

점의 곡선위 직교투영에 대한 분석

고광희[†]

광주과학기술원 기전공학부

Analysis on Point Projection onto Curves

Kwang Hee Ko[†]

School of Mechatronics, Gwangju Institute of Science and Technology

Received 18 August 2012; received in revised form 2 January 2013; accepted 3 January 2013

ABSTRACT

In this paper, orthogonal projection of a point onto a 2D planar curve is discussed. The problem is formulated as finding a point on a curve where the tangent of the curve is perpendicular to the vector connecting the point on the curve and a point in the space. Existing methods are compared and novel approaches to solve the problem are presented. The proposed methods are tested with examples.

Key Words: Curve, Orthogonal projection, Point

1. 서 론

공간상의 점을 곡선에 직교 투영(orthogonal projection)하는 작업은 모델링, CAD/CAM, 컴퓨터 그래픽스 등에서 많이 사용된다. 특히, 점과 곡선 사이의 거리를 구하거나, 곡선 상의 점에 상응하는 매개변수 값을 구할 때 사용되며, 점들을 근사하는 곡선을 구할 때, 매개변수 값을 조절하는 방법으로도 사용된다^[1].

점의 직교 투영 문제는 수학적으로 잘 정립되어 있다. 그렇지만, 특별한 경우를 제외하고는 대부분 해석적으로 해결할 수 없기 때문에 각종 수치해석법이 적용되어야 한다. 주어진 식을 직접 푸는 방법 중, 대표적으로 Newton 방법에 기초한 수치해석법^[2]이 널리 사용될 수 있다. 그 외에, 점

근방에서 곡선의 모양을 원으로 근사해서 점진적으로 직교 투영점을 구하는 방법이 소개되었으며^[3] 분할 기법을 사용해서 NURBS 곡선위로 점의 직교 투영점을 구하는 방법이 제시되었고^[4,5], 거리 함수를 기반으로 circular clipping 방법을 기반으로 투영점을 구하는 방법^[6]이 소개되었다. 이와 같은 방법들은 주로 Newton-Raphson 방법 대비 안정성을 향상시키는 관점에서 논의되었다.

본 논문에서는 점의 곡선상 직교투영 문제를 설명하고, 기존의 1차 미분을 기반으로 한 Newton-Raphson 방법과 2차 미분을 사용한 곡률원 근사 방법을 분석하였다. 또한, 기존의 방법이 가지고 있는 문제를 해결하기 위해, 주어진 곡선의 기하학적 특성을 바탕으로 고차항을 고려한 새로운 방법을 제안하고자 한다.

[†]Corresponding Author, khko@gist.ac.kr
©2013 Society of CAD/CAM Engineers

2. 직교 투영 문제 정립

점의 곡선상 투영 문제는 다음과 같이 정식화될 수 있다. 주어진 점을 \mathbf{P} 라 하고, 매개 곡선을 $\mathbf{c}(s)$ (여기서 s 는 매개변수이며, 본 논문에서는 다른 명칭이 없으면 arc-length로 가정한다)라 하면 곡선 위의 직교 투영점 $\mathbf{c}(s)$ 는 다음 식을 만족해야 한다.

$$(\mathbf{P}-\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s) = 0 \quad (1)$$

이 식은 직교 투영점 $\mathbf{c}(s)$ 에서의 접선 벡터와 $\mathbf{c}(s)$ 에서 점 \mathbf{P} 까지의 벡터는 서로 직교해야 한다는 것을 의미하며, 위 식을 만족하는 곡선 위의 점을 구하거나 그에 대응되는 매개변수 값 s 를 구하면 곡선 위에 있는 투영점을 구할 수 있다.

3. 계산 방법

방정식 (1)은 일반적으로 비선형이기 때문에 해석적인 방법으로 해를 구하는 것은 거의 불가능하다. 대신, 수치적으로 근사해를 구하는 접근법이 일반적으로 사용되고 있다. 가장 단순하게 사용할 수 있는 방법으로 이분법^[2]을 고려할 수 있으나, 주어진 식의 해석적 형태가 주어지므로 식의 미분값을 사용하는 방법이 많이 사용되고 있다. 본 절에서는 미분값을 사용하는 방법 중 대표적인 Newton-Raphson 방법을 소개하고, 기하학적인 특성을 사용한 방법들에 대해서 제안하고자 한다.

3.1 Newton-Raphson 방법

Newton-Raphson 방법은 주어진 방정식의 미분값을 이용해서 해를 점진적으로 구하는 방법이다. 주어진 방정식 (1)을 $f(s)$ 라고 하면, 다음과 같이 구할 수 있다. 초기 조건인 $s_1 = s_1^0$ 이 주어졌을 때,

$$s_{n+1} = s_n - \frac{f(s_n)}{f'(s_n)}, \quad \text{단, } f'(s_n) \neq 0 \quad (2)$$

의 식을 반복해서 계산하면서 s 를 갱신해 나가게 되며, $|s_{n+1} - s_n| < \delta$ 이 되면 해가 수렴했다는 것을 의미하므로 반복을 멈추게 된다. 이 방법은 수렴 속도가 일반적으로 빠르며, 안정적으로 해를 구할 수 있다. 그렇지만, 반복계산을 시작하는 초기 값

에 수렴 여부가 결정이 되며, 또한 함수의 첫 번째 미분 값이 0이 될 경우 특이점(singular point)으로 해석을 해야 하고, 식 (2)는 사용될 수 없다. 이를 위해서, 특이점에서 사용될 수 있는 해석 방법을 적용해야 하는 단점이 있다. 만일 직교 투영점 중에서 최소거리를 갖는 직교 투영점을 구하는 것으로 문제를 한정한다면, 최적화 관점에서 접근할 수 있다. 이 경우, 식 (1) 대신에 식 $f(s) = (\mathbf{P}-\mathbf{c}(s)) \cdot (\mathbf{P}-\mathbf{c}(s))$ 을 최소화 하며 식 (1)을 만족하는 s 를 구하는 문제로 바꿀 수 있으며, 이 문제의 효과적인 해결을 위해 Levenberg-Marquardt 방법^[2]을 고려할 수 있다.

3.2 1차 방법

1차 방법은 방정식 (1)에서 $\mathbf{c}(s)$ 를 1차 미분항까지 근사해서 구하는 방법이다. 1차 미분까지 고려해서 근사하면, $s_i = 0$ 으로 가정해도 무방하므로, 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mathbf{c}(s) \cong \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}'s \quad (3)$$

이를 사용해서 방정식 (1)을 표현하면

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}-\mathbf{c}(0)-\mathbf{c}'s) \cdot \mathbf{c}' &= 0 \\ s &= \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{c}' - \mathbf{c}(0) \cdot \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \end{aligned} \quad (4)$$

이 된다. 이 방법은 Fig. 1에서와 같이 곡선이 곡선 위에 있는 점 근처에서 접선으로 근사 된다고 가정하고, 주어진 점을 접선에 직교 투영하는 방법이다. 즉, 점 $\mathbf{c}(0)$ 에서 접선을 구하고, 이 접선에 직교 투영하는 점 \mathbf{Q} 를 구한다. 점 $\mathbf{c}(0)$ 에서 \mathbf{Q} 까지의 거리를 사용해서 매개변수 값 s^* 를 구하고, 새

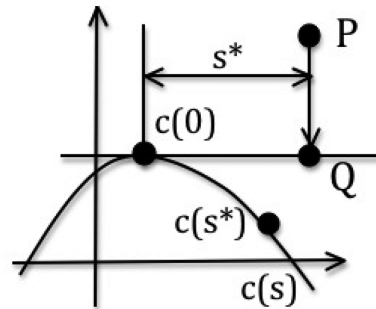


Fig. 1 Illustration of the First Order Method

로운 점 $\mathbf{c}(s^*)$ 를 계산한 후, 위 과정을 반복하게 된다. 이렇게 하면 점진적으로 직교 투영점을 구하게 된다.

초기 점을 $\mathbf{c}(s_i)$ 라 할 때, 접선은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}(s_i) + \frac{\mathbf{c}'(s_i)}{|\mathbf{c}'(s_i)|}s = \mathbf{c}(s_i) + \mathbf{t}s \quad (5)$$

주어진 점 \mathbf{P} 의 $\mathbf{T}(s)$ 에 있는 직교 투영점은 해석적으로 쉽게 구할 수 있다. 즉, $s_i = 0$ 이라고 가정하면, 점 \mathbf{P} 의 직교점 \mathbf{X}_p 는

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}_p - \mathbf{c}(s_i)) \cdot (\mathbf{X}_p - \mathbf{P}) &= 0 \\ \mathbf{t}s \cdot (\mathbf{c}(s_i) + \mathbf{t}s - \mathbf{P}) &= 0 \\ (\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}s + (\mathbf{c}(s_i) \cdot \mathbf{t} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{P}))s &= 0 \\ s = \frac{(-\mathbf{c}(s_i) \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{P})}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}}, s = 0 & \quad (6) \end{aligned}$$

으로 주어진다. 여기서, $s = 0$ 인 경우는 제외한다. 따라서 $s_{n+1} = s_i + s$ 가 되며, 이 계산을 해가 수렴할 때까지 반복한다.

3.3 곡률원 근사 방법

곡률원 근사 방법은 Hu and Wallner^[3]에 의해서 제시되었다. 곡선 위에 있는 점 근처의 곡선의 형상을 점에서의 곡률반경을 가진 원으로 근사시킨 후, 원에 직교 투영점을 구하는 것이다. 이는 1차 방법인 접선에 투영점을 구하는 것과 비슷하며, 단지 접선 대신 원으로 대신하는 방법이다. Fig. 2에서 보여진 바와 같이 점 $\mathbf{c}(0)$ 에서 곡률원을 구한다. 점 $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ 라 할 때, $\mathbf{c}(0)$ 에서 곡률 κ 는 다음과 같이 구한다.

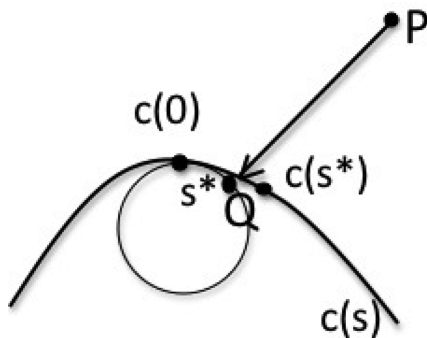


Fig. 2 Illustration of a method using a curvature circle

$$\kappa = \frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (7)$$

곡률원의 반지름은 $\rho = 1/\kappa$ 로 주어지고, $\mathbf{c}(0)$ 에서 수직 벡터 \mathbf{n} 의 방향으로 주어지게 된다. 여기서 수직 벡터 \mathbf{n} 은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{n} = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (8)$$

이렇게 구한 곡률원의 중심을 \mathbf{O} 라고 하며, $\mathbf{O} = \mathbf{c}(0) + \rho\mathbf{n}$ 로 구할 수 있다. 다음, 점 \mathbf{P} 에서 곡률원에 직교 투영점을 구한다. 이는 곡률원과 \mathbf{P} 와 \mathbf{O} 를 잇는 선분의 교점이 되며, 이 교점을 \mathbf{Q} 로 표시한다. 곡률원을 $\mathbf{R}(x, y)$ 이라 하고, 점 \mathbf{P} 와 \mathbf{O} 를 잇는 선분을 $\mathbf{L}(e)$ 라고 하자. 그러면, 곡률원 $\mathbf{R}(x, y)$ 은 $(\mathbf{R}(x, y) - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{R}(x, y) - \mathbf{O}) = \rho^2$ 이 되고, $\mathbf{L}(e)$ 는 $\mathbf{L}(e) = \mathbf{P}(1-e) + \mathbf{O}e$, ($0 \leq e \leq 1$) 이 된다. 이럴 경우, 곡률원과 선분의 교차점에서는 다음의 식이 만족해야 한다.

$$(\mathbf{L} - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{L} - \mathbf{O}) = \rho^2 \quad (9)$$

이를 정리하면, 다음과 같으며,

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}(1-e) + \mathbf{O}e - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{P}(1-e) + \mathbf{O}e - \mathbf{O}) &= \rho^2 \\ (\mathbf{P}(1-e) - \mathbf{O}(1-e)) \cdot (\mathbf{P}(1-e) + \mathbf{O}(1-e)) &= \rho^2 \\ (1-e^2)(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O}) &= \rho^2 \end{aligned} \quad (10)$$

식 (9)를 만족하는 e 는

$$e = 1 \pm \frac{\rho}{\sqrt{(\mathbf{P} - \mathbf{O}) \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{O})}} \quad (11)$$

으로 구할 수 있고, 이중 $0 \leq e \leq 1$ 을 만족하는 e 를 선택한다. 이후, 식 $\mathbf{L}(e)$ 에 대입하면 원하는 점 \mathbf{Q} 를 구할 수 있다. 직교점 \mathbf{Q} 를 구한 다음, $\mathbf{c}(0)$ 에서 \mathbf{Q} 까지의 원호의 길이 s^* 을 구한다. 곡률원의 반지름이 ρ 이고, 두 벡터 $\mathbf{c}(0) - \mathbf{O}$ 와 $\mathbf{Q} - \mathbf{O}$ 의 각도를 θ 라 하면 $s^* = \rho\theta$ 가 된다. 곡선 $\mathbf{c}(t)$ 상에서 s^* 에 해당하는 파라미터 Δt 는

$$\Delta t \approx \sqrt{\frac{2|\mathbf{c}' \times (\mathbf{Q} - \mathbf{c}(0))|}{\kappa|\mathbf{c}'|^3}} \quad (12)$$

으로 구할 수 있으며, Δt 의 부호는

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{c}(0)) \quad (13)$$

을 사용해서 결정한다. 이렇게 구한 Δt 를 사용해서 곡선상의 근사 직교 투영점 $\mathbf{c}(\Delta t)$ 를 구한다. 이후, $\mathbf{c}(\Delta t)$ 를 기준점으로 위의 과정을 반복하게 되며, 해가 수렴할 경우, $\Delta t \ll 0$ 이 되면 반복을 멈추게 된다. 이 과정을 통해 직교 투영점을 구할 수 있다.

3.4 2차 방법

2차 방법은 방정식 (1)에서 $\mathbf{c}(s)$ 를 2차 미분항까지 근사해서 구하는 방법으로 정의할 수 있으며, 본 논문에서 새로이 제시하는 방법이다. $\mathbf{c}(s)$ 를 2차 미분항까지 사용해서 테일러 급수로 근사 시키면 식 (14)와 같아지고

$$\mathbf{c}(s) \cong \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}'s + \frac{1}{2}\mathbf{c}''s^2 \quad (14)$$

마찬가지로 식 (14)에 대한 미분식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{c}'(s) \cong \mathbf{c}'(0) + \mathbf{c}''s + \frac{1}{2}\mathbf{c}'''s^2 \quad (15)$$

식 (14)과 (15)는 곡률 κ 를 이용해서 표현하면 다음과 같다^[7,8].

$$\mathbf{c}(s) \cong \mathbf{c}(0) + \mathbf{t}s + \frac{1}{2}\kappa \mathbf{n}s^2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(s) &\cong \mathbf{t} + \kappa \mathbf{n}s + \frac{1}{2}(-\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n} + \kappa \tau \mathbf{b})s^2 \\ &= \left(1 - \frac{\kappa^2 s^2}{2}\right) \mathbf{t} + \left(\kappa s + \frac{\kappa' s^2}{2}\right) \mathbf{n} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서, 2D planar 곡선을 생각하면 $\tau = 0$ 이 된다. 식 (16)과 (17)을 방정식 (1)에 대입하면 식 (18)과 같다.

$$\left(\mathbf{P} - \mathbf{c}(0) - \mathbf{t}s - \frac{1}{2}\kappa \mathbf{n}s^2\right) \cdot \left[\left(1 - \frac{\kappa^2 s^2}{2}\right) \mathbf{t} + \left(\kappa s + \frac{\kappa' s^2}{2}\right) \mathbf{n}\right] = 0 \quad (18)$$

$s \ll 1$ 인 경우, 3차 이상의 s 항을 고차항으로 간주하면 고차항의 기여분을 생략할 수 있으며, 다음과 같은 단순화된 식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} - \mathbf{c}(0)$$

$$\left(1 - \frac{\kappa^2 s^2}{2}\right) \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{t} + \left(\kappa s + \frac{\kappa' s^2}{2}\right) \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} - s \left(1 - \frac{\kappa^2 s^2}{2}\right) \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (19)$$

이 식을 s 에 대한 방정식으로 쓰면 s 에 대한 2차 방정식이 되며 다음과 같이 표현된다.

$$\left(\frac{\kappa'}{2} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} - \frac{\kappa^2}{2} \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{t}\right) s^2 + (\kappa \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{n} - 1) s + \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (20)$$

식 (20)에서 s 에 대한 계수들의 값들을 구한 후, 2차 방정식의 근의 공식을 이용해서 s 를 구한다. 여기서 구해진 s 를 사용해서 곡선상에 새로운 점 $\mathbf{c}(s)$ 를 구한 다음 위의 과정을 수렴할 때까지 반복한다. 방정식 (20)은 일반적으로 두 개의 근을 가진다. 이중 양의 실수 근만을 택하게 된다. 만일 양의 실근이 두 개일 경우에는 주어진 점 \mathbf{P} 에 가까운 값을 주는 s 를 선택하게 된다. 여기서 구한 s 를 사용해서 식 (16)에 대입하면 근사적으로 직교 투영점을 구할 수 있으며, 이 점을 사용해서 매개변수의 변화 값을 다음과 같이 추정한다.

주어진 식 (16)에서 3차 미분항까지 포함된 근사식을 고려하면 다음과 같다.

$$\mathbf{c}(s) \cong \mathbf{c}(0) + \mathbf{c}'s + \frac{1}{2}\mathbf{c}''s^2 + \frac{1}{6}\mathbf{c}'''s^3 \quad (21)$$

위 식을 접선과 법선 벡터 \mathbf{t} 와 \mathbf{n} 을 이용해서 표현하면 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{c}(s) \cong \mathbf{c}(0) + \mathbf{t}s + \frac{1}{2}\kappa \mathbf{n}s^2 + \frac{1}{6}(-\kappa^2 \mathbf{t} + \kappa' \mathbf{n})s^3 \quad (22)$$

이 식은 \mathbf{t} 와 \mathbf{n} 을 기준으로 다시 정리할 수 있으며 s 와 곡률 그리고 곡률변화율을 대입하면 근사적인 곡선 $\mathbf{c}(s)$ 상의 점을 구할 수 있다.

위에 주어진 식에서 몇 가지 가정을 도입함에 따라서 여러 변형된 방법을 고안할 수 있다.

3.4 1 Method 1

식 (16)과 (17)에서 s 에 대한 2차항을 생략하고, 1차항만을 고려하게 되면, 식 (20)은 1차식으로 단순화 되며 s 는 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$s = \frac{\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{t}}{(1 - \kappa \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{t})} \quad (23)$$

식 (22)에서 곡률의 미분변화율 항에 대한 영향을 무시하고 식 (23)을 식 (22)에 대입하여 구한 점을 \mathbf{Q} 라 한다. 만일 s 가 arc-length가 아닐 경우, 주어진 식을 그대로 쓸 수 없고, 해당하는 매개변수 값으로 변환해야 한다. 매개변수를 t 라 할 때 t

의 변화값 Δt 는 Hu and Wallner가 제안한 방법인

$$\Delta t \approx \sqrt{2 \frac{|\mathbf{c}' \times (\mathbf{Q} - \mathbf{c}(0))|}{\kappa |\mathbf{c}'|^3}} \quad (24)$$

으로 구할 수 있으며, Δt 의 부호는

$$\mathbf{c}' \cdot (\mathbf{Q} - \mathbf{c}(0)) \quad (25)$$

의 부호와 같도록 선택한다.

3.4.2 Method 2

방법 2는 arc length s 가 아닌 매개변수 t 를 추정하는 방법을 달리한 것이다. 식 (23)을 사용해서 s 를 구한 다음, 방법 1에서 사용한 식을 이용해서 \mathbf{Q} 를 계산한다. 주어진 식 (16)은 arc-length를 기반으로 표현된 식이다. 같은 곡선이 다른 매개변수 t 로 표현됐고, 곡률의 변화율 κ 이 미비하다고 가정하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(0) + \mathbf{t} \left(s - \frac{1}{6} \kappa^2 s^3 \right) + \frac{1}{2} \kappa \mathbf{n} s^2 \\ \approx \mathbf{r}(0) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \Delta t^2 \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ 는 $\mathbf{c}(s)$ 와 기하학적인 특성은 같지만 다른 매개변수 t 로 표현된 곡선이다. 양변에 직교 벡터인 $(-dy/dt, dx/dt)$ 를 내적시키고 정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \kappa \sqrt{(x^2 + y^2)} s^2 = \frac{1}{2} (-\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\ddot{y}) \Delta t^2 \\ \Delta t = \frac{\sqrt{\kappa \sqrt{(x^2 + y^2)} s^2}}{\sqrt{(-\ddot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\ddot{y})}} \end{aligned} \quad (27)$$

Δt 의 부호는 식 (25)을 사용해서 결정한다.

3.4.3 Method 3

방법 3은 식 (20)을 단순화 없이 직접 푸는 방법이다. 주어진 식은 2차 방정식이므로 근의 공식을 이용해서 쉽게 해를 구할 수 있다. 그런데, 식 (20)의 계수를 구하기 위해서는 κ 를 구해야 하며, 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \kappa \mathbf{n} v^2 + \mathbf{t} \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (28)$$

이므로, chain rule을 이용해서 다음을 구할 수 있다.

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \frac{d\kappa}{ds} \mathbf{n} v^3 - \kappa^2 v^3 \mathbf{t} + 3\kappa v \frac{dv}{dt} \mathbf{n} + \frac{d^2v}{dt^2} \mathbf{n} \quad (29)$$

양변에 \mathbf{n} 을 내적하면

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\kappa}{ds} v^3 + 3\kappa v \frac{dv}{dt} \quad (30)$$

이 되며, 여기에서 $d\kappa/ds$ 를 구할 수 있다.

식 (20)의 모든 계수를 구한 다음 근의 공식을 사용해서 식 (20)을 풀면 두 개의 s 가 나오는데, 둘 중에서 작은 것을 취하고 앞에 나온 방법인 식 (24)와 (25)를 사용해서 Δt 를 추정할 수 있다.

여기서, 식 (20)은 s 가 $s \ll 1$ 의 조건을 만족할 경우에만 성립하게 된다. 이 조건이 만족하지 않을 경우에는 식 (20)을 직접 사용할 수 없기 때문에, 방법 3을 사용할 수 없으며, 사용하더라도 그 결과값의 신뢰성이 떨어지게 된다. 이럴 경우에는 방법 1이나 2를 사용하여야 한다.

3.5 분석 및 비교

본 절에서는 제시된 각 방법들을 비교하고 성능 차이에 대한 논의를 하고자 한다.

Newton-Raphson 방법은 적절한 초기 조건이 주어졌을 경우, 가장 빠르게 해를 구할 수 있다. 이 방법은 식 (1)의 미분 값을 사용하므로, 곡선의 2차 미분이 사용된다. 초기조건이 적절하게 주어졌을 경우, 반복횟수가 적고, 결과적으로 직교 투영점을 구하는 시간이 짧다.

1차 방법에서는 곡선의 1차 미분과, 주어진 점의 접선 위 직교 투영점을 구하는 방법이 사용된다. 계산상으로 보면 제일 간단하며 한 번의 연산만을 고려할 경우에는 계산량이 적다. 그렇지만, 수렴속도가 늦기 때문에 직교 투영점을 구하는데 필요한 계산의 횟수가 증가하며, 결과적으로 많은 연산시간이 소요된다.

곡률원 근사 방법은 곡선의 2차 미분 값 계산과 곡률원과 직선과의 교차점을 구하는 부분으로 구성되어 있다. 1회 연산에 필요한 계산량은 1차와 Newton-Raphson 방법에 비해서 많아진다. 그렇지만, 직교 투영점을 구하기 위해 필요한 반복 횟수는 Newton-Raphson에 근접하며, 특히, 초기 조건에 수렴 여부가 덜 민감하다는 장점이 있다. 그렇지만, 높은 정밀도의 직교 투영점을 구할 때

에는 수렴하지 않을 수 있다.

2차 방법은 기본적으로 2차 미분 값을 계산해야 하며, 방법 3의 경우에는 보다 많은 곡선의 미분 특성을 고려하기 위해 3차 미분 값을 활용하도록 제시되었다. 방법 1과 2의 경우, 연산량은 곡률원 방법에 비해서 다소 적으며, 수렴 속도 측면에서는 다소 느린 특성을 갖는다. 방법 2의 경우, 곡률원 방법과 마찬가지로 초기 조건에 덜 민감하며, 특히, 높은 정밀도로 직교 투영점을 계산할 때에도 문제없이 수렴하는 특성을 갖는다. 방법 3의 경우, 수렴 속도는 방법 1과 2에 근접하다. 그런데, 수렴 여부는 초기 조건에 많이 좌우된다. 이는 3차 미분 값을 사용할 때, 초기 조건에 영향을 많이 받기 때문에 직교 투영점으로 수렴이 잘 되지 않는다고 판단된다.

4. 예 제

본문에서 제시된 방법들을 사용해서 직교투영점을 계산하는 예를 보이고, 결과들을 비교하였다. 본 계산들은 2.7GHz Intel Core i5프로세서를 장착한 iMac에서 수행되었다.

첫 번째 예제로 $\{0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0\}$ 의 knot vector를 가지고 $(-2.0, 0.0)$, $(0.0, 3.0)$, $(2.0, -7.0)$, $(6.0, 0.0)$ 와 같이 4개 조정점들로 정의된 3차 B-spline 곡선을 사용하였다. Fig. 3에서 보여진 바와 같이, 검정색 원은 조정점을 뜻하고, 조정점들로부터 주어진 곡선이 정의되었다. 본 예제에서 공간상의 점 P 는 $(0.0, 2.0)$ 으로 주어졌고, 초기 시작점은 0.0에서 1.0까지 0.1 단위로 변화시켰다. 그리고, 반복계산이 수렴함을 판단하는 조건으로 변화값이 tolerance보다 작은 경우를 산정하였고, 이를 위해 tolerance 값으로 10^{-4} , 10^{-8}

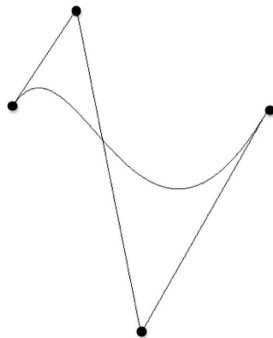


Fig. 3 Example 1. A B-spline of degree 4

과 10^{-12} 를 사용하였다. 또한, 반복계산의 수가 100을 넘기면 해에 수렴하지 않았다는 조건을 적용하였다. 본 예제에서 직교 점을 찾는 데 성공했을 때의 곡선상 직교 투영점에 해당하는 매개변수 값은 $t = 0.20302$ 이다.

Table 1, 2와 3은 각각의 tolerance에 대해서 해에 수렴하기까지의 반복계산 횟수를 보여준다. ‘x’는 수렴에 실패했음을 나타낸다. 주어진 표에서 보면, 해가 수렴할 경우에는 Newton-Raphson 방법이 대부분의 경우에 있어서 반복계산의 횟수가 적음을 알 수 있다. 그렇지만, 일부 조건에 대해서 Newton-Raphson 방법은 수렴하지 않는다. 반면, Hu의 방법은 tolerance가 10^{-4} 와 10^{-8} 일 경우에는 모든 경우에 있어서 수렴을 하나, 10^{-12} 인 경

Table 1 The numbers of iterations for each initial t with tolerance of 10^{-4}

t	N-R	Hu's	1st order	M 1	M 2	M 3
0	5	5	19	6	6	6
0.1	4	5	15	5	5	5
0.2	3	3	8	3	3	3
0.3	4	5	21	5	5	5
0.4	4	5	26	5	5	7
0.5	6	6	30	6	6	7
0.6	x	5	32	9	9	7
0.7	13	6	34	11	11	x
0.8	x	6	38	10	10	x
0.9	6	6	58	9	9	x
1	x	7	x	8	8	x

Table 2 The numbers of iterations for each initial t with tolerance of 10^{-8}

t	N-R	Hu's	1st order	M 1	M 2	M 3
0	6	6	42	7	7	7
0.1	5	6	39	6	6	6
0.2	4	4	32	4	4	4
0.3	5	6	44	6	6	6
0.4	5	6	49	6	6	8
0.5	7	7	53	7	7	7
0.6	x	6	56	10	10	8
0.7	14	7	58	12	12	x
0.8	x	7	62	11	11	x
0.9	7	7	82	10	10	x
1	x	8	x	9	9	x

Table 3 The numbers of iterations for each initial t with tolerance of 10^{-12}

t	N-R	Hu's	1st order	M 1	M 2	M 3
0	7	x	66	x	8	7
0.1	6	x	63	x	7	6
0.2	5	x	55	x	5	5
0.3	6	x	68	x	6	6
0.4	6	x	73	x	7	8
0.5	7	x	77	x	7	8
0.6	x	x	79	x	11	9
0.7	15	x	82	x	13	x
0.8	x	x	86	x	12	x
0.9	8	x	x	x	11	x
1	x	x	x	x	10	x

평균 계산 시간

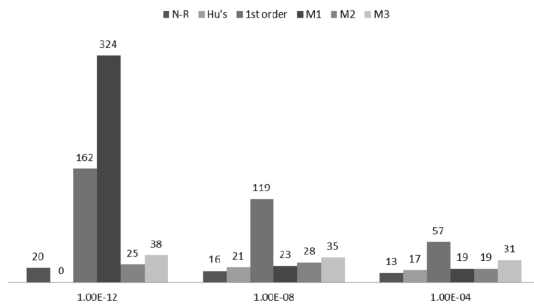


Fig. 4 The average computation times of each method for the initial condition of $t = 0.4$. The time is given in μ -sec. The horizontal axis indicates the given tolerances

우에는 수렴하지 않는다.

해를 찾는데 성공한 경우인 $t = 0.4$ 에 대해서 평균 계산 시간을 각 tolerance 값에 따라서 비교를 하면 Fig. 4와 같다. 여기서 각 막대 그래프 위에 있는 숫자가 계산 시간을 나타낸다. 그래프에서 0으로 주어진 것은 실패한 경우이다.

본 그림에서 볼 수 있듯이, Newton-Raphson 방법이 수렴할 경우, 평균 계산시간이 제일 우수하다.

Hu 방법을 적용했을 때, 반복 계산시 수렴 값의 추이를 보면, 10^{-10} 근처에서 수렴하지 않고 값이 반복됨(oscillation)을 보인다. 이에 반해, 방법 2는 모든 경우에 있어서 수렴해를 주며, 특히, 반복 횟수도 다른 방법과 비교해서 뒤떨어지지 않음을 알 수 있다. 모든 경우에 있어서 수렴해를

찾을 수 있다는 특성은 매우 중요하며, 이는 다른 방법들에 비해서 안정적임을 보여주는 것이다. 여기서 tolerance가 변함에 따라서, 같은 방법이라도 수렴 여부가 달라지는 것을 볼 수 있다. 높은 정밀도로 부동 소수점을 연산할 때, 방법에 따라서 해의 근처에서 근사 값의 거동이 달라지게 된다. 이는 많은 경우에 있어서, 부동소수점 연산 오차에 기인하거나, 아니면, 주어진 방법이 해의 근처에서 제대로 근사를 못할 때 발생한다. 이 때문에 수렴에 더디게 접근해서 tolerance를 만족하기 위해 더 많은 횟수의 반복계산이 필요하거나, 해의 근처에서 oscillation이 발생하게 돼서 더 이상 수렴이 되지 않게 되며, 해로 수렴없이 반복 횟수만 증가하게 된다. 두 경우 모두 일정 횟수의 반복이 넘어가면 수렴이 안되었다고 조건을 주었을 때, 직교 투영점을 계산하는 것이 실패했다고 판단하게 된다.

다음은, 다양한 초기 조건에 대해서 직교 투영점을 찾는 여부에 대한 실험이다. 본 실험에서는 모두 20개의 임의로 선택된 초기점들을 생성했고, 이를 바탕으로 각 방법이 직교 투영점을 찾는지에 대한 여부를 조사했다. 주어진 곡선 위에 계산된 직교 투영점과 초기점을 직선으로 연결해서 그림(Figs. 5, 6, 7과 8)으로 표시하였다. 본 예제에서 Newton-Raphson 방법, M1, M2은 모든 경우에 대해서 직교 투영점을 찾았다. 반면, Hu's 방법은 19개, 1차 방법은 12개, M3 방법은 14개의 직교 투영점을 찾았다.

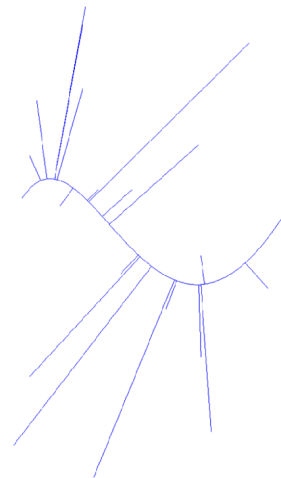


Fig. 5 The points and the orthogonal projection points. Each pair is connected with a line. This figure is for Newton-Raphson, M1 and M2 methods

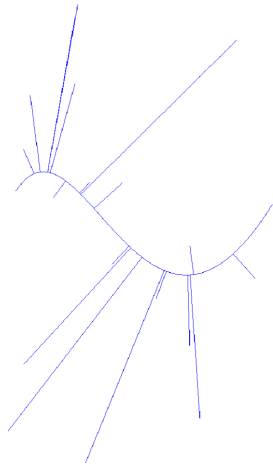


Fig. 6 The points and the orthogonal projection points for Hu's method

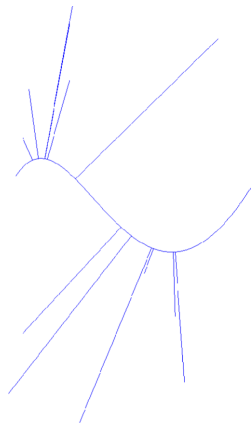


Fig. 7 The points and the orthogonal projection points for the 1st order method

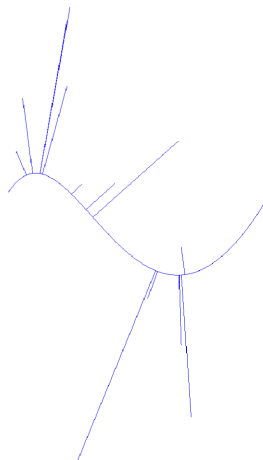


Fig. 8 The points and the orthogonal projection points for M3 method

두 번째 예제로 Fig. 9에 보여진 곡선을 생각하였다. 3차 곡선이며,

$$\{0.0,0.0,0.0,0.0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0,1.0,1.0,1.0\}$$

의 knot vector를 가지고, 모두 8개의 조정점 ((100.0, 100.0), (140.0, 196.0), (200.0, 240.0), (260.0, 164.0), (340.0, 164.0), (400.0, 240.0), (460.0, 196.0), (500.0, 100.0))으로 정의 되었다. 초기 시작점으로 (310,200)을 사용하였다. Tolerance로 모두 10^{-4} , 10^{-8} 과 10^{-12} 를 사용해서 계산결과를 비교하였다.

계산된 곡선상의 직교 교차점에 해당하는 매개 변수값은 $t = 0.54652$ 이다. 본 예제에서는 1차 방법의 경우, 모든 경우에 있어서 해를 구하는데 실패 하였고, Newton-Raphson 방법과 M2 방법만

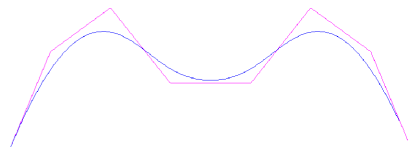


Fig. 9 Example 2. A B-spline of degree 4

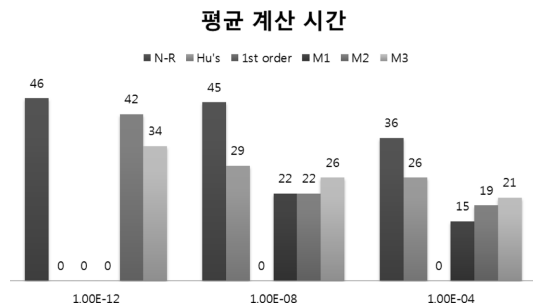


Fig. 10 The average computation times of each method for the initial condition of $t = 0.4$. The time is given in μ -sec. The horizontal axis indicates the given tolerances

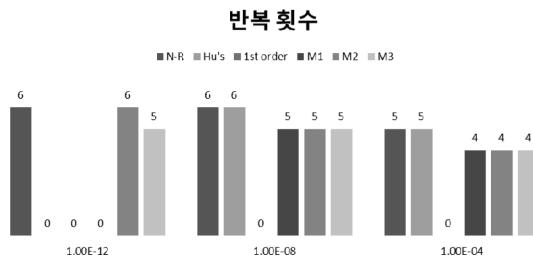


Fig. 11 The numbers of iterations of each method for the initial condition of $t = 0.4$. The horizontal axis indicates the given tolerances

이 모두 해를 구하였다. 반복 계산 횟수는 전체적으로 예제 1에서와 비슷하거나 다소 적은 결과를 보였다. 초기조건 $t = 0.4$ 에 대해서 반복 계산 횟수와 평균 계산시간을 비교해 보면 Figs. 10과 11과 같이 주어진다. 본 계산 결과에서도 보면 대체적으로 예제 1의 경향을 따르고 있으나, 본 예제에 대해서는 Newton-Raphson 방법이 M2 방법보다 수행 시간이 다소 더 걸리는 것으로 나타났으며, 이는 반복 계산횟수가 더 많은 것에 기인한다.

5. 결 론

본 논문에서는 2차원에서 점을 매개곡선 위에 직교투영하는 방법에 대해서 살펴보고 기존의 방법을 개선하는 방안에 대해서 소개하였다. 기하학적인 특성을 사용해서 기존의 방법보다 수렴성 및 안정성 측면에서 성능을 개선할 수 있었다.

본 논문에서 제시하는 문제는 직교 투영점을 구하는 것으로, 최단 거리점을 구하는 문제와는 수학적으로 차이가 있다. 따라서, 한정된 길이의 곡선을 생각할 경우, 최단 거리점은 항상 구할 수 있지만 직교투영점은 존재하지 않을 수 있으며, 이럴 경우, 본 논문에서 제시하는 방법을 적용할 수 없고, 오류 처리와 같은 다른 처리 방법이 필요하다.

제시한 방법은 2차원 상의 점과 곡선 사이에서 직교 투영점을 구하는 것에 한정이 되어 있다. 그렇지만, 모든 경우에 대해서 어떤 한 가지 방법이 항상 좋은 결과를 주는 것은 아니다. 이것은 국소 반복 근사 방법이 갖는 문제이기 때문에, 전역적인 다른 방법을 도입하기 전에는 완전히 이를 해결하기는 어려운 점이 있다. 여기서 논의된 결과를 3차원 상의 점과 곡면에 대한 문제로 확장하는 것이 필요하다.

감사의 글

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2011-0010099).

참고문헌

1. Hoschek, J. and Lasser, D., 1993, Fundamentals

of Computer Aided Geometric Design, A. K. Peters.
 2. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., 1992, Numerical Recipes in C, 2nd Edition, Cambridge.
 3. Hu, S.-M. and Wallner, J., 2005, A Second Order Algorithm for Orthogonal Projection onto Curves and Surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 22(3), pp. 251-260.
 4. Selimovic, I., 2006, Improved Algorithms for the Projection of Points on NURBS Curves and Surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, 23, pp. 439-445.
 5. Ma, Y. L. and Hewitt, W. T., 2003, Point Inversion and Projection for NURBS Curve and Surface: Control Polygon Approach, *Computer Aided Geometric Design*, 20, pp. 79-99.
 6. Chen, X.-D., Yong, J.-H., Wang, G., Paul, J.-C. and Xu, G., 2008, Computing the Minimum Distance between a Point and a NURBS Curve, *Computer-Aided Design*, 40, pp. 1051-1054.
 7. Patrikalakis, N. M. and Maekawa, T., 2001, Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing, Springer.
 8. Struik, D. J., 1961, Lectures on Classical Differential Geometry, Dover, New York.

고 광 희



1995년 서울대학교 조선해양공학과 학사
 2001년 Massachusetts Institute of Technology, Mechanical and Ocean Engineering 석사
 2003년 Massachusetts Institute of Technology, Ocean Engineering 박사
 2003년~2004년 Massachusetts Institute of Technology 박사후 연구원
 2004년~2005년 Design and Manufacturing Institute, Stevens Institute of Technology, 연구원
 2006년~2010년 광주과학기술원 기전공학부 조교수
 2010년~현재 광주과학기술원 기전공학부 부교수
 관심분야: 기하 모델링, CAD/CAM, 컴퓨터 그래픽스, 신호 처리 및 물체 탐지