확실하지 않는 경우에 발생함으로 두 불확실성을 동시에 표현하고 연구를 하여야 한다.

Tanaka는 애매하거나 불확실하게 표현된 변수사이의 인과관계를 설명하기 위해 퍼지회귀모형(fuzzy regression model)을 소개하였다[3-4]. 퍼지회귀모형은 설명변수에 의존하는 종속변수에 대한 함수, 즉 반응함수의 모양에 따라 두 가지로 구분할 수 있다. 반응변수와 독립변수간의 함수인 회귀방정식을 모르는 경우와 두 변수 사이의 관계를 아는 경우로 구분하여 전자를 모수적퍼지회귀모형(parametric model)하 하고, 후자를 비모수적퍼지회귀모형(nonparametric model)이라 한다. 퍼지회귀모형을 추정하는 방법은 추정된 퍼지수의 폭(spread)을 최소화하는 수치해석적인 방법(numerical method)과 예측퍼지수와 관찰퍼지수의 차를 최소화하는 통계적인 방법(statistical method)으로 분류할 수 있다[5-9].

본 논문에서는 모수적퍼지회귀모형을 추정하기 위하여 퍼지수(fuzzy number)의 α-수준 집합(level set)의 중심(mod)과 끝점(end point)에 대한 중위수(median)를 이용한

접수일자: 2013년 3월 31일
심사(수정)일자: 2013년 4월 7일
게재확정일자 : 2013년 5월 10일
† Corresponding author

Theil방법을 소개한다. 제안된 방법으로 추정된 퍼지회귀모형의 효율성(efficiency)을 최소자승법(least squares mehtod)을 이용한 추정된 퍼지회귀모형과 비교하기 위해 모의실험을 이용한다.

2. 퍼지회귀모형

Tanaka 등은 퍼지회귀모형

$$Y(X_i) = A_0 \oplus A_1 \otimes X_{i1} \oplus \cdots \oplus A_p \otimes X_{ip} \quad i = 1,\cdots,n \tag{1}$$

을 처음으로 소개하였다[3-4]. 여기서 i 번째 설명변수의 j 번째 성분 X_{ij}, 회귀계수A_j 그리고 반응변수 $Y(X_i)$는 퍼지수이다. 그리고 식 (1)에서 주어진 연산 $\oplus$와 $\otimes$는 각각 퍼지수의 합과 곱이다.

관측된 자료 $\{(X_{i1},\cdots,X_{ip},Y_i): i=1,\cdots,n\}$를 이용하여 관측퍼지수와 예측퍼지수 사이의 차를 가장 작게 하는 회귀계수를 추정하는 것이 퍼지회귀분석의 중요한 목적중 하나이다[10-12]. 이를 위하여 두 퍼지수 사이의 거리를 정의하여야 한다. 일반적인 회귀분석과 비슷하게 퍼지회귀모형에서도 평균에 근거한 최소자승법을 가장 많이 사용되고 있다. 하지만 최소자승법은 이상치(outlier)에 민감하고 퍼지회귀모형에서는 이상치가 자주 발생할 수 있으므로 최소자승법의 약점을 보완할 강건한(robust) 추정법이 필요하다. 본 논문에서는 이상치에 민감하지 않은 중위수(median)에 근거한 Theil방법을 이용한다. Theil은 1950년에 처음으로 Theil방법을 소개하였고, 이후 여러 사람들의 Theil방법은 회귀모형과 분산분석에 사용되었다[13-14].

퍼지회귀모형에서는 종속변수와 독립변수, 그리고 반응함수가 애매하거나 불확실한 경우를 분석함으로 퍼지수의 함수에 대한 소속함수를 결정하는 것이 중요하다. Zadeh는 퍼지수의 함수에 대한 퍼지수를 정의할 수 있도록 확장원리(extension principle)을 제안하였다[1-2]. 또한 확장원리는 퍼지수에 대한 연산을 정의하는데 아주 중요한 수단이 되고 있다.

실수의 부분집합 X와 Y, 그리고 X에서 Y로의 함수 $f: X \to Y$가 정의되고, A는 X의 퍼지집합이라 하자. 확장원리는 집합 A에 대한 함수 f의 상(image) $f(A)$의 소속함수는

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} sup_{y=f(x)} \mu_A(x) & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

와 같음을 보여준다. 확장원리는 퍼지수에 대한 모든 연산을 가능하게 한다. 어떤 실수 집합 $S_1, S_2, \cdots S_n$에 대한 함수

$$h: S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to S,$$

는 다음과 같이 확장될 수 있다.

$$h^*: \varphi(S_1) \times \varphi(S_2) \times \cdots \times \varphi(S_n) \to \varphi(S)$$

여기서, $\varphi(S_i)$는 S_i 의 퍼지부분집합을 의미한다. 즉, h^*는 모든 $s_1 \in \varphi(S_1), \ldots, s_n \in \varphi(S_n), x \in S$에 대하여

$$h^*(s_1, s_2, \ldots, s_n)(x) = \sup\left\{ \frac{s_1(x_1) \wedge s_2(x_2) \wedge \cdots s_n(x_n)}{h(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = x \right\}$$

와 같이 정의된다.

Zadeh는 퍼지집합 A의 소속함수 $\mu_A(x)$는 α-수준집합 A_α과 특성함수(characteristic function) $I_{A_\alpha}(x)$을 이용하여 유도할 있음을 보여주는 분해원리(resolution identity)를 제시하였다. 분해원리는 집합 A_α의 특성함수가

$$I_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & x \in A_\alpha \\ 0 & x \not\in A_\alpha \end{cases}$$

와 같이 정의될 때, 집합 A의 소속함수은

$$\mu_A(x) = sup\{\alpha I_{A_\alpha}(x) : \alpha \in [0,1]\}$$

임을 보여준다. 따라서 퍼지회귀분석의 목적 중 하나인 관측퍼지수에 대한 예측은 주어진 퍼지수의 α-수준집합을 추정함으로 가능하다는 것을 분해원리는 설명하고 있다.

본 논문에서는 퍼지회귀모형을 추정하기 위하여 α-수준집합

$$\{(X_{i1}(\alpha), \cdots, X_{ip}(\alpha), Y_i(\alpha)): i = 1, \cdots, n\} \tag{2}$$

에 Theil방법을 적용한다. Theil은 평면상의 두 점들의 집합에 대한 최상의 적합 직선을 추정하기 위하여 기울기와 절편이 전체 집합의 원소들과 멀리 떨어진 점에 영향을 크게 받지 않는 방법을 연구하였다[13]. 그리고 Hussain과 Sprent는 Gram-Schmidt 과정을 이용하여 설명변수를 정규직교집합으로 변환한 후 Theil방법을 사용하여 중회귀모형을 추정하였다[14].

퍼지회귀모형의 독립변수와 종속변수의 중심에 대한 자료 $\{(x_{i1}, \cdots, x_{ip}, y_i): i = 1, \cdots, n\}$ 에 대한 중회귀모형은

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + \cdots + a_p x_{ip} \tag{3}$$

와 같다. 모형 (3)에 포함된 회귀계수 $a_k (k = 0,1,\cdots,p)$를 추정한 후 종속변수의 중심인 y_i는 다음과 같은 절차를 통하여 추정할 수 있다.

단계 1 : 자료 $\{x_1, \cdots, x_p\}$ 을 Gram-Schmidts 과정을 이용하여 $\{z_1, \cdots, z_p\}$ 로 변형한다.

$$z_{ik} = \begin{cases} x_{ik} & \text{if } k = 1 \\ x_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} \frac{< x_k, z_m >}{< z_m, z_m >} z_{im} & \text{if } k > 1. \end{cases} \tag{4}$$

여기서 $x_i = (x_{1i}, \cdots, x_{ni})$이고 $z_i = (z_{1i}, \cdots, z_{ni})$이다.

단계 2 : Gram-Schmidts 과정으로부터 변환된 $\{z_1, \cdots, z_p\}$ 가 독립변수인 중회귀모형

$$y_i = \theta_0 + \theta_1 z_{i1} + \cdots + \theta_p z_{ip} \tag{5}$$

에 대한 회귀계수 $\theta_k(k=1,\cdots,p)$ 를 추정하는 방법은 다음과 같다.

2-1. $\theta_k^{(0)}=0\ (k=1,\cdots,p)$ 이고 $y_i^{(0)}=y_i$라 하자.

2-2. $\delta\theta_k^{(0)}$는 다음 집합의 중위수이다.

$$\left\{\frac{y_j^{(0)}-y_i^{(0)}}{z_{jk}-z_{ik}} : z_{ik}<z_{jk},\ 1\le i<j\le n\right\} \tag{6}$$

2-3. $\theta_k^{(j)},\ y_i^{(j)}$을 각각 $\theta_k^{(j-1)}+\delta\theta_k^{(j-1)}$와 $y_i^{(j-1)}-\delta\theta_k^{(j-1)}z_{ki}$라 하자$(j\ge 1)$.

2-4. 위와 같은 과정을 추정값 $\theta_k^{(j)}$가 수렴할 때까지 반복하여 수렴 값 $\hat{\theta}_k(k=1,\cdots,p)$을 추정된 회귀계수라 하자. 즉,

$$\delta\theta_k^{(n-1)}=\left\{\frac{y_j^{(0)}-y_i^{(0)}}{z_{jk}-z_{ik}}-\sum_{s=0}^{n-2}\delta\theta_k^{(s)} : z_{ik}<z_{jk}\right\}, \tag{7}$$
$$i=1,2,\cdots,n-1,\ j=i+1,\cdots,n$$

$$y_i^{(n)}=y_i^{(0)}-\sum_{s=0}^{n-1}\delta\theta_k^{(s)}z_{ki},\quad \theta_k^{(n)}=\sum_{s=0}^{n-1}\theta_k^{(s)}. \tag{8}$$

2-5. $\hat{\theta}_0$는 집합 $\{y_i : i=1,\cdots,n\}$ 의 중위수이다.

단계 3 : 2단계에서 추정한 $\hat{\theta}_k(k=1,\cdots,p)$을 사용하여 회귀계수 $a_k(k=0,1,\cdots,p)$를 추정하기 위해 Gram-Schmidts 과정을 이용한다.

$$\begin{aligned}&\text{If } k=0, \quad \hat{a}_{p-k}=\hat{\theta}_p\\ &\text{If } 1\le k\le p-1,\\ &\quad \hat{a}_{p-k}=\hat{\theta}_{p-k}-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{<x_{p-m},z_{p-k}>}{<z_{p-k},z_{p-k}>}\hat{\theta}_{p-m}\end{aligned} \tag{8}$$

그리고 절편에 대한 추정량은 $\hat{a}_0=\hat{\theta}_0$ 이다.

앞에서 제시된 절차를 독립변수와 종속변수의 α-수준집합

$$\begin{aligned}&\left\{(l_{X_{i1}}(\alpha),\cdots,l_{X_{ip}}(\alpha),\ l_{Y_i}(\alpha)) : i=1,\cdots,n\right\}\\ &\text{와}\\ &\left\{(r_{X_{i1}}(\alpha),\cdots,r_{X_{ip}}(\alpha),\ r_{Y_i}(\alpha)) : i=1,\cdots,n\right\}\end{aligned} \tag{9}$$

에 적용하여 반응변수의 α-수준집합의 왼쪽과 오른쪽의 끝점에 대한 추정치 $l_{\overline{Y}_i}(\alpha)$와 $r_{\overline{Y}_i}(\alpha)$를 유도할 수 있다.

단계 4 : 단계 3에서 추정한 끝점 $l_{\overline{y}_i}(\alpha)$와 $r_{\overline{y}_i}(\alpha)$가 퍼지수의 성질을 만족하도록 다음과 같이 α-수준집합의 끝점을 정의한다.

$$l_{\hat{Y}_i}(\alpha)=\min\left\{l_{\overline{Y}_i}(\alpha),\hat{y}_i\right\}\left(r_{\hat{Y}_i}(\alpha)=\max\left\{r_{\overline{Y}_i}(\alpha),\hat{y}_i\right\}\right).$$

단계 5: 단계 1부터 단계 4까지의 과정에서 얻은

$$\left\{\left(l_{\hat{Y}_i}(\alpha_k),\alpha_k\right) : k=1,\cdots,s\right\}$$

와

$$\left\{\left(r_{\hat{Y}_i}(\alpha_k),\alpha_k\right) : k=1,\cdots,s\right\}$$

을 이용하여 예측된 퍼지수 $\hat{Y}_i$의 소속함수를 추정한다. 이 때 Theil방법을 한 번 더 소속함수를 추정하기 위해 사용한다.

3. 예 제

본 절에서는 Theil방법을 이용하여 추정된 퍼지선형회귀모형의 효율성을 비교하기 위해 Kim과 Bishu가 제시한 측도를 확장한 측도를 사용한다[15-16]. 참 퍼지회귀계수 A_i와 추정된 회귀계수 $\hat{A}_i$의 차를 두 소속함수의 차에 대한 적분으로 정의한

$$d(A_i,\hat{A}_i)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu_{A_i}(x)-\mu_{\hat{A}_i}(x)\right|dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mu_{A_i}(x)\right|dx}+h_d\left(A_i(0),\hat{A}_i(0)\right) \tag{10}$$

와 추정된 퍼지회귀모형에 대한 정확성을 조사할 수 있는 척도

$$M(A,\hat{A})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d\left(A_i,\hat{A}_i\right) \tag{11}$$

를 이용한다. 즉, 관측된 퍼지수와 추정된 퍼지수의 소속함수의 차에 대한 적분의 합인 척도 $M\left(Y,\hat{Y}\right)$가 0에 가까울수록 추정된 퍼지회귀모형의 정확성은 높다고 할 수 있다.

다음 모의실험에서는 독립변수와 종속변수가 모두 퍼지수인 경우에 대하여 Theil방법과 최소자승법의 정확성을 비교하였다. 지금까지 소개된 대부분의 논문들은 종속변수에 대한 오차를 비교하였다. 그러나 이것은 표본의 수에 따라 그 효율성이 변할 수 있으므로 본 논문에서는 회귀계수를 비교하였다. 다음 예제는 모의실험(simulation study)을 이용한 퍼지회귀모형에 대한 Theil방법의 효율성을 보여준다.

예제 : 독립변수의 중심이 m이고 폭이 s인 삼각퍼지수 $A=(m,s)_T$를 생성하기 위해서 중심과 폭을 각각 일양분포(uniform distribution)와 삼각분포(triangular distribution)를 사용하였고, 오차에 대한 중심과 폭은 각각 웨이블분포(weibull distribution)와 자유도가 1인 T-분포(T distribution with degree of freedom 1)를 이용하였다. 다음과 같은 모의실험의 설계에 따라 10개의 자료를 생성하였다.

모형 : $Y_i=A_0+A_1X_i+E_i,\ i=1,\cdots 10.$
모수 : $A_0=(5.2,3)_T$와 $A_1=(2,1.7)_T.$
오차 : $x_i\sim U(1,15),\ s_{xi}\sim T(1,2,3),$
$m_i\sim W(1,0.5),\ e_i\sim T(1).$

계획된 모의실험에 따라 생성된 10개의 삼각퍼지수는 표 1

과 같다.

표 1. 퍼지데이터
Table 1. Fuzzy data

i	$X_i = (x_i, s_{x_i})$	$Y_i = (y_i, s_{y_i})$
1	(2, 1.6)	(11, 6.97)
2	(8, 2.1)	(22.04, 10.78)
3	(6, 4)	(17.95, 11.31)
4	(3,2.4)	(11.25, 8.23)
5	(11,3.4)	(27.47, 15.68)
6	(7,4.3)	(19.38, 13.83)
7	(8,3.5)	(22.04, 16.89)
8	(9,2)	(23.37, 12.07)
9	(5,3.7)	(15.51, 9.97)
10	(13,2.8)	(31.47, 8.1)

표 1에서 주어진 10개의 자료와 두 추정법, 최소자승법 $\left(\hat{Y}_i^{LS}\right)$과 Theil방법$\left(\hat{Y}_i^{T}\right)$을 이용하여 추정한 퍼지회귀모형은 각각 다음과 같다.

$$\hat{Y}_i^{LS} = (6.23, 3.07)_T + (1.93, 0.25)_T X_i$$
$$\hat{Y}_i^{T} = (5.68, 2.64)_T + (1.99, 0.4)_T X_i$$

최소자승법과 Theil방법에 따라 추정된 종속변수의 예측값은 표 2와 같다.

최소자승법과 Theil방법을 사용하여 추정한 두 퍼지회귀모형의 효율성을 비교하기 위하여 측도 (3.1)를 이용하여 계산한 정확성의 결과는 표 3과 같았다. 표 3은 퍼지회귀모형의 참회귀계수와 추정된 회귀계수의 차를 보여준다. 두꺼운 꼬리분포(heavy-tailed distribution)인 웨이블분포와 자유도가 1인 T-분포로부터 생성된 오차에는 중심과 폭에 각각 이상치를 포함하고 있었다. 그 결과 이상치 크게 민감하지 않는 Theil방법이 최소자승법보다 더 정확할 수 있음을 보여주었다.

표 2. 추정값
Table 2. Estimated values

i	LSE	Theil's method
	$\widehat{Y}_i = (\widehat{l_{y_i}}, \widehat{y_i}, \widehat{l_{y_i}})$	$\widehat{Y}_i = (\widehat{l_{y_i}}, \widehat{y_i}, \widehat{l_{y_i}})$
1	(2.52, 10.10, 17.16)	(2.96, 9.53, 15.14)
2	(11.51, 21.70, 31.36)	(9.91, 21.49, 30.39)
3	(5.13, 17.83, 31.14)	(4.98, 17.50, 30.16)
4	(2.84, 12.03, 21.09)	(3.22, 11.52, 19.37)
5	(14.30, 27.49, 40.75)	(12.06, 27.48, 40.48)
6	(6.28, 19.76, 33.98)	(5.87, 19.50, 33.21)
7	(9.22, 21.70, 34.41)	(8.14, 21.49, 33.68)
8	(13.31, 23.63, 33.32)	(11.3, 23.49, 32.51)
9	(3.99, 15.90, 28.30)	(4.1, 15.51, 27.11)
10	(18.55, 31.36, 43.80)	(15.34, 31.46, 43.77)

표 3. 추정된 퍼지회귀계수에 대한 오차
Table 3. Errors of estimated fuzzy regression coefficients

$M(A,\hat{A})$	LS Method	Theil Method
A_0	1.35	1.08
A_1	1.43	1.16

4. 결 론

본 논문에서는 독립변수와 종속변수에 대한 퍼지관계를 표현하는 퍼지회귀모형를 추정하기 위하여 Theil방법을 소개하였다. 두 변수의 α-수준집합의 각 성분으로 구성된 집합에서 선택한 임의의 두 쌍 중심(혹은 긑점)으로부터 계산된 변화율 중 중위수를 중심 (혹은 끝점)에 대한 추정량으로 간주하였다. 본 논문에서 제시된 Theil방법이 최소자승법의해 추정된 퍼지회귀모형보다 더 효율적임을 모의실험을 통하여 확인하였다.

앞으로 Theil방법을 이용하여 추정한 퍼지회귀모형에 대한 통계적인 성질을 연구하여, 추정된 퍼지회귀모형의 효율성을 더 높일 수 있는 조건을 유도할 필요가 있다.

References

[1] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.

[2] L. A. Zadeh, “The concept of linguistic variable and its application to approximate reasoning I”, *Inform. Sci.* vol.8, pp. 199-249, 1975.

[3] H. Tanaka, S. Uejima, K. Asai, “Linear regression analysis with fuzzy model”, *IEEE Trans. Syst., Man Cybernet.* vol. 12, pp. 903-907, 1982.

[4] H. Tanaka, I. Hayashi, J. “Watada, Possibilistic linear regression analysis for fuzzy data”, *European Journal of Operational Research* vol. 40, pp. 389-396, 1989.

[5] L. H. Chen, C. C. Hsueh, “Fuzzy regression models using the least-squares method based on the concept of distance”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* vol. 17 pp. 1259-1272, 2009.

[6] P. Diamond, “Fuzzy Least Squares”, *Inform. Sci.* vol. 46, pp. 141-157, 1988.

[7] C. Kao, C. Chyu, “Least-squares estimates in fuzzy regression analysis”, European J. of Operational Research vol. 148 pp. 426-435, 2003.

[8] H. K. Kim, J.H. Yoon, Y. Li, “Asymptotic properties of least squares estimation with fuzzy observations”, *Inform. Sci.* vol. 178 pp. 439-451, 2008.

[9] D. Savic, W. Pedryzc, “Evaluation of fuzzy linear regression models”, *Fuzzy Sets and Systems* vol. 39, pp. 51-63, 1991.

[10] S. H. Choi, J. H. Yoon, “General fuzzy regression using least squares method”, *International Journal of Systems Science* vol. 41, pp. 477-485, 2010.

[11] P. Diamond, H. Tanaka, "Fuzzy regression analysis", *Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, vol. 1, pp. 349-387 1998.
[12] J. H. Yoon, S. H. Choi, "Componentwise Fuzzy Linear Regression Using Least Squares Estimation", *J. of Mult.-Valued Logic* vol. 15, pp. 137-153, 2009.
[13] H. Theil, "A rank invariant of linear and polynomial regression analysis", *Pro. Kon. Ned. Akad. Wetensch. A*, vol. 53, pp. 386-392. 1950.
[14] S. S. Hussain, P. Sprent, "Non-parametric regression". *J. R. Statist.* Soc. A. vol. 146, pp. 182-191, 1983.
[15] B. Kim, R. R. Bishu, "Evaluation of fuzzy linear regression models by comparing membership functions", *Fuzzy Sets and Systems* vol. 100, pp. 343-352, 1998.
[16] S. H. Choi, J. J. Buckley, "Fuzzy regression using least absolute deviation estimators", *Soft Computing* vol. 12, pp. 257-263, 2008.

저 자 소 개

윤진희(Jin Hee Yoon)
1997년 : 연세대학교 수학과 이학사
2000년 : 연세대학교 수학과 이학석사
2007년 : 연세대학교 수학과 이학박사
현재 : 연세대학교 경제학과 연구교수

관심분야 : Fuzzy Regression, Fuzzy time series, Fuzzy prediction, Fuzzy financial engineering
Phone : +82-2-2123-2463
E-mail : jin9135@yonsei.ac.kr

이우주(Woo-Joo Lee)
2003년 : 한양대학교 수학과 이학사
2005년 : 연세대학교 수학과 이학석사
2005년 ~ 현재 : 연세대학교 수학과 박사과정

관심분야 : Fuzzy Prediction, Time Series, Soft Computing
Phone : +82-2-2123-2580
E-mail : bobspace@yonsei.ac.kr

최승회(Seung-Hoe Choi)
1984년 : 울산대학교 수학과 이학사
1986년 : 연세대학교 수학과 이학석사
1994년 : 연세대학교 수학과 이학박사
1996년 ~ 현재 : 한국항공대학교 인문자연학부 교수

관심분야 : Fuzzy Prediction, Stochastic Process, Sports Statistics
Phone : +82-2-300-0073
E-mail : shchoi@kau.ac.kr