한국지반공학회논문집 제29권 1호 2013년 1월 pp. 171 ~ 181

ISSN 1229-2427
http://dx.doi.org/10.7843/kgs.2013.29.1.171

경계면 소성 모델의 방사 사상 법칙에 대한 실험적 검토

Experimental Validation of the Radial Mapping Rule in Bounding Surface Plasticity Model

정 영 훈[1] Jung, Young-Hoon

이 주 형[2] Lee, Ju-Hyung

Abstract

The radial mapping rule in bounding surface model was experimentally investigated by analyzing the drained stress probe tests on Chicago clays. The experimental data obtained from 10 drained stress probe paths were analyzed to calculate the directions of the plastic strain increments. The anisotropic bounding surface model was adopted to represent a bounding yield surface which resides in the pre-consolidation yield stress of undisturbed clays. The projection origins were estimated by finding the interceptions of the straight lines passing through the current stress point and the imaginary yield stress point on the bounding surface. The results show that the projection origin is not fixed at a point but moves toward the direction of the stress probe path after it is established around the initial stress point.

요 지

본 연구에서는 시카고 점토에 대해 실시한 배수 응력 경로 시험결과를 분석하여 경계면 모델의 방사 사상 법칙을 검토하였다. 서로 다른 방향을 가진 총 10개의 응력 경로 시험 결과로부터 얻은 응력-변형률 관계를 분석하여 소성 변형률 증분을 계산하였고, 이로부터 응력 경로 진행 중 소성 변형률의 방향을 실험적으로 분석하였다. 불교란 시료의 선행 압밀 항복 응력을 고려하여 이방성 경계면 소성 항복면의 위치를 결정하였다. 투영 원점의 위치를 확인하기 위해 경계 항복면 상에서 가상 응력점을 찾았고 현재 응력점과 연결한 직선을 이용하여 투영 원점의 위치를 파악하였다. 경계면 소성 모델에서 투영 원점은 특정 위치에 고정되지 않으며, 초기 응력점 근처에서 형성된 후 재하 방향에 따라 이동한다.

Keywords : Bounding surface model, Projection origin, Anisotropic yield surface, Chicago clay, Stress probe tests

1. 서 론

흙은 일반적으로 모든 변형과정에서 탄성 변형과 소성 변형을 동시에 겪게 된다. 미소 변형률 영역에서 흙의 변형 특성을 규명하고자 하는 실험적 연구 결과는 흙의 변형률이 0.001% 이하인 영역에서도 소성 변형률이 발생함을 보여준다.

흙의 소성적 변형 특성은 전통적으로 탄소성 구성 모델링을 통해 구현된다. 고전적인 탄소성 모델링에서는 항복면으로 구분된 두 응력 공간에 대해 재료의 순수

1 정회원, 경희대학교 공과대학 사회기반시스템공학과 부교수 (Associate Professor, Dept. of Civil Engineering, Kyung Hee University, Tel: +82-31-201-2574, Fax: +82-31-202-8854, jyounghoon@khu.ac.kr, 교신저자)

2 정회원, 한국건설기술연구원 SOC성능연구소 Geo-인프라연구실 수석연구원 (Senior researcher, Geotechnical engineering research division, SOC Research Institute, Korea Institute of Construction Technology)

* 본 논문에 대한 토의를 원하는 회원은 2013년 7월 30일까지 그 내용을 학회로 보내주시기 바랍니다. 저자의 검토 내용과 함께 논문집에 게재하여 드립니다.

탄성 상태와 탄소성 상태를 가정하게 된다. 따라서 고전적인 탄소성 모델링의 순수 탄성 영역에서는 소성 변형이 발생할 수 없으며 이는 실험으로 관찰된 재료의 거동과 다르다. 이러한 단점을 극복하기 위해 현대적인 탄소성 모델링에서는 경험에 근거한 경계면 소성 모델 개념을 도입한다(Dafalias, 1986; Dafalias and Herrmann, 1982, Jung and Yune, 2011).

경계면 소성 모델에서는 경계 항복면(bounding yield surface) 내부의 응력 공간에서 소성 변형률의 발생을 허용한다. 경계면 소성 모델에서 항복면 내부의 응력에 대해 소성 변형률을 계산하기 위해 (i) 현재 응력 상태에 대응하는 경계면 상의 가상 응력점(image stress point)를 구하여 이 점에서 소성 변형률의 방향을 계산하고, (ii) 현재 응력점과 가상 응력점 간의 상대 거리를 이용하여 소성 변형률의 크기를 계산하게 된다. 즉 경계 항복면 내부의 응력점에서 소성 경화(plastic hardening)는 현재 응력 상태에서 경계면까지의 거리 벡터에 의존하게 된다. 현상학적으로 설명한다면 경계면 소성 모델은 항복에 도달하기 전 응력 상태에서 발생하는 강성의 비선형성을 표현하게 된다. 즉 재료의 전반적인 항복을 규정하는 경계면과 현재 응력이 서로 가깝다면 이는 재료가 항복에 가까운 낮은 강성을 띄게 됨을 의미한다. 하지만 현재 응력 상태가 경계면과 멀리 떨어져 있다면 재료는 항복과는 거리가 먼 상태이므로 상대적으로 높은 강성을 유지한다.

앞서 설명한 경계면 소성 모델의 일반적인 사항은 가상 응력점의 선정과 현재 응력과 가상 응력점 간의 거리 측정의 구체적인 방법에서 달라질 수 있다. 미소변형률 영역의 응력-변형률 거동에 대한 최근의 실험적 연구 결과는 현재 응력 상태가 과거에 상당 기간에 걸쳐 유지된 응력 상태라면 경계면과의 상대적인 위치와 관계없이 현재 응력 상태에서 높은 강성을 유지할 수 있음을 보여준다(Tatsuoka et al., 1997). 미소변형률 영역의 응력-변형률 거동을 설명하는 Jardin(1985, 1992)의 다중 항복면 모델에서는 경계면 내부에서의 소성변형에 의한 비선형성을 2개의 내부 항복면을 경계면 내부에 도입하여 설명하는데, 이 중 가장 내부에 존재하는 Y1 항복면의 내부에서 재료의 순수 탄성을 가정한다. 즉 Y1 항복면 내부에서는 소성 변형률이 발생하지 않으므로 경계면 소성 모델링의 관점에서 Y1 항복면 내부의 응력이 경계면에서 가장 멀리 떨어진 응력 상태이다. 이는 응력 공간의 원점을 경계면에서 가장 멀리 떨어진 응력점으로 가정하는 경계면 모델의 일반적인 방사 사상 법칙과는 분명한 차이가 있다. Jardin의 다중 항복면 모델에 근거한 탄소성 모델에서는 소성 변형률의 방향을 찾기 위해 내부 항복면의 형태가 경계면의 형태와 동일해야 한다는 제약 조건을 가지고 있다. 또한 가상 응력점을 찾기 위해 내부 항복면 상의 소성 변형률 방향과 동일한 방향을 가지는 경계면 상의 응력을 가상 응력점으로 결정하지만 이를 뒷받침할 실험적 근거는 제시된 바 없다.

본 연구에서는 시카고 점토에 대해 실시한 배수 응력 경로 시험결과를 분석하여 경계면 모델의 방사 사상 법칙(radial mapping rule)을 검토하고 이를 토대로 새로운 사상 법칙을 제안하고자 한다. 방사 사상 법칙을 검토하기 위해 가상 응력점을 구하기 위한 투영 원점의 위치를 응력 경로 시험 결과를 이용하여 찾고자 하였다.

2. 경계면 소성 모델

고전적인 탄소성 모델에서는 항복면을 기준으로 탄성과 소성 변형을 엄격히 구분하여 응력이 탄성 영역에서 소성 영역으로 진입할 때 불연속적인 응력-변형률 거동이 계산되는 단점이 있다. 경계면 소성 모델(bounding surface plasticity model)은 이러한 고전적인 탄소성 모델의 한계를 극복하기 위해 경계 항복면 내부의 응력 공간에서 소성 변형률의 발생을 허용하고 이를 통해 연속적인 응력-변형률 거동이 계산되도록 고안된 모델이다. Krieg(1975), Dafalias and Popov(1975)의 초기 제안 이후 많은 연구자들에 의해 서로 다른 형태로 응용되었지만, 모델 형태와 관계없이 공통적으로 적용되는 규칙은 크게 두 가지이다.

첫 번째 규칙은 경계 항복면 위에 놓인 가상 응력점에 대한 규칙이다. 즉 현재 응력이 경계 항복면 내부에 놓일 때 소성 변형의 계산을 위해 경계 항복면 상의 임의의 가상 응력점을 선택하고 이 응력점에서의 항복면 접면 방향으로 소성 변형률 증분의 방향을 결정한다. 이 때 가상 응력점은 일반적으로 투영 원점에서 현재 응력점을 통과하는 선과 경계 항복면의 교점으로 결정되며, 이를 방사 투영 법칙(radial mapping rule)이라고 한다. 두 번째 규칙에서는 소성 변형률 크기의 결정을 위한 규칙이다. 즉 현재 응력이 경계 항복면 내부에 놓일 때 소성 변형률의 크기는 현재 응력점과 가상 응력점 간의 상대적 거리를 이용하여 계산한다. 두 번째 규칙의 의미는 현재 응력점이 가상 응력점과 상대적으로 가깝다면

재료의 상태는 항복에 가까울 것이며 따라서 재료는 상대적으로 큰 소성 변형으로 인해 낮은 강성을 가지게 될 것이다. 반대로 현재 응력점이 항복면 상의 가상 응력점과 상대적으로 멀다면 재료는 작은 소성 변형을 일으킬 것이며 상대적으로 큰 강성을 가지게 될 것이다.

앞서 정리한 두 가지 규칙은 경계면 소성 모델에 일반적으로 통용되지만, 이 규칙의 세부 사항은 각 모델에 따라 서로 다르게 적용될 수 있다. 예를 들어 첫 번째 규칙에서 고정된 경계 항복면과 현재 응력점을 가지고 투영 원점의 위치를 변경시키면 서로 다른 가상 응력점을 결정할 수 있다. Fig. 1은 가장 기본적인 형태의 방사 투영 법칙을 설명한다. 가상 응력점 $R(\sigma^*)$ 은 투영 원점 $O(\sigma_0)$에서 현재 응력점 $P(\sigma)$를 통과하는 직선과 경계면의 교점에 위치하며, 관련 유동법칙(associate flow rule)을 가정할 경우 $R(\sigma^*)$ 에서 경계면의 접면 방향은 소성변형률 증분(plastic strain increment) 벡터의 방향과 일치하게 된다. 이러한 방식은 현재 응력점 $P(\sigma)$ 에서 소성 변형률 증분 벡터의 방향을 구하기 위해 경계 항복면과 크기는 다르지만 현재 응력점을 포함하는 Fig. 1에서 점선으로 표시한 작은 크기의 가상 항복면을 가정하는 것과 동일한 과정이다. Fig. 1과 같은 경우에서는 현재 응력 변화에 따른 가상 항복면 변화는 고정된 투영 원점을 공유하면서 이루어진다. Al-Tabbaa and Wood(1989)

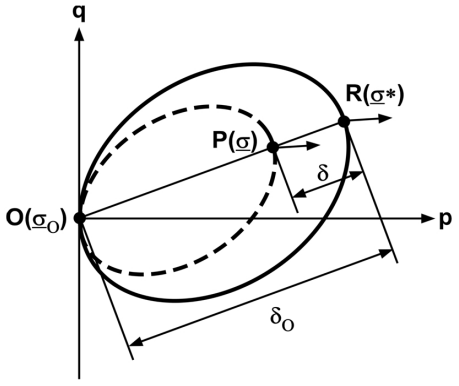

Fig. 1. Radial mapping rule in bounding surface plasticity model

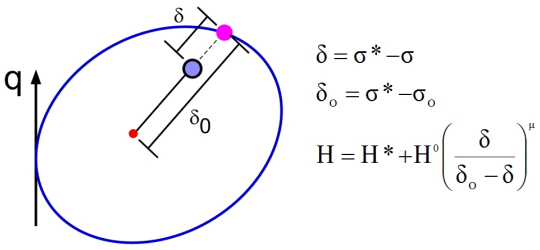

Fig. 2. Measuring distance in the radial mapping rule

의 이중 항복면 모델(bubble model)과 3-Surface Kinematic Hardening(3-SKH) 모델(Stallebrass, 1990)과 같이 경계 항복면 이외에 추가의 내부 항복면을 도입한 다중 항복면 모델(multi-surface plasticity model)은 가상 응력점을 찾는 규칙이 앞서 Fig. 1의 경우와는 다르다. 다중 항복면 모델에서는 현재 응력점이 내부 항복면에 닿으면 소성 변형을 발생시키는데, 이때 내부 항복면의 접면 방향과 동일한 방향을 가지는 경계 항복면의 접면이 발생하는 응력점 위치를 찾고 이 응력점을 가상 응력점으로 간주한다.

두 번째 규칙은 현재 응력점과 가상 응력점 간의 상대적인 거리를 측정하는 방법이다. 이를 위해 일반적으로 응력공간에서 현재 응력점(σ)과 가상 응력점(σ^*)의 거리인 δ, 그리고 투영 원점(σ_0)과 가상 응력점(σ^*)의 거리 δ_0를 구하고 이 두 개의 스칼라 량을 조합하여 두 번째 규칙을 만족하는 함수를 만들 수 있다. Fig. 2에서는 본 연구에서 사용한 거리 측정 방법을 보여주고 있다. 경계 항복면 내부의 소성계수 H는 다음과 같은 δ와 δ_0의 함수로 표현된다.

$$H = H^* + H^0 \left(\frac{\delta}{\delta_0 - \delta} \right)^{\mu} \tag{1}$$

여기서, H는 현재 응력점에 대한 소성계수, H^*는 가상 응력점에 대한 소성계수, H^0는 재료 상수로 일반적으로 현재 경계 항복면에서 소성계수의 최대값이며, μ는 또 다른 재료 상수이다. 소성계수는 간단히 소성 변형률 증분에 대한 현재 상태의 응력 증분의 비로 정의할 수 있다. 식 (1)을 살펴 보면, 현재 응력점이 투영 원점과 일치할 경우 $\delta = \delta_0$이므로 H의 값이 무한대가 되며 H = 0이 되어 소성변형이 발생하지 않음을 의미한다. 이후 현재 응력점이 투영 원점을 벗어나 경계면에 근접하게 되면 δ와 δ_0의 상대적인 거리에 따라 H값이 감소하게 되며, 현재 응력점이 경계면에 닿는 순간 $\delta = 0$이 되어 $H = H^*$가 된다. 즉 식 (1)은 경계면 소성 모델의 두 번째 규칙을 만족시킨다.

3. 투영 원점의 위치 확인 방법

경계면 소성 모델은 재료의 비선형적 응력-변형률 거동을 비교적 적절히 모사할 수 있지만, 세부 모델링 사항에 대한 실험적 검증은 아직 명확하게 이루어지지 않

고 있다. 예를 들면 Fig. 1의 경우와 같이 투영 원점이 응력 공간의 원점에 고정되어 있는 모델링 방법의 경우 응력 경로의 방향이 경계 항복면에 접근하면 소성 변형률이 발생할 수 있지만, 제하 응력 경로인 경우 순수 탄성 거동을 가정한다. 하지만 이 방법이 과연 재료의 실제 비선형성을 적절히 모사할 수 있는가는 명확하지 않다.

앞서 제시한 경계면 소성 모델의 두 가지 일반 규칙에서 공통적으로 가장 중요한 사항은 투영 원점의 선택이다. 가상 응력점의 위치에 대한 첫 번째 규칙은 결국 투영 원점과 현재 응력점 간의 상대적 위치와 관련된 문제이므로 투영 원점이 응력 공간 상의 어느 곳에 위치하느냐가 중요한 문제이다. 두 번째 규칙 역시 투영 원점 위치가 중요한데, 현재 응력점에서 경계면까지의 상대적 거리를 따지기 위해서는 투영 원점에서 가상 응력점까지의 기준이 되는 거리가 필요하기 때문이다. 따라서 경계면 소성 모델의 정확도는 투영 원점을 실제 재료의 거동에 맞추어 얼마나 정확하게 위치시키는 가에 달려있다.

여러 응력 경로 시험에서 측정된 응력-변형률 자료가 충분히 있을 경우, 이러한 투영 원점의 위치를 간접적으로 평가해 볼 수 있다. Fig. 3은 실험 결과를 이용하여 투영 원점의 위치를 확인하는 과정을 설명하고 있다. 먼저 응력 경로의 특정 응력점 σ_1에서 변형률 증분 $d\varepsilon$을 실험을 통해 알 수 있다고 하자. 주어진 탄성 모델을 통해 탄성변형률 증분은 쉽게 구할 수 있으므로 탄성변형률 증분을 전체 변형률 증분 $d\varepsilon$에서 제하면 소성 변형률 증분 $d\varepsilon^p$을 구할 수 있다. 소성 모델에서 관련유동법칙(associate flow rule)을 가정할 경우, 소성 변형률 증분의 방향은 소성 포텐셜과 동일한 항복면의 접면 방향

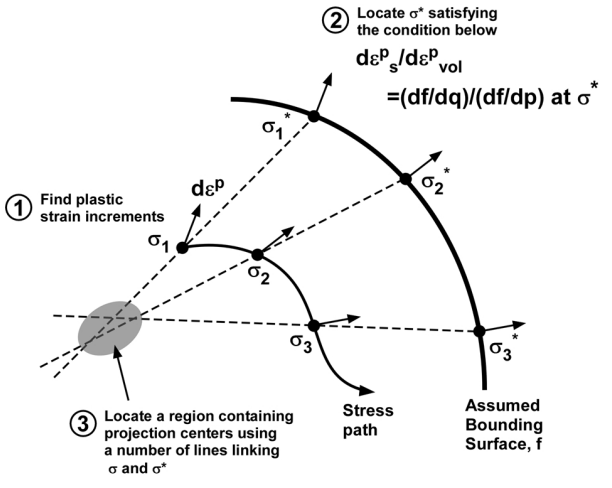

Fig. 3. Method to locate the projection origin

으로 구할 수 있다. 따라서 σ_1에 대한 가상 응력점 σ_1^*을 찾기 위해서는 현재 응력에서 발생한 소성 변형률 증분 방향과 동일한 접면 방향을 가지는 경계면 상의 점을 찾으면 된다. 마찬가지로 이후 응력 상태, 즉 σ_2 그리고 σ_3 등에 대해서도 동일한 방법을 이용하여 가상 응력점 σ_2^*와 σ_3^* 등을 Fig. 3과 보인 바와 같이 경계면 상에서 찾을 수 있다.

만약 σ_1에서 σ_3까지 진행되는 응력 경로에 대해서 투영 원점이 일정한 위치에 있다고 가정하자. 그리고 σ_1-σ_1^*, σ_2-σ_2^*, 그리고 σ_3-σ_3^*을 연결하는 다수의 직선을 생각해보자. 앞서 설명한 경계면 소성모델의 첫 번째 규칙을 재료가 정확하게 따른다면 이 다수의 직선들은 모두 하나의 투영 원점을 지나게 될 것이다. 또한 재료가 첫 번째 규칙을 정확하게 따른다면 투영 원점을 결정하기 위해서는 단 두 개의 직선이면 충분할 것이다. 하지만 실험적인 오차를 고려한다면 정확하게 하나의 투영 원점이 존재하기는 어려울 것이며, 다수의 직선의 교차점 들로 구성된 투영 원점의 집합을 Fig. 3과 같이 표현할 수 있을 것이다.

Fig. 1과 같은 이상적인 경우에서는 실험 결과로부터 얻은 투영 원점이 응력공간의 원점 또는 원점 근처를 지나야 한다. 하지만 앞서 설명한 바와 같이 투영 원점의 위치는 항상 고정일 필요는 없으며 현재 응력 변화에 따라 움직일 수 있으며, 이러한 경우 투영 원점의 위치를 찾기 위해서는 Fig. 3에 도시한 바와 같이 현재 응력점과 가상 응력점 간의 연결선들이 만들어내는 교점의 분포를 찾고 그 변화 패턴을 찾아야 한다.

4. 실험 재료 및 방법

본 연구를 위해 사용한 실험 재료는 미국 시카고 시내의 로버트 루리 암 센터(Robert Lurie cancer center) 건설 현장에서 블록 형태로 채취되어 교란이 최소화된 압축성 시카고 점토이다(Finno and Roboski, 2005). 블록 시료는 심도 10.4m에 위치한 Blodgett 층에서 채취되었다(Jung et al., 2007). Table 1에서는 시료의 물성치와 표준압밀시험 결과를 정리하였다.

삼축 응력 경로 시험을 위한 시편은 불교란 샘플 블록을 잘라 직경 71mm로 제작하였다. 응력 경로 시험을 위해 각 시편은 134kPa인 현장 연직 응력 σ'_{v0}에 맞게 K_0 조건으로 재압밀되었고, 이후 36시간 이상의 배수 크리프 과정을 거쳤다. 이후 각 시편에 대해 배수 조건

Table 1. Physical properties of testing materials

Physical properties	Values
Water content, w (%)	28.7~29.7
Liquid limit, w_l (%)	35~37.6
Plastic limit, w_p (%)	17.6~19.2
Specific gravity, G_p	2.71~2.73
Pre-consolidation yield stress, σ'_c (kPa)	189
Overconsolidation ratio, OCR	1.4
Compression index, C_c	0.25
Recompression index, C_r	0.04

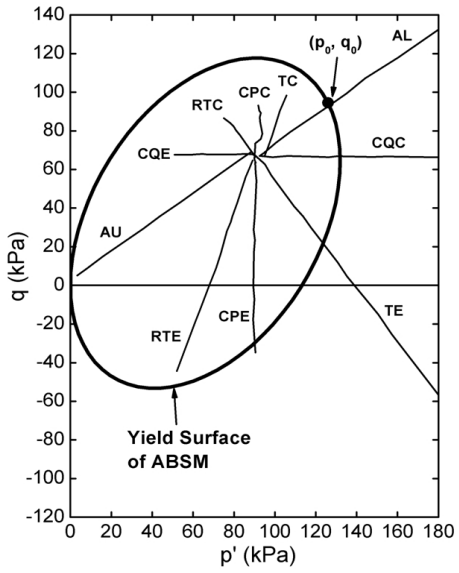

Fig. 4. Stress paths and bounding yield surface

상태에서 응력 경로 시험을 실시하였다. 시편의 멤브레인 위에 직접 부착된 소형 LVDT를 이용하여 시편 중앙부의 국부적인 변위를 측정하였고 이로부터 축 변형률과 방사 방향 변형률을 구하였다. 축 방향 변위을 구하기 위해 시편의 축 방향으로 나란히 부착된 두 개의 LVDT로부터 측정된 두 개의 변위를 평균하였다. 축 방향 하중은 셀 내부의 로드셀로 측정하였고, 축 하중을 방사 방향 변형률을 고려하여 구한 시편의 단면적으로 나누어 축 방향 응력을 구하였다. 시편 내부의 간극 수압은 셀 외부에 부착된 간극수압계로 측정하였다. 응력과 변형률은 자동화된 측정장비를 이용하여 5~20초 간격으로 측정되었다.

Fig. 4는 시카고 점토 시료에 대해 실시한 10개의 응력경로를 보여준다. 응력경로에 대한 기호는 Table 2에 정리하였다. 시료의 선행 압밀 하중은 189kPa로 측정되었고 K_0 값을 0.5로 가정한다면 시료의 초기 항복 응력

Table 2. Stress probe experiment

Symbol	Description
AU	Triaxial extension test at constant stress ratio, $\Delta q / \Delta p'$ = −0.78
AL	Triaxial compression test at constant stress ratio, $\Delta q / \Delta p'$ = +0.78
CPE	Triaxial extension test at constant mean normal stress
CPC	Triaxial compression test at constant mean normal stress
CQE	Triaxial extension test at constant deviator stress
CQC	Triaxial compression test at constant deviator stress
RTE	Triaxial extension test by decreasing axial stress
TC	Triaxial compression test by increasing axial stress
RTC	Triaxial compression test by decreasing radial stress
TE	Triaxial extension test by increasing radial stress

(initial yield stress)은 평균 주응력 p_0 = 126kPa과 축차응력 q_0 = 94.5kPa 이다. 평균 주응력(mean normal effective stress, p)과 축차 응력(deviatoric stress, q) 는 축대칭 응력 상태에서 다음과 같이 정의된다.

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r) \quad \text{그리고} \quad q = \sigma_a - \sigma_r \tag{2}$$

여기서, σ_a는 축 방향 응력이고, σ_r는 방사방향 응력이다. 본 논문에서 사용된 모든 응력은 특별한 언급이 없으면 모두 유효응력이다. 또한 체적변형률(volumetric strain, ε_{vol})과 전단변형률(shear strain, ε_s)은 다음의 식으로 정의된다.

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_a + 2\varepsilon_r \quad \text{그리고} \quad \varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_a - \varepsilon_r) \tag{3}$$

여기서, ε_a는 축 방향 변형률이고, ε_r는 방사방향 응력이다. Fig. 5는 Table 2에서 정리한 응력경로 시험으로 구한 응력-변형률 곡선을 보여준다.

본 연구에서 사용한 경계면 소성 모델에서는 식 (4)와 같이 Banerjee and Yousif(1986)가 제안한 이방 경계면 모델(anisotropic bounding surface, ABSM)의 경계면 함수를 사용하였다.

$$f = \frac{1}{G(\bar{\theta})^2}\left(\bar{q}^{-2} - \frac{1}{9}\frac{p}{p_0}q_0^2\right) - p_0 p + p^2 \tag{4}$$

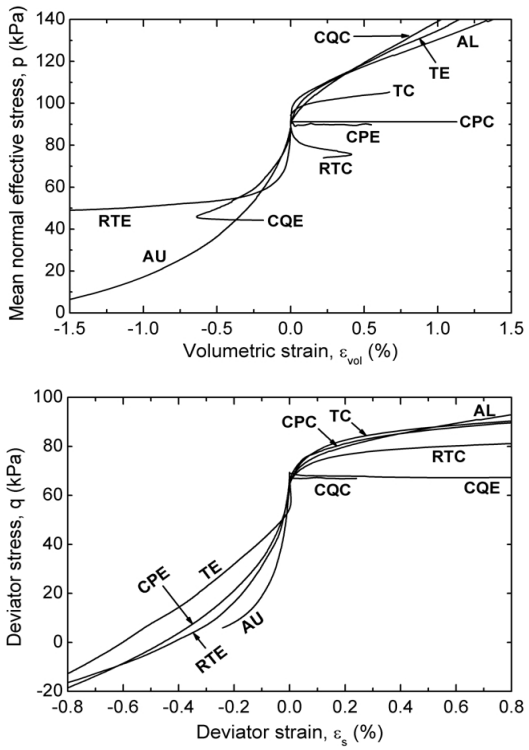

Fig. 5. Stress-strain relationships from stress probe tests: (a) Volumetric strain-mean normal stress relationships, (b) Shear strain-deviator stress relationships

여기서, p_0 와 q_0 는 시료의 초기 항복 응력인 항복면의 정점, $\bar{q} = q - (2/3)(q_0 / p_0)p$ 는 항복면의 형상을 결정하는 내부 변수이며, $G(\bar{\theta}) = 6\sin\phi/(3-\sin\phi\sin 3\bar{\theta})$ 는 내부 마찰각 ϕ로 표현된 한계 상태 선의 기울기이다. 삼축 응력 상태에서 $\sin 3\bar{\theta} = \pm 1$이다. 본 연구에서는 $G(\bar{\theta})$은 축 대칭 응력 상태에서 일정한 값이 되므로, ϕ = 30° 에 해당하는 값인 1.2로 정하였다. 식 (4)의 경계면은 Fig. 4에 함께 도시하였다.

앞서 설명한 바와 같이 응력경로시험으로 측정한 응력-변형률 자료에서 소성변형률 증분을 찾기 위해서는 탄성변형률 증분을 구해야 하는데, 이를 위해 사용 재료의 탄성 거동이 직교 이방 탄성 이론(cross-anisotropic elasticity)을 따른다고 가정하여 다음의 탄성 모델을 사용하였다.

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{vol}^e \\ d\varepsilon_s^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K & 1/J_{qp} \\ 1/J_{pq} & 1/3G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp \\ dq \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서, ε_{vol}^e 는 체적 탄성 변형률, ε_s^e 는 전단 탄성 변형률, K 는 체적 탄성 계수(elastic bulk modulus), G 는 전단 탄성 계수(elastic shear modulus), J_{qp} 는 평균 주응력 p 의 변화에 의한 전단 탄성 변형률 ε_s^e 의 변화를 나타내는 연관계수(coupling modulus), 그리고 J_{qp} 는 축차 응력 q 의 변화에 의한 체적 탄성 변형률 ε_{vol}^e 의 변화를 나타내는 연관계수이다. 식 (5)의 계수들은 다시 직교 이방 탄성론의 계수들과 다음과 같은 관계를 가진다.

$$K = \frac{1}{(1-4\nu_{vh})/E_v + 2(1-\nu_{hh})/E_h} \tag{6}$$

$$G = \frac{3}{4\left[(1+2\nu_{vh})/E_v + (1-\nu_{hh})/2E_h\right]} \tag{7}$$

$$J_{pq} = J_{qp} = \frac{3}{2\left[(1-\nu_{vh})/E_v - (1-\nu_{hh})/E_h\right]} \tag{8}$$

여기서, E_v와 E_h는 각각 연직방향과 수평방향 탄성계수(Young's modulus)이며, ν_{vh}는 연직방향 변형에 의한 수평방향 변형의 비를 나타내는 포아송비, 그리고 ν_{hh}는 수평방향 변형에 의한 또 다른 수평방향 변형의 비를 나타내는 포아송비이다. 또한 지반 재료의 연직방향과 수평방향 탄성계수는 각 해당 방향의 응력 함수로 다음과 같이 표현될 수 있다(Hardin and Black, 1966).

$$E_v = C_v p_a (\sigma_a / p_a)^m \quad \text{와} \quad E_h = C_h p_a (\sigma_r / p_a)^m \tag{9}$$

여기서, C_v와 C_h는 재료 상수, p_a는 응력을 무차원화하기 위해 도입한 대기압(101.3kPa)이며, m은 응력 수준에 따른 탄성계수의 증가를 표현하기 위한 지수로 대부분의 토질에서 0.5의 값을 가진다. 벤더 엘리먼트를 이용하여 측정한 시카고 점토의 탄성 특성에 대한 기존의 연구 결과(Jung et al., 2007)를 토대로 C_v와 C_h는 동일하게 500kPa로 설정하였고, 등방 탄성 재료로 가정하여 포아송비는 0.2로 정하였다.

5. 해석 결과

Fig. 6은 총 10개의 응력경로시험에서 측정된 소성변형률 증분의 방향 변화를 보여준다. 앞서 설명한 바와 같이 소성 변형률 증분은 현재 응력 상태에 대해서 식 (5)를 이용하여 탄성 변형률 증분을 구하고 이 값을 전체 변형률 증분에서 제하여 구하였다. Fig. 6에서 p-q 응력

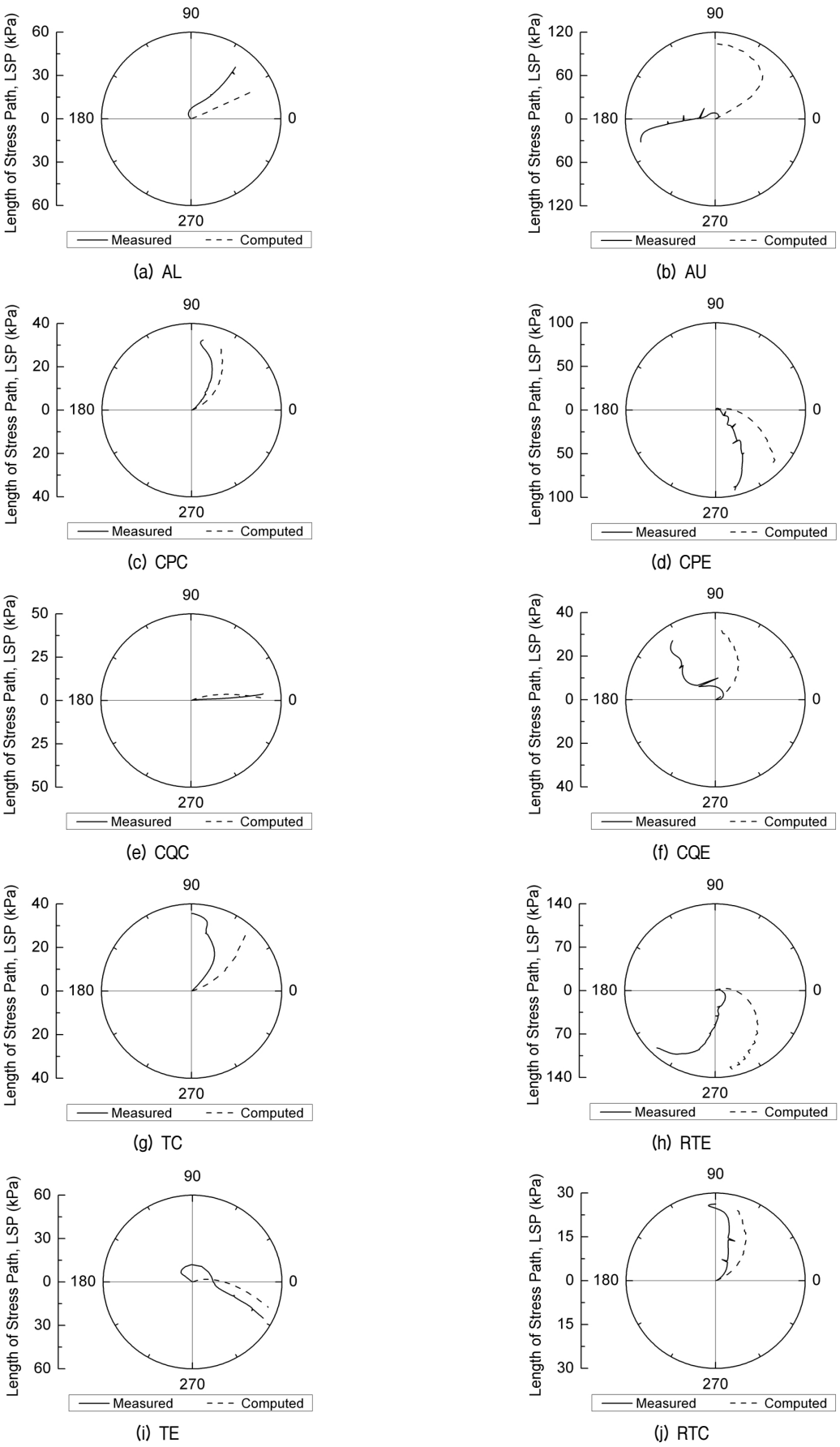

Fig. 6. Change in orientation of plastic strain increments for different stress probes

공간에서 벡터로 표현되는 소성변형률 증분의 방향을 각도 $\beta = \tan^{-1}(d\varepsilon_s^p / d\varepsilon_{vol}^p)$ 로 정의하였다. 즉 β = 0° 는 소성 변형률 증분의 방향이 평균 주응력 축의 방향과 일치함을 의미하고, β = 90° 는 축차 응력 축의 방향을 의미한다. 실측된 결과로 구한 소성 변형률 증분의 방향은 Fig. 6에서 실선으로 표시하였고, 현재 응력점에 대한 가상 응력점을 식 (4)로 표현된 경계면 상에서 구하고 이때의 접면 방향을 각도로 표시한 계산 결과를 점선으로 표시하였다. 경계면 상의 가상 응력점을 구할 때 투영 원점은 p-q 응력 공간 상의 원점으로 정하였다. Fig. 6에서 실선 또는 점선의 방향은 실제 응력 경로의 방향과는 무관하다.

Fig. 6에서 응력 경로의 길이(Length of stress path, LSP)는 p-q 응력 공간 상에서 재하 전 초기 응력점과 현재 응력점 간의 거리이다.

$$LSP = \sqrt{(p - p_i)^2 + (q - q_i)^2} \tag{10}$$

여기서, p_i와 q_i는 응력 경로의 시작 응력점이다. Fig. 6을 살펴보면 CPC, CQC, TE와 RTC 등의 응력 경로에 대해서는 실측 결과와 계산 결과가 비교적 유사하게 나오지만, 대부분의 경우 응력 경로가 진행되면서 30도 이상의 차이가 발생한다. Fig. 4에서 제시한 바와 같이 AL 경로는 p-q 응력 공간 상에서 초기 응력점에 대한 응력비와 동일한 응력비를 유지하면서 하중을 가하는 시험상태이다. 식 (4)로 표현된 경계면 모델은 AL 경로가 항복면의 대칭축을 이루며, 따라서 재하 중 계산 결과의 방향은 약 28도의 값으로 일정하다. 하지만 AL 경로의 실험결과를 살펴보면 LSP가 10kPa 이하일 경우 150도 정도에서 시작한 후 빠르게 90도까지 회전한 후 LSP가 15kPa 이상으로 증가하면 대략 58도 정도로 수렴하고 있다. AU 경로는 AL 경로와 마찬가지로 일정한 응력비를 유지하면서 하중 수준을 낮추는 응력 경로이지만 Fig. 4에서 보인 바와 같이 실험 상의 이유로 경로가 원점을 지나지 못하였다. 따라서 AU 경로에 대한 계산 결과를 보면 초기 재하에서는 30도 근처에서 시작하지만 응력경로가 진행되어 LSP가 약 60kPa이 되면 각도가 빠르게 변하여 최종적으로 90도에 도달한다. 하지만 실험 결과에서는 초기 각도변화가 일어난 후 LSP가 10kPa 이상이 되면 대략 200도 정도에서 일정한 값을 유지하는 데 이는 계산 결과와는 상당히 다른 양상이다. 이렇게 계산 결과가 실측 결과와 큰 차이를 보이는 이유는 계산 결과에서 투영 원점이 p-q 공간의 원점으로 고정되어 있기 때문이다. 즉 AU 경로에서는 실측 결과는 응력 경로의 진행방향과 유사하게 체적 변형률과 축차 변형률 증분이 모두 감소하지만, 계산 결과에서는 원점으로 고정된 투영 원점으로 인해 가상 응력점이 경계면 상에서 0～90도 범위에 놓이게 되며 체적 및 축차 변형률 증분이 모두 양의 값을 가진다.

CPC 경로와 CPE 경로는 평균 주응력을 일정하게 유지한 상태에서 축차 응력을 증가시키거나 감소시키는 경로이다. CPC 경로의 계산 결과와 실측 결과를 비교해 보면 상당히 유사하게 60～90도 사이에서 변하고 있으며 계산과 실측 결과의 차이도 10도 내외이다. 하지만 CPE 경로의 경우 계산과 실측 결과의 차이가 30도 내외로 CPC 경로에 비해서는 큰 차이이다.

CQC 경로와 CQE 경로는 축차 응력을 일정하게 유지한 상태에서 평균 주응력을 증가시키거나(CQC) 감소시키는(CQE) 경로이다. CQC 경로의 경우 계산과 실측 결과가 매우 유사하다. 하지만 CQE 경로의 경우 계산 결과는 45～90도의 범위에서 변하지만 실측 결과는 대략 120도 근처로 향하였다. 비록 계산과 실측 결과의 각도 차이는 30도 정도이지만, 45～90도 범위에 놓인 계산 결과는 체적 변형률 증분이 증가함을 의미하고 120도 범위에 놓인 실측 결과는 체적 변형률 증분이 감소함을 의미하게 되므로 공학적으로 큰 차이가 있다. TC 경로와 RTE 경로 역시 실측과 계산 결과는 약 30도 내외의 차이가 발생하지만, 응력 경로가 진행됨에 따라 변하는 각도의 패턴은 서로 유사하다. TE와 RTC 경로는 다른 경로에 비해 상당히 유사한 결과를 보인다.

Fig. 6의 결과를 종합하면 실측 결과와 계산 결과는 전반적으로 약 30도 정도의 차이가 있지만, AL, CPC, CQC, TC, TE 등의 하중 수준이 증가하는 응력 경로에서는 실측과 계산 결과가 상당히 유사하다. 하지만 AU, CPE, CQE, RTE 등의 하중 수준이 감소하는 응력 경로에서는 실측과 계산 결과 간에 차이가 발생한다. 단일 항복면을 이용하는 고전 탄소성 모델링 이론의 관점에서는 AU, CPE, CQE, RTE 등의 응력 경로의 방향은 제하(unloading) 방향이며, 따라서 재료의 거동을 탄성으로 간주할 수 있다. 이러한 관점에서 본다면 AU, CPE 등의 제하 응력 경로에서 발생한 비선형성은 소성 변형률에 의해 발생된 것이 아니며, 일종의 비선형 탄성 거동이라고 간주할 수도 있다. 물론 제하 응력 경로에서

나타나는 비선형 거동이 탄성 거동인지 아니면 소성 변형률에 의해 발생한 것인지 확인하기 위해서는 실제 제재하(reloading) 과정을 거쳐서 영구 소성 변형이 발생하였는지 확인하여야 할 것이다. 일반적인 경계면 모델링의 관점에서도 이러한 제하 응력 상태에서의 소성 변형을 허용할 것인지에 대해서는 명확하지 않지만, 본 연구에서는 제하 응력 상태에서의 소성 변형을 허용하였다.

앞서 언급한 바와 같이 투영 원점의 위치는 원점에 고정될 필요는 없으며, 투영 원점의 위치를 파악하기 위해서는 2개 이상의 현재 응력점과 가상 응력점을 잇는 직선들의 교점을 이용할 수 있다. 응력 경로 상의 무수히 많은 현재 응력점을 이용할 수 없으므로 적절한 간격으로 몇 개의 응력점을 특정 응력 경로 상에서 선택한 후 이 점들에 대해서 투영 원점의 위치를 파악한 것이 Fig. 7에 제시되어 있다.

Fig. 7의 AL와 AU 경로를 살펴보면 재하 초기에는 직선의 교점이 대략 초기 응력점 근처에 위치하고 있다. 하지만 LSP가 25 kPa 이상이 되면 초기 위치에서 벗어

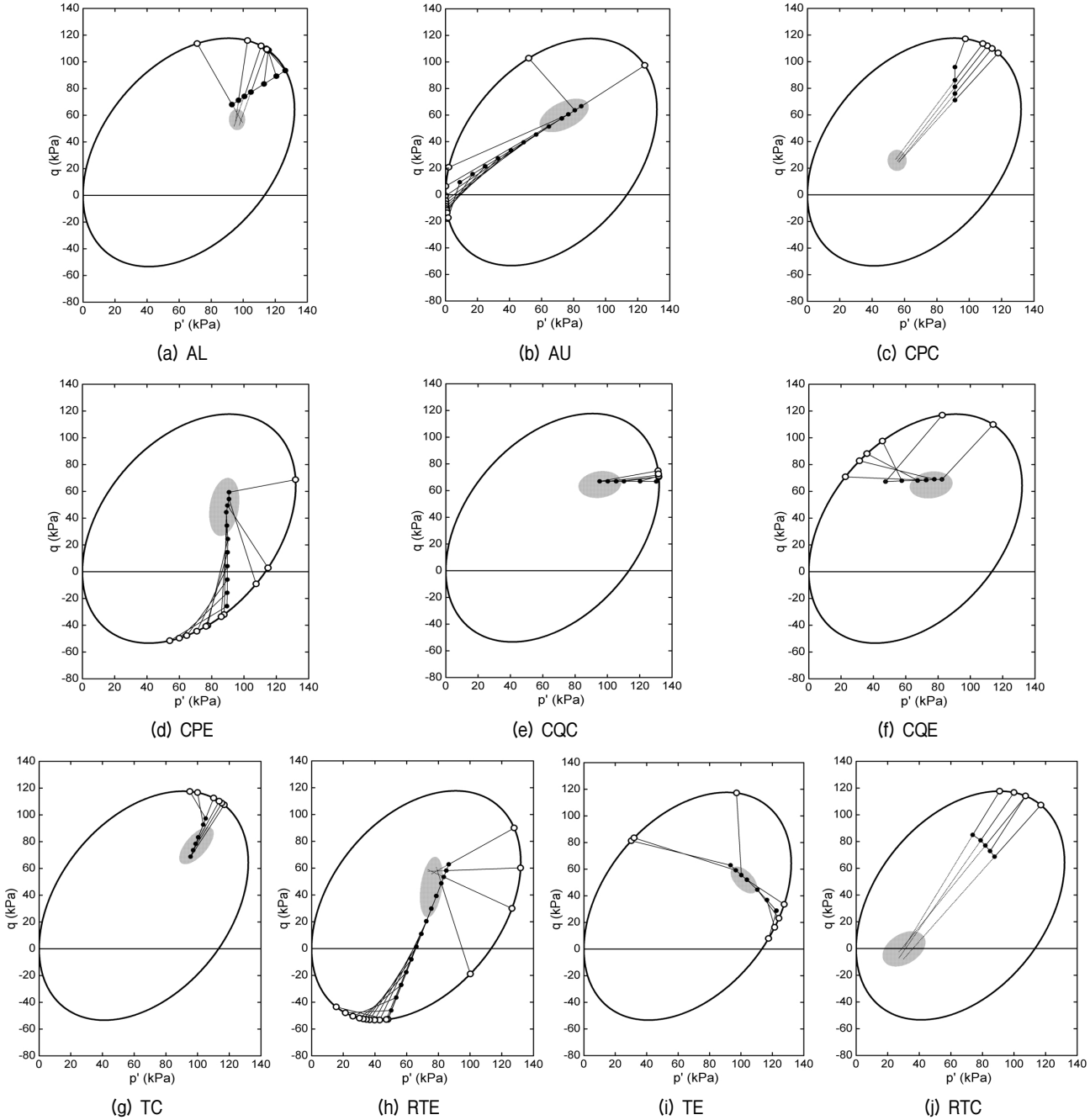

Fig. 7. Moving projection origin for different stress probes: (a) AL, (b) CMS, (c) CQL, (d) TC, (e) TE, (f) RTC

나게 된다. CPC 경로를 살펴보면 재하 초기에 경계 항복면의 중앙 부분에 교점 군을 형성하지만 앞서 AL과 AU 경로와는 달리 초기 응력점과는 차이가 있다. CPE 경로의 경우는 AL과 AU 경로와 같이 재하 초기에 교점 군을 형성한 후 재하가 진행될수록 교점이 응력 경로의 방향을 따라 움직인다. CQC 경로와 CQE 경로, 그리고 TC 경로와 RTE 경로의 결과를 각각 비교하면 재하 응력 경로와 제하 응력 경로에서 서로 다르게 나타나는 교점, 즉 투영 원점의 이동 상태를 보다 정확하게 확인할 수 있다. CQC와 TC 경로에서는 앞서 AL 경로와 같이 초기 응력점 근처에서 투영 원점이 형성된다. 이후 응력 경로가 진행될수록 투영 원점이 점차 응력 경로의 방향을 따라 이동한다. 하중 수준이 감소하는 제하 응력 경로인 CPE와 RTE 경로에서는 초반에는 재하 응력 경로와 마찬가지로 초기 응력점 근처에서 투영 원점이 형성되지만, 이후 시험이 진행되면서 투영 원점이 응력 경로의 방향을 따라 빠르게 이동하고 이후 응력 경로의 방향을 따라 이동한다. TE 경로와 RTC 경로에서도 이와 유사한 결과를 보인다.

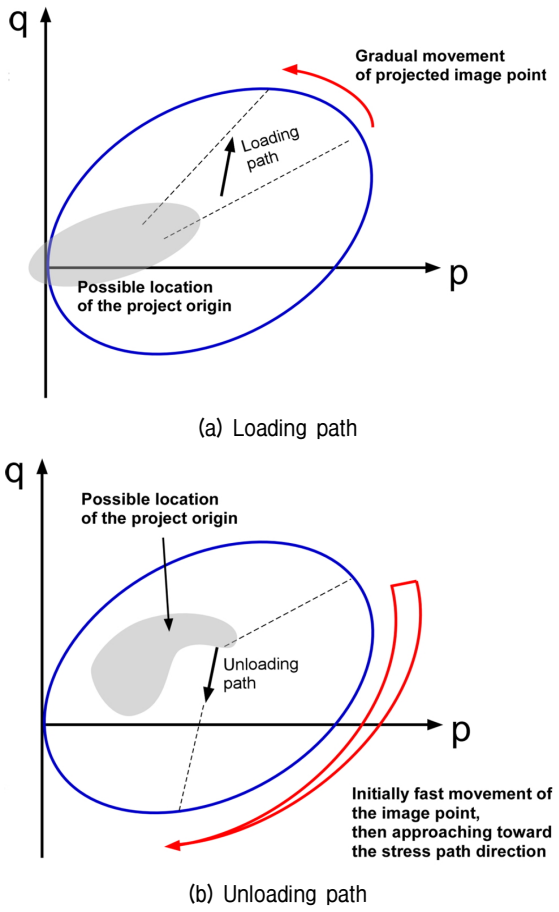

Fig. 8. Movement of projection origin for different loading and unloading paths: (a) loading path, (b) unloading path

다양한 응력 경로에 대한 결과를 종합해 보면 Fig. 8에 설명한 바와 같이 투영 원점의 변화에 대해 정리할 수 있다. 먼저 AL, CPC, CQC, TC, TE 경로와 같이 하중 수준이 증가하는 재하 응력 경로인 경우 시험 초기에 투영 원점이 초기 응력점 근처에 형성된다. 이후 시험이 진행되면서 투영 원점은 응력 경로의 방향을 따라 점차 움직인다. 반면 AU, CPE, CQE, RTE, RTC 경로와 같이 하중 수준이 감소하는 제하 응력 경로인 경우 재하 응력 경로와 마찬가지로 시험 초기에 투영 원점이 초기 응력점 근처에서 형성되지만, 이후 투영 원점은 응력 경로의 방향을 따라 빠르게 회전하고 응력 경로의 진행 방향을 따라 이동하게 된다. 이러한 투영 원점의 이동을 고려하여 경계면 소성 모델을 개량한다면 보다 정확한 흙의 응력-변형률 거동을 예측할 수 있을 것이다.

6. 결 론

본 연구에서는 시카고 점토에 대해 실시한 배수 응력 경로 시험결과를 분석하여 경계면 모델의 방사 사상 법칙을 검토하고 이를 토대로 새로운 사상 법칙을 제안하고자 하였다. 서로 다른 방향을 가진 총 10개의 응력 경로 시험 결과로부터 얻은 응력-변형률 관계를 분석하여 소성 변형률 증분을 계산하였고, 이로부터 응력 경로 진행 중 소성 변형률의 방향을 실험적으로 분석하였다. 투영 원점의 위치를 확인하기 위해 경계 항복면 상에서 가상 응력점을 찾았고 현재 응력점과 연결한 직선을 이용하여 투영 원점의 위치를 파악하였다. 각 응력 경로의 결과를 분석하여 다음의 사항을 확인할 수 있었다.

(1) 고전적인 경계면 소성 모델과 같이 투영 원점을 p-q 공간 상의 원점에 고정시켰을 경우, 하중 수준이 증가하는 응력경로에서는 실측과 계산 결과가 상당히 유사하지만, 하중 수준이 감소하는 응력 경로에서는 계산 결과가 실측 결과와 약 30 도 이상의 방향 각도 차이가 발생하였다.

(2) 실측 소성변형률 증분에 해당하는 가상 응력점을 찾고 이를 현재 응력점과 연결하여 p-q 공간 상에 직선을 그으면, 응력 경로 진행 중 다수의 직선에 대한 교점으로부터 투영 원점을 찾을 수 있다. 하중 수준이 증가하는 재하 응력 경로에서는 시험 초기에 투영 원점이 초기 응력점 근처에서 형성되고 시

험이 진행되면서 응력 경로의 진행 방향으로 서서히 움직인다. 하중 수준이 감소하는 제하 응력 경로에서는 시험 초기에 투영 원점이 초기 응력점 근처에서 형성된 후 응력 경로의 방향에 따라 빠르게 회전하고 다시 응력 경로의 진행 방향을 따라 이동하게 된다.

(3) 시카고 점토에 대한 응력 경로 시험 결과를 분석해 본 결과, 경계면 소성 모델에서 투영 원점은 특정 위치에 고정되지 않으며, 초기 응력점 근처에서 형성된 후 재하 방향에 따라 이동한다. 따라서 이러한 투영 원점의 이동을 구성 모델에 반영한다면 보다 정확한 흙의 응력-변형률 거동을 경계면 소성 모델을 통해 예측할 수 있을 것이다. 향후 타 지역의 점성토에 대한 유사한 시험 결과가 수집되면 본 논문의 결과와 비교 가능하리라 판단된다.

감사의 글

본 연구 결과의 정리는 한국건설기술연구원의 주요사업인 '비용절감형 석션기초 기술 개발' 과제의 지원을 받아 수행되었으며 이에 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Al-Tabbaa, A. and Wood, D. M. (1989), "An experimentally based 'bubble' model for clay", *Proceedings of NUM0G3*, pp.91-99.
2. Banerjee, P. K., and Yousif, N. B. (1986), "A plasticity model for the mechanical behavior of anisotropically consolidated clay", *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.10, No.5, pp.521-541.
3. Dafalias, Y. F. (1986), "Bounding surface plasticity: 1. Mathematical foundation and hypoplasticity", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol.112, No.9, pp.966-987.
4. Dafalias, Y. F. and Herrmann, L. R. (1982), "A bounding surface formulation of soil plasticity", Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, Pande, G. N. and Zienkiewicz, O. C., Eds., John Wiley and Sons.
5. Dafalias, Y. F. and Popov, E. P. (1975), "A model of nonlinearly hardening materials for complex loadings", *Acta Mechanica*., Vol.21, pp.173-192.
6. Finno, R. J. and Roboski, J. F. (2005), "Three-dimensional responses of a tied-back excavation through clay", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.131, No.3, pp.273-282.
7. Hardin, B. O. and Black, W. L. (1966), "Sand stiffness under various triaxial stresses", *Journal of Soil Mechanics and Foundation Division*, Vol.92, No.2, pp.27-42.
8. Jardine, R. J. (1985), Investigations of pile-soil behavior, with special reference to the foundations of offshore structures, Imperial College, University of London.
9. Jardine, R. J. (1992), "Some observations on the kinematic nature of soil stiffness", *Soils and Foundations*, Vol.32, No.2, pp.111-124.
10. Jung, Y. -H., Cho, W., and Finno, R. J. (2007), "Defining yield from bender element measurements in triaxial stress probe experiments", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, Vol.133, No.7, pp.841-849.
11. Jung, Y. -H. and Yune, C. -Y. (2011), "Reappraisal of the anisotropic bounding surface model of small-strain behavior for clays", *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol.15, No.3, pp.463-472.
12. Krieg, R. D. (1975). "A practical two-suraface plasticity theory", *Journal of Applied Mechanics*, Vol.42, pp.641-646.
13. Stallebrass, S. E. (1990), The Effect of Recent Stress History on the Deformation of Overconsolidated Soils, PhD Thesis, City University, UK.
14. Tatsuoka, F., Jardine, R. J., Lo Presti, D. C. F., Di Benedetto, H., and Kodaka, T. (1997), "Characterising the pre-failure deformation properties of geomaterials", *Proceedings of 14th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol.4, pp.447-482.

(접수일자 2012. 12. 24, 심사완료일 2012. 12. 27)