

論文

비틀림 비선형성을 갖는 2차원 익형의 Critical Slowing Down 을 이용한
Limit Cycle Flutter 예측 인자

임주섭*, 이상욱**, 김태욱**

Warning Signal for Limit Cycle Flutter of 2D Airfoil with Pitch
Nonlinearity by Critical Slowing Down

Joosup Lim*, Sang-Wook Lee** and Tae-Uk Kim**

ABSTRACT

In this paper, limit cycle flutter induced by Hopf bifurcation is studied with nonlinear system analysis approach and observed for the critical slowing down phenomenon. Considering an attractor of the dynamics of a system, when a small perturbation is applied to the system, the dynamics converge toward the attractor at some rate. The critical slowing down means that this recovery rate approaches zero as a parameter of the system varies and the size of the basin of attraction shrinks to nil. Consequently, in the pre-bifurcation regime, the recovery rates decrease as the system approaches the bifurcation. This phenomenon is one of the features used to forecast bifurcation before they actually occur. Therefore, studying the critical slowing down for limit cycle flutter behavior would have potential applicability for forecasting those types of flutter. Herein, modeling and nonlinear system analysis of the 2D airfoil with torsional nonlinearity have been discussed, followed by observation of the critical slowing down phenomenon.

Key Words : 2D Airfoil(2차원 익형), Pitch Nonlinearity(비틀림 비선형성), Limit Cycle Oscillation(끝돌이 떨기), Hopf Bifurcation(홉프 쌍갈림), Critical Slowing Down(임계 더터짐)

1. 서 론

최근 항공 선진국들의 주도로 개발되고 있는 고고도 장기체공 무인기들은 임무 수행 조건의 특성상 통상적인 항공기와는 다른 구조를 갖는다. 특히, 높은 중형비를 갖는 경량화된 주익구조는 유연성이 매우 크기 때문에, 기존의 선형해석만으로는 예측이 불가능한 효과들을 포함하고 있으며[1], 이를 보완하기 위한 비선형적 해석 방법

들이 연구되고 있다[2]. 본 논문에서는 유연항공기 전기체의 구조 비선형성 연구를 위한 준비단계로서 비틀림 비선형성을 가정한 2차원 익형 모델로 Hopf bifurcation에 의한 limit cycle flutter의 모델링 및 해석과 critical slowing down 현상에 의한 비선형 플러터의 예측인자에 대해 다룬다.

시스템 상태의 비선형적 변화를 미리 예측하는 것은 매우 어려운 일이지만, 그 필요성으로 인해 여러 연구 분야에 걸쳐 활발한 논의가 진행되고 있는 새로운 연구주제이다[3]. 대표적으로 연구되고 있는 bifurcation의 예측 인자로 critical slowing down이 있는데[4], 이는 시스템이 임계점(bifurcation point)에 접근할수록, 안정 유인자의 유인력이 0에 접근하는 특성이다[5].

2013년 11월 13일 접수 ~ 2013년 12월 18일 심사완료
논문심사일 (2013.11.15, 1차), (2013.12.11, 2차)

* 한국항공우주연구원

연락저자, E-mail : jooslim@kari.re.kr

대전광역시 유성구 과학로 169-84

** 한국항공우주연구원

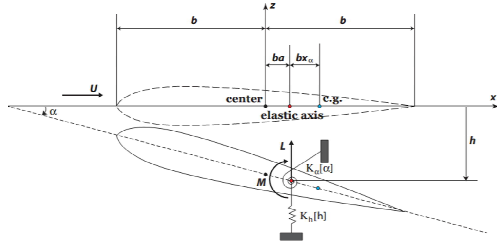


Fig 1. Schematics of 2D airfoil (2DOF)

이 특성으로 인한 대표적인 시스템의 변화로는 시스템의 간섭 (perturbation)으로부터 안정상태로 돌아가는 회복률(recovery rate)의 감소이다 [6]. 일부 연구는 critical slowing down 현상을 공학적, 기계적 시스템에서 확인하였으며, 이를 이용한 응용에 대해서도 다루고 있다[7,8]. 공학시스템은 자연, 사회 시스템들에 비해 제한적인 동역학 특성을 가지며, 또한 시스템 상태에 대한 정밀한 추적이 가능한 편이기 때문에, 다른 연구 분야에 비해 예측 인자를 통해 비교적 정확한 정량적 데이터를 얻을 수 있다는 이점이 있다.

플러터는 국내에서도 기초 및 응용 연구가 활발하게 이루어지고 있는 분야이다[9,10]. 본 논문에서는 공학시스템의 하나로서 2차원 익형의 비선형 플러터 모델을 다루고, 이의 limit cycle flutter의 예측인자로서 critical slowing down 현상에 의한 recovery rate 변화를 측정하여 이론식으로 계산된 bifurcation point와 예측값의 비교를 통해 정확성을 검증한다.

II. 모델링

2.1 개념도 및 운동방정식

본 연구를 위한 2차원 익형 모델의 개념도는 Fig. 1과 같이 조정면을 포함하고 있지 않으며 plunge (h)와 pitch (α)의 2 자유도를 갖는다. 여기서 L 과 M 은 각각 날개에 걸리는 양력(lift)과 비틀림 모멘트(torsional moment)이며, quasi-steady 유동을 가정하면 양력은,

$$L = \pi \rho b^2 [\dot{h} + U\dot{\alpha} - ba\ddot{\alpha}] + 2\pi \rho U b C(k) [\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}] \quad (1)$$

으로 나타낼 수 있으며, 비틀림 모멘트는,

$$M = \pi \rho b^2 [ba\dot{h} - Ub(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha} - b^2(\frac{1}{8} + a^2)\ddot{\alpha}] + 2\pi \rho U b^2 (a + \frac{1}{2}) C(k) [\dot{h} + U\alpha + b(\frac{1}{2} - a)\dot{\alpha}] \quad (2)$$

와 같이 표현할 수 있다[11]. h 와 α 는 각각 plunge 자유도와 pitch 자유도, ρ 는 공기밀도, U 는 공기의 유속이다. $C(k)$ 는 Theodorsen's function이며, quasi-steady 상태에서는 $C(k) = 1$ 로 가정한다. 주날개의 대변형이 허용되는 유연 구조에서는 구조적인 비선형성을 가정 할 수 있으며, 3차항을 포함한 비선형 spring force는,

$$\begin{aligned} K_h [h] &= k_h h (1 + G_h g^2) \\ K_\alpha [\alpha] &= k_\alpha \alpha (1 + G_\alpha \alpha^2) \end{aligned} \quad (3)$$

으로 표현할 수 있다. k_h 와 k_α 는 각각 굽힘과 비틀림의 선형 스프링 상수이며, G_h 와 G_α 는 각각 굽힘과 비틀림의 비선형 스프링 상수이다. 본 논문에서는 가장 단순한 비선형 모델을 가정하여 plunge의 비선형성은 고려하지 않았으며 ($G_h = 0$), pitch의 비선형성만을 가정하여 모델링 및 해석을 수행하였다. 비틀림 비선형성과 quasi-steady airflow 상태를 가정하였을 때, 2차원 익형 모델의 최종 운동 방정식은,

$$\begin{aligned} m\ddot{h} + mbx_\alpha\ddot{\alpha} + \ddot{\alpha} + m\omega_h h &= -L \\ mbx_\alpha\ddot{h} + mr_\alpha^2\ddot{\alpha} + mr_\alpha^2 b^2 \omega_\alpha \alpha (1 + G_\alpha \alpha^2) &= M \end{aligned} \quad (4)$$

Table 1. Nondimensional parameters

	Description
$V = \frac{U}{\omega_\alpha b}$	nondimensional freestream velocity
$\mu = \frac{m}{\pi \rho b^2}$	density ratio
$r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{mb^2}}$	radius of gyration
$\frac{\omega}{\omega_\alpha} = \frac{\omega_h}{\omega_\alpha}$	plunge-pitch natural frequency ratio
$\omega_h = \sqrt{\frac{k_h}{m}}$	uncoupled natural bending frequency
$\omega_\alpha = \sqrt{\frac{k_\alpha}{I_\alpha}}$	uncoupled natural torsional frequency
a	distance factor from airfoil center to elastic axis
x_α	distance factor from elastic axis to c.g.
I_α	pitch inertia (physical parameter)

와 같이 나타낼 수 있다[12].

2.2 무차원화 및 상태방정식

무차원화된 plunge, pitch, time은 각각 $\bar{h} = \frac{h}{b}$, α , $\tau = \frac{U}{b}t$ 로 정의한다. 이를 이용하여 식 (4)를 무차원화 하면,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{h}} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \frac{\bar{\omega}^2}{V^2} \bar{h} &= -\bar{L} \\ x_\alpha \ddot{\bar{h}} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \frac{r_\alpha^2}{V^2} \alpha (1 + G_\alpha \alpha^2) &= \bar{M} \end{aligned} \quad (5)$$

와 같다. 좌측 항의 \bar{L} 과 \bar{M} 은 각각 무차원화된 양력과 비틀림 모멘트이며,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{\mu} \left[\ddot{\bar{h}} + \dot{\alpha} - a\ddot{\alpha} + 2 \left\{ \dot{\bar{h}} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right\} \right] \\ \bar{M} &= \frac{1}{\mu} \left[ah - \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} - \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(a + \frac{1}{2} \right) \left\{ \dot{\bar{h}} + \alpha + \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\alpha} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

와 같이 표현할 수 있다. 이후의 선형 및 비선형 해석과 수치해석을 위해, 식 (5)와 (6)을 상태방정식으로 표현하는 것이 용이하다. 우선, 다음과 같이 F_1 과 F_2 을 정의한다.

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \ddot{\bar{h}} + x_\alpha \ddot{\alpha} + \frac{\bar{\omega}^2}{V^2} \bar{h} + \bar{L} = 0 \\ F_2 &\equiv x_\alpha \ddot{\bar{h}} + r_\alpha^2 \ddot{\alpha} + \frac{r_\alpha^2}{V^2} \alpha (1 + G_\alpha \alpha^2) - \bar{M} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

2차항을 한 개 씩만 포함한 두 식으로 분리하기 위해 식 (7)의 각 함수에서 $\ddot{\bar{h}}$ 와 $\ddot{\alpha}$ 를 각각 소거하면 다음과 같이,

$$\begin{aligned} F_{\bar{h}} &= \left(\frac{1}{8\mu} + \frac{a^2}{\mu} + r_\alpha^2 \right) F_1 - \left(-\frac{a}{\mu} + x_\alpha \right) F_2 = 0 \\ F_\alpha &= \left(-\frac{a}{\mu} + x_\alpha \right) F_1 - \left(1 + \frac{1}{\mu} \right) F_2 = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$\ddot{\bar{h}}$ 와 $\ddot{\alpha}$ 를 각각 포함한 $F_{\bar{h}}$, F_α 두 개의 식으로 분리할 수 있다. 식 전체의 전개는 본 논문상에는 생략하도록 한다. 총 4개의 상태 변수를

$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T = \{\bar{h}, \dot{\bar{h}}, \alpha, \dot{\alpha}\}$ 와 같이 정의하고, 식 (8)의 두 식을 이용하여 상태 방정식을 구성하면,

$$\begin{Bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} + \{N\} y_3^3 \quad (9)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 행렬 $[J]$ 는 상태변수의 1차항의 계수들로 이루어진 행렬이며, 안정평형점인 원점 $y_0 (\{y_1, y_2, y_3, y_4\}^T = \{0, 0, 0, 0\})$ 에서의 시스템의 Jacobian이다. 벡터 $\{N\}$ 은 pitch nonlinearity (y_3^3)의 계수이다. Table 1에 제시된 무차원 상수들로 이루어진, $[J]$ 와 $\{N\}$ 에 나타난 각 계수들을 간단한 알파벳으로 표현하면 다음의 구조를 나타내고 있다. $[J]$ 는

$$[J] = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

와 같이 표현되며, $\{N\}$ 은

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ G_1 \\ 0 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

와 같이 표현할 수 있다.

III. 비선형 플러터 예측

3.1 임계점의 이론값 계산

식 (9)로부터 시스템의 안정성 해석을 위한 특성 방정식은,

$$A(\lambda) = \det [J|_{y_0} - I\lambda] = 0 \quad (12)$$

와 같이 표현되며, 이 특성방정식의 eigenvalue 중 complex conjugate인 한쌍의 eigenvalue가 복소수 평면의 허수축상에 놓이게 될때, 즉 실수부가 0이 되어 $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ 일때 평형점에서 local bifurcation인 Hopf bifurcation이 일어나게 된다.

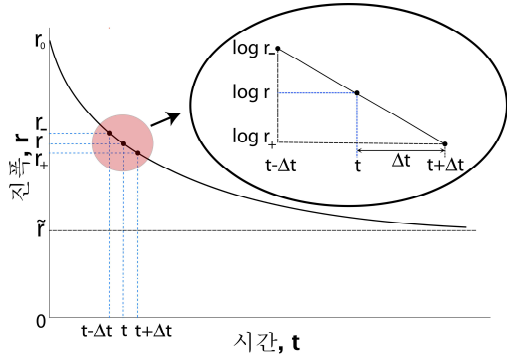


Fig. 2 Calculating recovery rate function λ

여기에서는 V 를 제어상수로 설정하고, 이외의 시스템 상수들을 각각 $\mu = 11$, $r_\alpha = 0.5$, $\bar{\omega} = 0.5$, $G_\alpha = 0.5$, $a = -0.35$, $x_\alpha = 0.2$ 로 정의한 후,

$$\begin{aligned} \text{Re}\Lambda(\pm j\omega) &= 0 \\ \text{Im}\Lambda(\pm j\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

위의 두개의 식을 제어상수 V 와 limit cycle frequency ω 에 대해 계산하여 제어상수의 임계값(bifurcation point)을 구한다. 이처럼 해석적인 방법을 통해 구해진 시스템의 bifurcation point, 즉 limit cycle flutter가 일어나는 제어상수 값은 $V_{crit} \cong 0.8607$ 이다.

3.2 Critical slowing down

co-dimension one인 Hopf bifurcation의 경우 phase radius r 의 시간에 따른 변화율은

$$\dot{r} = r[\sigma(\mu - \mu_c) - p(r)] \quad (14)$$

와 같이 표현될 수 있다[7]. 여기서 σ 는 critical slowing down에 의한 시스템 특성을 나타내는 상수이고, μ 는 제어상수, $p(r)$ 은 r 의 1차항 이상의 다차항들을 포함하는 다항식이다. Fig. 2에서 처럼 시스템에 외부로부터 간섭이 적용되었을 때, 평형상태로의 phase radius 회복률 λ 를 다음과 같이 정의하도록 한다.

$$\lambda(\mu, r) = \frac{d \ln r}{dt} \quad (15)$$

이를 식 (14)에 대해 적용하면,

$$\lambda(\mu, r) = \frac{1}{r} \dot{r} = \sigma(\mu - \mu_c) - p(r) \quad (16)$$

와 같다. 좌변의 첫번째 항인 $\sigma(\mu - \mu_c)$ 는 간섭이 주어진 현재 제어상수 μ 로 부터 bifurcation point μ_c 까지의 거리를 나타내며, 두번째 항인 $p(r)$ 은 bifurcation의 종류 (supercritical 혹은 subcritical)를 구분하는 식이다. 본 논문에서는 bifurcation의 예측인자로 쓰이는 첫번째 항에 관해서만 다루도록 한다.

Bifurcation이 일어난 이후의 특정 제어상수 $\mu = \tilde{\mu}$ 에서 ($\tilde{\mu} > \mu_c$), limit cycle의 진폭을 \tilde{r} 라고 정할 경우 즉, $(\tilde{\mu}, \tilde{r})$ 는 bifurcation curve상의 점이므로, 다음의 식을 만족한다.

$$\dot{r}(\tilde{\mu}, \tilde{r}) = \tilde{r}[\sigma(\tilde{\mu} - \mu_c) - p(\tilde{r})] = 0 \quad (17)$$

이제 bifurcation point 이전의 임의의 μ ($\mu < \mu_c$)에 대하여, 식 (16)을 이용하여 $\lambda(\mu, \tilde{r})$ 의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda(\mu, \tilde{r}) &= \sigma(\mu - \mu_c) - p(\tilde{r}) \\ &= \sigma(\mu - \tilde{\mu} + \tilde{\mu} - \mu_c) - p(\tilde{r}) \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)를 사용하면,

$$\begin{aligned} \lambda(\mu, \tilde{r}) &= \sigma(\mu - \tilde{\mu}) + \overbrace{\sigma(\tilde{\mu} - \mu_c) - p(\tilde{r})}^0 \\ &= \sigma(\mu - \tilde{\mu}) \end{aligned} \quad (19)$$

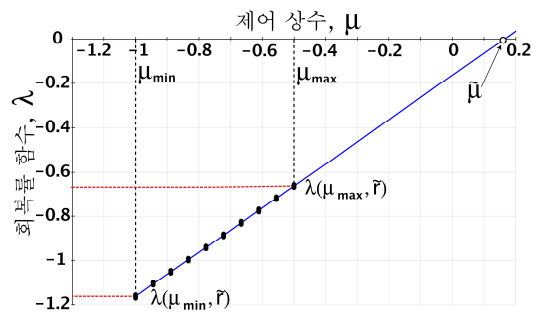


Fig. 3 Forecasting bifurcation point by λ

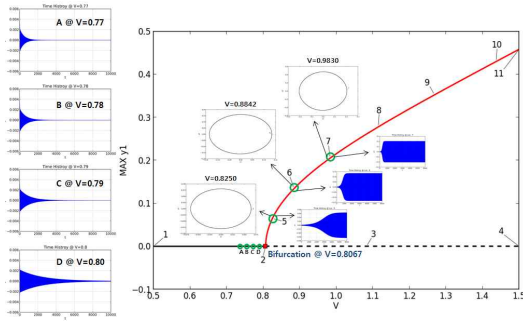


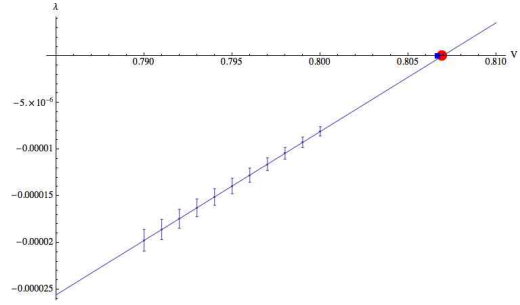
Fig. 4 Critical slowing down observed in 2D airfoil model

과 같다. 식 (19)는 \tilde{r} 에서의 λ 값은 현재의 μ 값으로부터 $\tilde{\mu}$ 까지의 거리에 σ 가 곱하여진 값을 나타낸다는 것을 보여주고 있다. 즉, $\lambda(\mu, \tilde{r})$ 는 $\mu - \lambda$ 좌표 상에서 기울기 σ 를 갖고 $\tilde{\mu}$ 에서 μ 축 ($\lambda = 0$)을 가로지르는 직선이다. 식 (19)에 의하여 표현되는 이러한 직선의 예시는 Fig. 3에 제시되어있다.

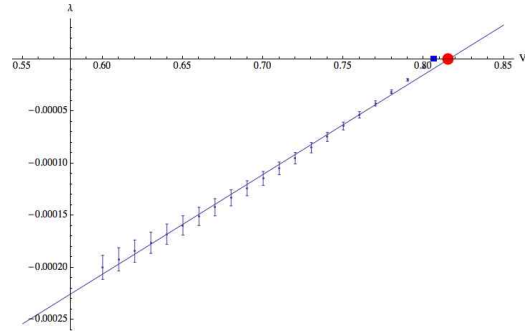
이상적인 시스템에 대해서는 다양한 \tilde{r} 값에 대하여 위의 계산을 수행하여 bifurcation이 일어나기 이전의 제어상수 범위내에서 실제 일어날 bifurcation diagram 전체를 얻는것도 가능하지만, 실제 시스템에서는 \tilde{r} 이 클수록 추가로 고려되어야 할 비선형성들이 존재하므로 bifurcation diagram 전체를 얻을 수 있는 경우는 제한적이다. 하지만, Bifurcation point만을 예측하기 위해서는 bifurcation point에 근접한 \tilde{r} , 즉 충분히 작은 \tilde{r} 값에 대해서만 위의 계산을 수행하면 되며, 이렇게 작은 값에 대해서는 추가적인 비선형성은 무시가능하여 λ 는 bifurcation point를 효과적으로 예측할 수 있는 예측인자로서의 기능을 수행할 수 있다.

3.3 λ 를 이용한 limit cycle flutter 예측

Fig. 4의 오른쪽에 제시된 time history는 시스템이 간섭으로부터 평형상태로 돌아가는 진폭 변화를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이, 시스템이 limit cycle flutter 지점에 접근할 수록 critical slowing down의 영향으로 평형상태로



(a) Forecasted from range I



(b) Forecasted from range II

Fig. 5 Limit cycle flutter forecasting by λ

돌아가는 시간이 점차 늘어나고 있는 것을 확인할 수 있다.

이론식 식 (15)를 실제 시뮬레이션, 혹은 시험에서 나오는 데이터에 적용하기 위해 Fig. 2와 같이, 다음과 같은 근사식을 사용한다.

$$\lambda(\mu, r) = \frac{d \ln r}{dt} \cong \frac{\ln r_+ - \ln r_-}{2 \Delta t} \quad (20)$$

충분히 작은 진폭 phase radius 0.02 rad를 \tilde{r} 로 정의하고, 플러터 발생 이전의 V 중 임계 유속 V_{crit} 에 근접한 범위 I [0.79~0.8]과, 좀더 넓은 범위 II [0.6~0.8]에 대하여 위에서 설명한 λ 를 이용한 예측을 수행하였다. 범위 I에서 예측한 플러터 지점은 $V_{crit,I}^* \cong 0.8069$ (Fig. 5(a)), 범위 II에서 예측한 플러터 지점은 $V_{crit,II}^* \cong 0.8156$ (Fig. 5(b)) 으로 이론식으로 계산된 $V_{crit} \cong 0.8067$ 과 비교하였을때, 매우 근사한 예측값을 얻을 수 있는 것을 볼 수 있다.

IV. 결 론

결과에서 볼 수 있듯이, 여러 분야에서 bifurcation point의 예측인자로서 연구되고 있는 critical slowing down은 limit cycle flutter의 경우에도 비선형 거동의 예측 인자로서 활용될 수 있음을 알 수 있다. 하지만, 이는 실제 적용에 있어서 단독으로 사용될 수 있는 부분은 아님을 유의하여야 한다. 3차원 형태의 주익부와 항공기 전체의 형상을 보다 사실적으로 모델링 한 유연항공기 구조를 통한 해석이 우선적으로 이루어져야 한다. 주익의 공탄성 뿐만이 아닌, 항공기 전체의 flight dynamics 와의 커플링 또한 고려하여 전체적인 비선형 해석을 통해 항공기 전체의 비행과 관련된 비선형 거동 특성들을 파악하고, 이를 성공적으로 시뮬레이션 할 수 있는 도구를 개발하는 것이 최종의 목적이며, critical slowing down을 활용한 예측인자의 연구는 이러한 전체적 연구진행의 첫걸음으로서 그 의의가 있다고 할 수 있다.

후 기

본 연구는 기초기술 연구회 산하 한국항공우주연구원의 항공우주 기술 시드사업 기초 연구과제 “유연항공기의 비선형 공탄성 해석 및 시험 기법의 연구” 수행 결과의 일부이며, 지원에 감사드립니다.

참고문헌

[1] Noll, T. E., Brown, J. M., Perez-Davis, M. E., Ishmael, S. D., Tiffany, G. C. and Gaier, M., Investigation of the Helios Prototype Aircraft Mishap. Volume 1: Mishap Report, 2004.

[2] Cesnik, C. E. S. and Su, W., “Nonlinear Aeroelastic Simulation of X-HALE: a Very Flexible UAV”, AIAA 2011-1226, 49th AIAA Aerospace Science Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition 4-7, 2011, Orlando, Florida.

[3] Scheffer, M., Carpenter, S. R., Lenton, T. M., Bascompte, J., Brock, W. A., Dakos, V., van de Koppel, J., van de Leemput, I. A., Levin, S. A., van Nes, E. H., Pascual, M.,

Vandermeer, J., Koppel, J. V. D. and Leemput, I. A. V. D., “Anticipating Critical Transitions”, Science Vol. 338 (6105) , 2012, pp.344--348.

[4] Strogatz, S. H., Nonlinear Dynamics and Chaos- With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering 1st edn, Westview Press, 2001.

[5] Wissel, C., “A universal law of the characteristic return time near thresholds”, Oecologia, Vol. 65, No. 1, 1984, pp. 101 - 107.

[6] Veraart, A. J., Faassen, E. J., Dakos, V., van Nes, E. H., Lurling, M. and Scheffer, M., “Recovery rates reflect distance to a tipping point in a living system”, Nature, Vol. 481, 2012, pp. 357-359.

[7] Lim, J. and Epureanu, B. I., “Forecasting a class of bifurcations: theory and experiment”, Physical Review E, Vol. 83 (1 pt 2), 2011, 016203.

[8] Lim, J. and Epureanu, B.I., “Forecasting bifurcation morphing: application to cantilever-based sensing”, Nonlinear Dynamics, Vol. 67, No. 3, 2012, pp. 2291~2298.

[9] 김요한, 김동현, “DES 난류모델 및 받음각 효과를 고려한 AGARD 445.6 날개의 천음속 플러터 응답 특성”, 한국항공운항학회지, 제18권 제1호, 2010, pp. 27~32

[10] 임함, 김동현, 김유성, 김요한, 김석수, “충격파 및 유동박리 효과를 고려한 초임계 에어포일의 천음속 플러터 특성”, 한국항공운항학회지, 제17권 제2호, 2009, pp. 8~17

[11] Theodorsen, T., “General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter”, Tech. rep., NACA report 496, 1935.

[12] Bisplingho, R., Ashley, H., and Halfman, R., Aeroelasticity , Addison-Wesley Publishing Company, 1955.