韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmec.2013.16.3.267
2013. 12 제 16권, 제 3호, 267-283

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2013, Vol. 16, No. 3, 267-283

수학적 정당화가 문제 해결과 의사소통에 미치는 영향

정 인 수 (서울옥정초등학교)

수학적 정당화란 일반적으로 적절한 근거에 기초하여 자신의 주장이 참임을 보이는 과정이라고 할 수 있다. 하지만 교실 실제에서의 수학적 정당화는 사회적 상호작용을 바탕으로 수학적 의사소통을 촉진하는 역할을 한다고 할 수 있다. 이에 본 연구는 수학적 정당화 활동이 학생들의 문제해결과 의사소통 과정에 미치는 영향을 조사하고자 하였다. 이를 위해 수학적 정당화 활동이 강조되는 문제해결 중심 수업을 실시하고 문제 이해 활동, 개별 탐구 활동, 소집단 토의 활동, 전체 논의 과정에서의 수학적 정당화 활동과 의사소통 과정을 분석하였다. 연구 결과 수학적 정당화 활동은 학생들이 다양한 문제해결 방법을 찾는데 도움을 주었고 의사소통 과정을 촉진하였으며, 다양한 표현 방법을 사용하도록 자극하였다. 또한 수학적 정당화 활동은 학생들의 이해를 평가하는 방법이 될 수 있으며, 교실에서의 사회적 관계 및 역동적인 교실 문화를 형성하는데 기여하였다.

I. 서론

수학적 정당화는 문제해결, 추론, 의사소통 등과 같이 학생들의 수학 학습을 지원하는 중요한 방법 중의 하나로 강조되고 있다(CCSSO & NGA Center, 2010; NCTM, 2000). 2009 개정 수학과 교육과정에서도 귀납, 유추 등을 통해 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 이를 정당화할 수 있어야 하며, 자신의 의견을 정당화할 때 적절한 근거에 기초하여 논증을 전개할 수 있어야 한다고 지적하고 있다(교육과학기술부, 2011). Carpenter, Fanke, & Levi(2003)는 정당화가 수학의 핵심이고 어린 학생들도 정당화의 과정을 거치지 않고는 수학을 배울 수 없으며, 수학적 이해를 위해서는 정당화 과정이 필수적이라고 주장하였다. 또한 Staples, Bartlo, & Thanheiser(2012)도 정당화는 수학에 대한 이해와 수학을 하는 능력을 높이는 방법으로 교실의 가치 있는 다양한 교수-학습 작용을 성취하는 강력한 실제이며, 수학을 학습하고 수학을 하는 수단이 되어야 한다고 하였다.

수학적 정당화는 일반적으로 형식적 증명과 비형식적 증명 모두를 포괄하는 의미로(권성룡, 2003), 자신의 추측이나 가설이 참임을 보이기 위해 타당한 근거를 제시하는 논증 과정이라고 할 수 있다. 김민주와 권오남(2006)은 수학적 정당화를 수학적 사실이 참임을 확인하거나 자신의 수학적 가설이 참이라는 것을 설득하기 위하여 타당한 근거를 내세워 이를 보이는 포괄적인 개념의 증명 활동이라고 요약하고 있다.

앞에서 언급한 것과 같이, 수학 학습에서 정당화 활동이 강조되면서 초등학교 수준에서 수학적 정당화에 대한 연구가 꾸준히 이루어지고 있다(권성룡, 2003; 김정하, 강문봉, 2009; 김지영, 박만구, 2011; 서은미, 류희찬, 2009; 서지수, 류성림, 2012). 이러한 연구들은 초등 수준에서 수학적 정당화에 대한 이해의 폭을 넓혀 왔지만, 정당화 유형을 분석한 기존의 연구(예, Balacheff, 1987; Simon & Blume, 1996; Sowder & Harel, 1998)들을 바탕으로 특정한 학년에서, 특정한 과제를 통해 정당화 유형(수준, 단계)을 분석하는 연구들이 주를 이루고 있다. 이러한 연구들은 수학적 정당화를 학생의 인지적인 측면에서 개인적인 주장으로써 인식하고 있는 것으로 보인다.

수학적 정당화에 대한 연구에서 또 다른 흐름은 수학이라는 학문적 관점에서의 정당화가 아니라 학습 공동체 관점에서, 교실에서의 수학적 정당화가 의사소통의 기능을 담당함으로써 수학적 개념에 대한 이해를 증진시킬 수 있어야 한다는 것이다. Yackel(2004)은 상호작용주의 관점에 따라 수학적 정당화를 개인의 논리적 주장이 아닌 교실 공동체의 상호작용을 통한 성취이고, 교사와 학생에 의해 상호작용적으로 구성되어 의사소통의 기능을 담당하는 담화의 측면으로 생각할 수 있다고 지적하였다. 그리고 Carpenter 외(2003)는 초등학교 수학 교실에서 정당화가 강조되는 것은 정당화의 과정에서 주장이 합의에 이르는 과정을 경험하게

* 접수일(2013년 11월 17일), 수정일(2013년 12월 4일), 게재확정일(2013년 12월 25일)
* ZDM분류 : D42
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 수학적 정당화, 문제 해결, 의사소통

하고 이를 통해 합리적이고 논리적인 수학적 의사소통 능력을 기르기 위함이라고 지적하면서, 수업의 목적은 학생들이 개념에 대한 의문을 가지고 개념을 정당화하기 위해 수학적 논쟁을 사용할 필요가 있다는 것을 돕는 것이라고 하였다. 이런 교실 환경에서 학생들은 다른 사람이 옳다고 하기 때문에 그것을 받아들이는 것이 아니라, 어떤 것이 옳은지 스스로 판단할 수 있어야 한다.

수학에서의 정당화는 주장의 타당성을 검증하고 결과를 조명하거나 통찰을 제공해주고 지식을 체계화하는 역할을 한다(Hanna, 2000). 하지만 교실에서의 정당화 활동은 수학적 개념에 대한 이해를 촉진하고, 의사소통 기능이나 표현 능력 개발을 돕고, 비판적인 사고 능력과 가치 있는 태도를 함양할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것이다.

지금까지 수행된 수학적 정당화에 대한 연구를 보면 개인적인 측면에 초점을 맞추고 있는 반면에 교실 공동체 관점에서 분석한 연구는 거의 없는 실정이다. 이에 본 연구는 문제해결 중심의 수업에서 수학적 정당화 활동이 학생들의 문제해결과 의사소통 과정에 미치는 영향을 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 이론적 관점

본고의 결과와 논의를 이끌어 가기 위해 수학적 정당화의 의미를 파악하는데 유용한 이론적 관점을 살펴보고자 한다. 특히, 학습의 사회적 측면과 개인적 측면 양자를 모두 설명하는데 적절한 상호작용주의, 활동 주체와 환경과의 상호 관련성을 이해하는데 도움을 주는 활동주의, 그리고 Lakatos(1976) 등의 연구를 바탕으로 한 오류가능주의는 교실에서 설명, 정당화, 논증 과정을 설명하는데 유용하다.

Yackel(2004)은 설명, 정당화, 논증을 분석하기 위한 틀로써 상호작용주의의 유용성을 설명하고 있는데, 상호작용주의는 구성주의와 양립이 가능하고 개인의 의미 구성 과정과 사회적 과정 모두를 중요하게 다룬다는 점에서 탐구 지향적 수학교실에서 학습을 연구하는데 유용하다고 지적하고 있다. 상호작용주의 관점에서 개인은 교실 규범과 교실의 수학적 관행에 참여하면서 개인적 의미를 구성해간다.

상호작용주의는 상호작용에서 해석 과정을 중요시하는데, 상호작용에서 개인은 상대방이 무엇을 하는지 그리고 그 행동이 의도하는 바가 무엇인지를 해석해야 한다. 또한 개인은 타인의 행동을 해석할 뿐만 아니라 상호작용에 참여하면서 자신의 행동을 통해 타인에게 자신의 의도가 무엇인지를 알린다. 이와 같이 참여하는 이들의 행동을 명백히 하는 과정에서 발생하는 공유된 행동이 존재한다. 즉, 사회적 상호작용은 단순히 인간의 행동이 이루어지는 상황이라기보다는 인간의 행동을 형성하는 과정이라고 할 수 있다.

상호작용주의에서 중요한 원리 중의 하나는 의미가 사회적 결과물이라는 점이다. 상호작용주의는 의미가 사물에 내재되어 있는 것이라고 생각하지 않는다. 또한 개인의 심리적 요소에 기인한다고 보지도 않는다. 대신 상호작용주의는 의미가 학생들 사이의 상호작용 과정 속에서 발생한다고 본다. 의미가 사회적 상호작용으로부터 발생하므로, 각 개인이 가지고 있는 사회적 의미와 이해는 그 상호작용을 해석하는 과정 속에서 형성된다. 이러한 의미에서 학생들의 해석 또는 의미가 '공유된 것으로 받아들여진다'고 말한다(Cobb, Yackel, & McNeal, 1992).

상호작용주의 관점에서 수학적 정당화는 개인의 구성체가 아닌 사회적 구성체이다. 즉, 정당화는 어디선가 주어지는 것이 아니라 실행 공동체에서 공동 구성되는 것이다(Cobb, McClain, & Gravemeijer, 2005; Yackel & Cobb, 1996). 사회적 구성체로서 수학적 정당화가 교실에서 활발히 이루어지기 위해서는 적절한 사회적 규범과 사회수학적 규범이 형성되어야 한다. 수학적 정당화와 관련된 사회적 규범으로는 개인적으로 의미 있는 해를 구해야 한다는 것, 아이디어와 해를 설명하고 정당화해야 한다는 것, 다른 학생들의 해석과 문제해결 방법을 경청하고 그 의미를 파악해야 한다는 것, 이해가 되지 않거나 동의하지 않을 때 질문을 하거나 반박을 해야 한다는 것 등이다. 수학적으로 다른 것, 정교한 것, 효율적인 것, 그리고 우아한 것은 무엇인가, 어떤 수학적 설명, 정당화가 수용가능한가 등에 대한 이해는 사회수학적 규범에 해당한다. 이 관점에서 교사는 학생들이 그들의 주장을 정당화할 수 있는 논의를 제공하고 주장에 대한 논증이 다양할 수 있다는 기대를 갖도록 이끌어야 할 것이다.

활동주의는 생물학자인 Varela와 Maturana 등에 의해 개발된 인지 이론이다(Maturana & Varela, 1992; Varela, Thompson, & Rosch, 1991). 활동주의는 심신이 분리될 수 없는 것처럼, 인지와 활동도 분리될 수 없다고 주장하였다. 활동주의의 중요 내용은 구조결정론, 실세계와 연계된 인지, 구조의 공진화(共進化) 등이다.

구조결정론과 관련하여, 활동주의는 구성주의와 유사하게 개인의 활동은 개인의 구조에 의해 결정된다고 본다. 그러나 활동주의에서 '구조'란 특정한 개념과 연계된 이산적인 인지 구조를 가정하기보다는 개인의 전체성에 주목한다. 또한 활동주의는 환경이 개인의 활동을 제한한다고 본다. 개인은 개인의 구조에 의해 결정된 행동을 일정한 맥락에서 하려고 한다. 만약 이것이 불가능해지면, 이 불가능성은 맥락의 일부분이 되고 개인의 구조는 다른 행동을 결정하게 된다. 모든 행동은 개인의 구조를 변화시키고, 결국 개인은 차후의 유사한 맥락에서 다른 행동을 하게 된다. 그러나 행동은 환경에 의한 한계 내에서 이루어진다. 개인의 구조는 개인이 지각하고 경험하는 세계를 결정하고, 개인의 구조가 변함에 따라 개인에 의해 경험된 세계도 변화한다. 이런 의미에서 개인은 구조-결정 행동에 의해 세상과 만나게 된다.

활동주의는 개인과 환경이 장기간에 걸쳐 공진화한다는 점을 강조함으로써 다른 구성주의와 구별된다. 즉, 개인과 환경이 서로에게 영향을 줌으로써 인지가 발생한다. 개인이 그들의 구조를 바꾸면서 개인은 환경에 의해 제한된 내에서 행동한다. 마찬가지로 환경이 바뀌면 개인은 개인에 의해 제한된 내에서 행동한다. 서로의 제한 내에서 공진화하는 시스템(개인과 환경)을 '구조적으로 짝'이라고 하는데, 이는 Luhmann (1995)이 사람과 사회적 체계 사이의 관계를 기술하는데 사용한 '상호침투' 용어와 유사하다. 공진화는 세상과 만나는 과정이 개인 홀로 이루어지는 것이 아니라 세상과 개인이 상호침투를 통해 서로 만난다고 볼 수 있다.

위에서 언급한 상호작용주의나 활동주의는 학습의 본질에 관한 이론인 반면에 오류가능주의는 수학의 본질에 관한 이론이다. Lakatos(1976)는 수학을 인간에 의해 발견되어야 할 진실이라기보다는 인간적인 활동으로 보았다. 활동주의 관점에서 본다면, 수학은 수학자와 세상이 만나는 것으로 볼 수 있다.

Lakatos(1976)는 수학은 공리에서 진실로 나아가는 순수한 연역적인 과학이 아니고 수학 활동은 증명과 반박의 과정을 포함한다고 제안하면서, 수학적 지식의 절대성을 부정하고 수학적 지식은 논증과 반박을 통해 발전하는 인간이 만든 산물이라고 규정하였다. 이 과정을 Lakatos는 '증명 분석'이라고 하였는데, 이는 추측, 증명과 반례의 순환으로, 반례의 발견은 추측과 증명을 재검토하도록 한다. 수학에서의 증명은 연역적인 구조를 가지지만, Lakatos는 증명이 인간에 의해 이루어지는 것이므로, 절대적인 확실성을 가질 수는 없다고 하였다. 증명에서의 불확실성은 증명 분석을 가능하게 하기 때문에, 수학 활동의 기초이며, 증명의 장애물이 아니다. Lakatos의 증명에 대한 아이디어는 Polya(1968)의 수학적 추론의 본질과 Popper(1963)의 과학적 관찰의 본질에 대한 연구에 영향을 받았다고 할 수 있다. Polya는 수학활동에는 추측에 의한 그럴듯한 추론과 형식화된 증명에 의한 연역적 추론을 포함한다고 하였다. Polya는 그럴듯한 추론이 다양한 분야에서 귀납적인 증거로써 중요하듯이, 수학에서도 그럴듯한 추론의 중요성을 인정했지만, 연역적 추론은 수학과 본질적으로 수학인 과학 영역으로 제한된다고 하였다. Lakatos는 그럴듯한 추론이 수학 활동의 일부분이라는 Polya의 견해에 동의를 하지만, 연역적 추론이 안전하고 최종적인 것이라는 의견에는 동의하지 않는다. Popper는 과학적인 이론은 반증될 수 있고 최고의 과학적인 이론은 반증되지 않는 이론이 아니라 가장 쉽게 반증될 수 있는 이론이라고 하였다. Popper의 이론은 수학적 정리와 과학적인 이론에 대한 전통적인 관점을 아직 반증되지 않은 추측으로 보는 관점으로 확립했다는 점에서 Lakatos 이론에 영향을 주었다.

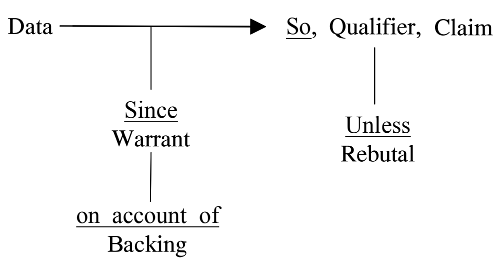
2. 수학적 정당화와 논증 구조

본 절에서는 수학적 정당화와 논증 과정이 교실에서 의사소통을 촉진하는 데 영향을 미치는 방법에 대해 살펴보고자 한다.

Yackel(2004)은 사회적 구성체로서 설명과 정당화는 교사와 학생에 의해 상호작용적으로 구성되어 의사소통의 기능을 담당하는 담화의 측면으로 생각할 수 있다고 하였다. 학생과 교사는 자신의 수학적 사고의 측

면을 명백히 밝히기 위해 수학적 설명을 제시하는데, 이 설명은 상대방에게 즉시 명확한 것으로 수용되지 않을 수 있다. 이러한 경우 교사나 학생으로부터의 질문이나 반박에 대응하여 수학적 정당화를 제시하게 된다(Cobb 외, 1992). 예를 들어, “16+8+14는 얼마인가?”라는 과제에 한 학생이 “16에서 1을 떼어 15와 15를 얻었어. 이 15와 15를 더해 30을 구한 다음에 나머지 8을 더해 38을 구했어.”라고 답한다면, 우리는 그 학생이 자신의 해법을 설명하고 있다고 생각할 것이다. 그러나 16에 8을 먼저 더하고 그 후에 14를 더해 합을 구해야 한다는 반박에는 정당화를 제시해야 한다. 이러한 정당화는 그 수학 교실에서 확립된 기준과 일치하는 경우에 수용되는 것으로 생각된다(Hanna, 1990).

수학적 설명, 정당화 과정을 분석하기 위한 여러 연구들은 Toulmin(2003)의 논증 구조를 사용한다([그림 1] 참조).

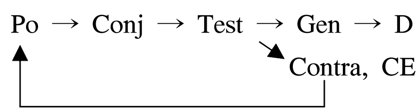


[그림 1] Toulmin의 논증 구조
[Fig. 1] Toulmin's argument structure

Toulmin의 논증 구조에서 ‘결론(claim)’은 확실한 것으로 생각되는 진술로써, 논증에 의해 밝히고자 하는 하나의 주장이다. 이 주장을 뒷받침하고 주장의 기초를 만드는데 필요한 증거나 추론에 해당하는 것이 ‘자료(data)’이다. 자료는 몇 가지 근거에서 타당성에 의문이 제기될 수 있다. 그런 경우 ‘확증(warrant)’이 필요하다. 확증은 자료의 합법성, 즉 왜 주어진 자료가 결론을 뒷받침한다고 생각하는지에 대한 이유를 설명한다. 자료, 주장, 확증은 논증 구조의 주요 3요소이다. ‘지지(backing)’는 확증에 대한 뒷받침, 확증을 지지하기 위해 사용하는 추가적인 증거로써, 왜 확증이 권위를 가진 것으로 받아들여져야 하는지 이유를 나타낸다. 지지는 일반적인 이론, 신념, 초보적인 전략을 지칭하고(Krummheuer, 1995) 이들 이론, 신념, 전략 등의 토의에 참여하는 참가자들 사이에서 얼마나 공유되어 있는지의 정도에 비례해서 성공적이다(Forman, Larreamendy -Joerns, Stein, & Brown, 1998). ‘제한(qualifier)’은 주장, 확증, 지지를 제한하는 조건으로 결론 앞에 붙어서 결론에 대한 설득력 정도를 나타내며, ‘반박(rebutal)’은 주장에서의 예외가 되는 경우, 반례나 반증 등 주장을 약화시키거나 반대하는데 사용되는 증거 또는 추론을 의미한다.

논증은 옳고 그름에 대하여 그 이유나 근거를 들어 밝히는 과정으로, 교실에서의 논증은 의사소통적이며 사회적 합의라는 배경을 떠나서는 생각할 수 없다(김민주, 권오남, 2006; Carpenter 외, 2003; Conner, 2012; Staples 외, 2012, Yackel, 2002). 김민주와 권오남(2006)은 학생들의 수학적 결론이 논리적으로 타당하도록 사용하는 근거를 수학적 정당화라고 보았을 때 수학적 정당화는 논증 구조에서 대부분 확증이나 지지의 형태로 나타난다고 지적하면서 다양한 수학적 정당화의 사용은 논증의 새로운 구성 요소가 되어 논증 구조의 질적 발전을 가능하게 하며, 교사와 학생의 질문은 수학적 정당화를 촉진하는 비계 역할을 한다고 보고하였다. Conner(2012)도 중학생들의 논증 구조에서 확인한 ‘확증’이 주장을 위한 적절한 정당화로서 받아들여지고 있음을 보여주고 있다.

교실에서의 수학적 정당화는 추측, 추론, 논증, 일반화와 밀접하게 연결되어 있으며, 일반적으로 패턴을 추측하고 그 패턴을 검사하고 나서 더 깊은 탐구를 위해 그 패턴을 이용하거나 패턴을 기각하거나 패턴을 수정하는 과정을 포함한다고 할 수 있다. Reid(2002)는 문제해결 과정을 통해 다양한 추론 패턴을 관찰하였는데, 전형적이고 일반적인 추론 패턴을 정리하면 다음과 같다([그림 2] 참조).



[그림 2] 교실에서의 전형적인 추론 패턴
[Fig. 2] Typical reasoning pattern in classroom

Po: 패턴 관찰하기 Conj: 추측하기
Test: 추측을 검증하기 Contra: 반박하기

CE: 반례 제시하기　　Gen: 추측을 일반화하기
D: 일반화를 이용하기

패턴을 관찰한다(Po)는 것은 특정한 몇몇 경우가 공통된 측면을 공유한다는 점을 인식한다는 것이다. 그러나 패턴 관찰은 체계적이지 못한 경우가 많다. 추측하기(Conj)는 관찰된 패턴이 일반적으로 적용될 것인가에 대한 판단을 포함한다. 이러한 판단은 일시적인 일반화의 상태로 사실 또는 거짓이라고 판단되지 않은 채로 제기된다. 추측의 과정은 명료하게 드러나지 않을 때가 많다. 추측 검증(Test)은 특수화와 비교로 이루어진 단순한 추론 패턴이다. 특수화는 추측에서 특수한 경우로의 연역을 의미한다. 추측 검증에서, 추측이 확정되어 일반화(Gen)하거나 추측에 대한 반박(Contra)이나 반례(CE)가 제시되어 추측이 기각되고 다시 패턴 관찰로 돌아가게 된다. 추측 확정을 통해 차후의 탐구적인 연역(D)의 기반이 되는 일반화의 상태가 된다.

교실에서의 수학적 정당화 활동은 자신의 주장이 참임을 밝히는 과정으로 끝나서는 안 되며, 다양한 정당화의 타당성에 대한 논의가 교실 논의의 핵심이 되도록 해야 하고 다른 학생들이 사용한 정당화와 그 전략을 검토할 수 있도록 격려해야 하며 수학적으로 수용할 수 있고 강력한 정당화 유형을 이해할 수 있도록 도와야 한다(Lannin, 2005). Toulmin(2003)의 논증 구조와 Reid(2002)가 제시한 추론 패턴은 교실에서 설명, 정당화 활동을 이해하는 토대가 될 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 방법 및 대상

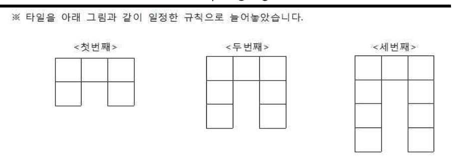
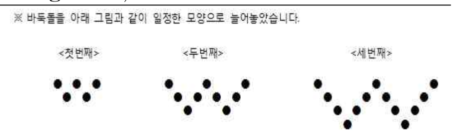
본 연구는 초등학교 5학년 한 학급을 대상으로 수학적 정당화 활동이 문제해결과 의사소통 과정에 미치는 영향을 조사하기 위해 사례 연구 방법을 사용하였다. 본 연구를 위해 서울시 성동구 A 초등학교 5학년 한 학급을 임의로 선정하였다. A 초등학교는 아파트가 점점 늘어나면서 사회경제적으로 중산층이 늘어가고 있는 지역에 위치하고 있으며, 학부모의 교육에 대한 관심이 높다. 연구 대상 학급의 담임교사는 경력 14년으로 학생들과 친밀한 관계를 유지하고 있다. 담임교사는 문제해결이나 수학적 정당화 등에 대한 깊이 있는 이해는 없었으나 수업 기술이나 방법에 있어 능숙한 교사이다. 소집단별 정당화 활동을 위해 수준이 다양한 학생 4명씩을 한 소집단으로 구성하였다.

2. 연구 절차

1) 프로그램 개발

본 연구의 목적을 위해 4차시의 문제해결 프로그램을 개발하였다([표 1] 참조). 기존 문헌들을 참고하여 과제를 선정하고, 외부 전문가 검토와 담임교사의 협의를 거쳐 수정・보완하였다. 각 차시는 깊이 있는 탐구와 다양한 해결 방법의 탐색, 자신의 아이디어를 설명하고 정당화하는 기회를 제공하기 위해 단 하나의 문제만을 다루도록 구성하였다.

[표 1] 차시별 문제 상황
[Table 1] Problem situations per class

차시	문제 상황
1	 <Rigelman, 2007>
2	 <김민주, 권오남, 2006>
3	 <Lannin, 2005>
4	 <Zazkis & Liljedahl, 2002>

2) 프로그램의 적용

학급의 담임교사는 수학적 정당화 활동에 대한 이해와 경험이 거의 없었기 때문에, 담임교사를 위해 다음과 같은 지원을 실시하였다. 연구자는 담임교사에게 수학적 정당화와 문제해결에 대한 안내를 제공할 뿐, 수업 중에는 상황에 참여하지 않고 상황에 대한 관찰자의 역할을 수행하였다.

- 수학적 정당화의 의미
- 수학교실에서 정당화의 목적
- 수학적 정당화 활동에서 교사의 역할
- 설명, 정당화 활동과 관련된 사회적 규범과 사회수학적 규범에 대한 이해
- 논증 구조에 대한 이해
- 문제해결 학습 과정(문제이해 - 계획수립 - 계획실행 - 반성)
- 집단 이용 방법(개별-모둠-전체)

본 연구에서의 수업은 일반적인 문제해결 수업 모형을 적용하여 문제 상황 제시 – 문제 이해 - 계획 수립 - 실행 - 반성 과정으로 진행되었다. 또한 개별 탐구 활동 - 소집단 토의 - 전체 논의의 순으로 진행하였다. [표 2]는 수업의 특징을 정리한 것이다. 수업은 학급의 기본 수학 시간을 이용하여 1주일에 2회씩 실시하였다.

[표 2] 수업의 특징

[Table 2] Characteristics of a lesson

과제 유형	규칙 찾기 전략을 사용하는 과제
학습 유형	문제해결 중심 학습 (문제이해-계획수립-실행-반성)
학습 과정	• 제시된 문제 상황을 이해하기(관찰한 내용 발표하기, 규칙을 이해하고 확장해 보기 등) • 개별적으로 규칙을 찾아 문제 해결하기(다양한 방법으로 규칙 찾기, 규칙을 찾아 그림, 글, 수식 등으로 설명해보기) • 모둠별로 찾아낸 방법을 정당화하기 • 전체 논의를 통해 해결 방법 공유하기
교사의 역할	• 수학적 정당화를 위한 교실 규범을 형성하기 위해 노력한다. • 다양한 방법을 찾도록 안내하고 자신의 생각을 발표하도록 격려한다. • 학생들이 개별적으로 또는 소집단으로 과제를 해결할 동안 안내나 도움을 준다.

3. 자료 수집 및 분석

본 연구를 위해 모든 학습 활동 과정을 비디오로 촬영하였다. 특히 소집단에서의 수학적 정당화 활동을 살펴보기 위해 소집단 활동 시에 특정한 한 소집단을 선정하여 집중적으로 관찰하였다. 촬영된 수업 내용은 전사하여 교수-학습 과정의 전체적인 흐름과 각 활동 단계에서 나타나는 수학적 정당화 활동과 의사소통 과정, 문제해결 활동 등을 분석하는데 사용하였다.

또한 학생들의 개별적인 문제해결 전략 및 정당화 유형 등을 살펴보기 위해 수업 중에 학생들이 해결하였던 활동지를 수집했다. 학생들의 개별 활동지는 수학적 정당화 활동의 토대가 되는 자료로써 촬영된 수업 장면에서의 활동과 비교하여 분석하였다.

수업이 끝난 직후에 필요한 경우 특정 학생과 면담을 실시하였으며, 방과후에는 담임교사와 수업에 대한 비구조화된 면담을 실시하였다. 담임교사와의 면담에서는 수업 중에 나타난 학생들의 반응, 각 단계에서 학생들의 정당화 활동을 촉진하기 위한 교사의 역할, 수업에 대한 교사의 느낌 등을 공유할 수 있는 기회가 되었다.

위의 자료들을 바탕으로 전체적인 수업의 흐름과 각 단계에서 나타나는 학생들의 정당화 활동과 의사소통 과정 등을 분석하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

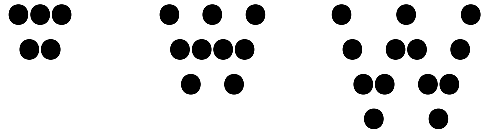
1. 결과 분석

본 연구는 문제해결 중심의 수업에서 수학적 정당화 활동이 학생들의 문제해결과 의사소통 과정에 미치는 영향을 조사하고자 하는 것이다. 분석을 위해 문제

이해 활동, 개별 탐구 활동, 소집단 토의 활동, 전체 논의 활동의 순으로 살펴보고자 한다. 4차시의 문제해결 중심 수업은 유사한 과정으로 진행되었으므로, 본고에서는 2차시에 이루어진 내용을 중심으로 기술하고자 한다. 학생 활동지는 [그림 3]과 같다.

※ 바둑돌을 아래 그림과 같이 일정한 모양으로 늘어놓았습니다.

<첫 번째> <두 번째> <세 번째>



※ 늘어놓은 모양을 살펴보고 관찰한 내용을 이야기해 봅시다.
※ 늘어놓은 모양에서 규칙을 찾아 그림, 글, 수식, 표 등을 써서 설명하시오.
※ 10번째 그림에는 몇 개의 바둑돌이 있을지 구해보시오.
※ 50번째 그림에는 몇 개의 바둑돌이 있을지 구해보시오.

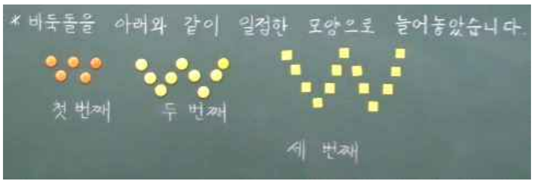
[그림 3] 2차시의 문제해결 활동
[Fig. 3] Problem solving activities of the 2nd class

1) 패턴 관찰을 돕는 문제 이해하기

교사는 활동지를 나누어 주기 전에, 칠판에 [그림 4]와 같이 문제를 제시하였다. 그리고 첫 번째 모양, 두 번째 모양을 확인하면서 세 번째에는 어떤 모양이 될지 생각해 보도록 하였다.

[그림 4] 교사의 문제 상황 제시
[Fig. 4] Problem situation presented by the classroom teacher

교사1: 선생님이 바둑돌을 아래처럼 늘어놓았는데, (칠판을 가리키면서) 첫 번째 모양, 두 번째 모양. 그런데 세 번째 모양은 왜 안 붙였을까요?
시영: 구하려고요.
교사2: 똑같은 색깔의 자석이 이만큼 없는 거야. 그래서 못 붙였어. 첫 번째 모양, 두 번째 모양을 보면서 세 번째 모양을 한 번 붙여볼 사람?
학생들: (학생들이 손을 든다.)
교사3: 예진이 나와서 붙여봅시다.
예진: (예진이가 칠판 앞으로 나온다.)
교사4: 자석이 없어서요. 동그라미로 오리기가 힘들어서 선생님이 네모난 모양으로 준비했어요. (자석을 예진에게 건넨다.)
예진: (자석을 붙인다.)



[그림 5] 예진의 반응
[Fig. 5] Ye-jin's response

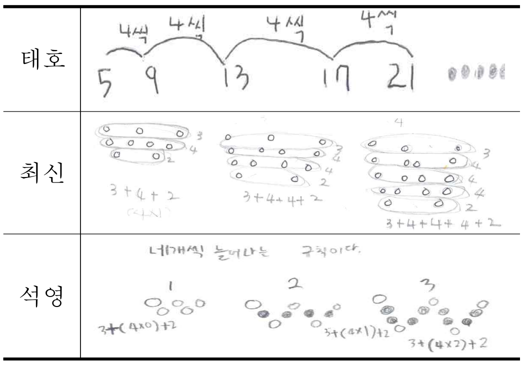
교사5: (예진이가 다 붙이고 돌아서자) 네, 맞는 것 같아요?
학생들 : 네.
교사6: (칠판을 가리키며) 바둑돌 모양을 보면서 관찰한 점을 이야기해 볼까요?
진호: W 모양 같아요.
지원: W 모양 각 변의 바둑돌이 규칙적으로 늘어나고 있어요.
진석: V자 2개가 함께 있어요.
소영: 양쪽 끝의 개수가 똑같아요.
교사7: 어디를 말하는 거니?
소영: W모양 양쪽 바깥 부분이요.
교사8: 좋아요. 그러면 일단 여러분에게 활동지를 나누어 줄텐데, 여러분이 이 안에서 규칙을 한번 찾아보는 거예요. 그런데 미션이 있어. 여러분이 교과서를 만드는 사람이 되는 거야. 그런데 교과서를 만드는 사람이 되어 책을 만들어야 하는데 아이들에게 정말 풀기 어려운 방법으로 알려주면 안 되겠지? 누구나 이해하기 쉬운 방법으로 알려주면 좋겠죠. 우리가 최대한 많은 방법을 찾아내서 그 안에서 가장 쉽고 정확한 방법은 무엇인지 한번 결정해

보도록 할게요.

학생들이 세 번째 패턴을 완성해 보게 하는 패턴 확장 활동과 모양의 특징에서 관찰한 점을 발표하는 활동은 학생들이 주어진 패턴에 집중할 수 있도록 해 주었다. Rigelman(2007)은 '패턴에서 관찰한 내용은 무엇인가?', '관찰한 내용을 이야기 해 볼까?', '다른 것을 관찰한 사람 있나요?'와 같이 패턴을 관찰하고 관찰한 내용을 공유하도록 하는 과정은 교사가 과정과 결과 모두를 중요하게 생각한다는 점을 보여주는 방법이 될 수 있다고 지적하였다. 이러한 과정은 학생들이 대화에 참여하도록 유도하고, 해법과 추론을 공유하게 해주고, 다른 학생의 아이디어를 바탕으로 다양한 방법을 고려하게 만들 수 있다. 학급의 교사는 학생들이 주어진 상황을 이해하고 발견한 것에 대한 자신의 아이디어를 설명할 수 있어야 한다는 점을 강조하면서 다양한 방법을 찾아보도록 안내하고 있다.

2) 개별 탐구 활동

문제 이해를 위한 전체 활동에 이어 개별적으로 활동지를 이용하여 늘어놓은 모양의 패턴을 관찰하고 패턴을 찾아 그림, 글, 수식, 표 등의 다양한 방법을 이용하여 설명해 보도록(쓰도록) 하였다. 이 과정은 Reid (2002)의 추론 패턴에서 패턴을 관찰하고(Po) 패턴을 예측하는(Conj) 과정이라고 할 수 있다. 더 나아가 스스로 규칙을 검증(Test)하기도 한다. [그림 6]은 학생들이 활동지에 규칙을 설명한 예이다.



[그림 6] 개별 탐구 활동 예들

[Fig. 6] Examples of individual exploratory activity

'태호'의 설명은 교과서에서 지도되는 일반적인 형태이기 때문에 학생들에게서 가장 많이 발견되는 방법으로 각 항에 있는 바둑돌의 개수를 세어 항들 사이의 관계를 찾는 방법이다. Lannin(2005)은 문제해결 과정에서 나타나는 학생들의 전략을 [표 3]과 같이 일반화 전략으로 구분하고 있는데, 태호는 세기(counting)와 재귀적 방법(recursive)을 활용하고 있는 것으로 보인다. 대부분의 학생들은 규칙을 찾기 위해 세기로 시작하게 된다. 하지만 학생들이 세기에 머물러서는 안 될 것이다. 세기 방법을 뛰어넘기 위해서는 좀 더 큰 항(예, 50번째 항의 개수를 구하시오.)을 구하도록 하는 것도 한 가지 방법이 될 수 있다.

'최신'은 주어진 문제 맥락을 바탕으로 패턴을 확장해가면서 규칙을 찾아가고 있다. 맨 윗줄의 3개와 맨 아랫줄 2개는 고정되어 있는 것으로 생각하고 가운데 있는 줄들은 항이 늘어갈수록 4개씩 늘어난다는 점에 착안했다. 이러한 전략은 Lannin(2005) 일반화 전략의 구분으로는 맥락(contextual)을 이용하는 경우이고 김민주와 권오남(2006)이 분류한 정당화 수준으로는 구체적 예에 의한 경험적 정당화에 해당한다고 할 수 있다. 또한 네 번째 항을 그림으로 나타내 봄으로써 자신의 규칙을 검증(Test)하고 있음을 볼 수 있다. '석영'의 경우는 '최신'과 유사한 방법을 사용하고 있으나 대수적인 수식으로 발전할 수 있는 형식화된 수식을 사용하고 있다.

[표 3] 일반화 전략 (Lannin, 2005)

[Table 3] Generalization strategies (Lannin, 2005)

전략	설명
counting	항에 나타난 개수를 세는 것
recursive	항 사이의 관계를 이용하기
whole-object	더 큰 항을 알기 위해 일정한 부분을 단위로 이용하기
Guess-and-check	원리 파악 없이 규칙을 예측하기
contextual	문제 상황에서 파악된 맥락을 바탕으로 규칙을 구성하기

3) 소집단에서의 정당화 활동

개별 탐구 활동이 끝나고 집단 내에서 자신의 해

결 방법을 정당화하고 아이디어를 공유할 수 있도록 하였다. 여기서는 한 소집단을 대상으로 정당화 활동 과정을 살펴보고자 한다.

교사1: 네. 개인적인 생각이 어느 정도 정리가 되었나요? 아직 안 되었나? 그러면 이제 모둠 안에서 자기의 방법을 설명해 줄 거예요. 서로 돌아가면서 설명을 해보세요. 설명이 이해가 안 되거나 이상하면 서로 질문을 해도 좋아요.

지민1: 내가 먼저 할게. 첫 번째는 5개, 두 번째는 9개, 세 번째는 13개니까, 다음 것은 17개가 될 거야. 왜냐하면 4개씩 커지거든.

소영1: 나중에 50번째, 100번째는 어떻게 구할 거야?

지민2: 아, 그러니까.... 그게 문제야.

최신1: 지원이 방법은 뭐야?

지원1: 동그라미 친 부분을 살펴보면(W 모양의 한 바깥쪽 줄을 가리키면서) 첫 번째는 2개, 두 번째는 3개, 세 번째는 4개, 이렇게 커지고 (가운데 부분을 가리키며) 첫 번째 1개이고 두 번째는 2+1, 3개가 되고 그런 규칙으로 W 모양을 이루고 있어. W모양을 이루고 있고 한 줄에 하나씩 커지니까.... 그렇게 구하면 돼.

지민3: 모르겠어. 다시, 어떻게?

최신2: (W 모양의 다른 바깥쪽 줄을 가리키면서) 대칭이 되게 묶어보자. 그러면 규칙이 보이지 않을까?

소영2: 그럼, 가운데는 어떻게 하지?

지원2: 가운데는 1개, 3개, 5개니까

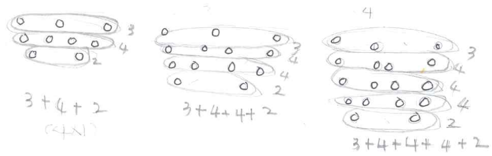
지민4: 2개씩 커지네.

최신3: 가운데 1개 빼고 2개, 가운데 1개 빼고 2개, 2개네.

지원3: 아, 가운데 하나를 고정하고 양끝을 대칭으로 만들어 놓고 가운데를 보면 1, 1+2, 1+4, 그래서 한 개는 고정으로 두고 0개, 2개, 4개씩 커져.

[그림 7] 지원의 정당화 전략
[Fig. 7] Ji-won's justification strategy

최신4: (자신의 활동지를 보여주며) 이번에는 내가 설명할게. 이렇게 묶어보니(가로로) 두 번째는 3개, 4개 2개, 세 번째는 3개, 4개, 4개, 2개였어. 네 번째는 3개, 4개, 4개, 4개, 2개가 될 거야. 4가 3번 있어. 이런 식으로 계속 4를 더하다 보면 10번째, 50번째도 구할 수 있어.



[그림 8] 최신의 정당화 전략
[Fig. 8] Choi-shin's justification strategy

소영3: 아 5+4×○ 이겠네.

지원4: 소영아, 너의 생각은 무엇이니?

소영4: 왼쪽에서부터 사선이 2개, 2개 / 3개, 3개 / 4개, 4개 되고 나머지는 첫 번째가 1개, 두 번째는 1개, 2개, 세 번째는 2개, 3개... 이렇게 돼.

[그림 9] 소영의 정당화 전략
[Fig. 9] So-young's justification strategy

앞의 에피소드를 보면, 소집단에서의 정당화 활동은 그림을 이용하여 구체적으로 예를 들어가면서 결론을 정당화하는데 그치고 있는 것으로 보이나 전체 논의에서의 정당화 과정을 보면, 소집단 토의에서의 정당화 활동이 전략을 좀 더 일반화하는데 영향을 미친 것으로 생각된다.

또한 소집단에서의 정당화 활동은 개별적인 정당화의 문제점에 대해 논의하고 개선하는 역할을 하고 있다. '지민1'의 설명에 대해 '소영1'이 큰 항은 어떻게 구할지 문제를 제기하고 있고, '지민3'이 '지원1'의 설명을 잘 이해하지 못하자 설명을 듣고 있던 '최신2, 3'이 규칙을 찾을 수 있는 방법을 제시하고 있다. 이를 통해 '지원3'은 자신의 전략을 구체적으로 이해하고 정당화하고 있다. 소집단에서 전략을 정당화하는 과정은 자신의 아이디어를 설명하기 위해 주요한 아이디어를 다시 한 번 고려하게 만들었고, 새로운 통찰을 얻게 해 주었다. 그리고 상대방의 아이디어와 전략을 분석하고 평가할 수 있게 해 주었다. Staples 외(2012)는 정당화

가 자신의 생각을 명료화하는 과정에서 이해를 깊게 해 줌으로써 개인의 지식 구성을 돕는다고 지적하고 있다.

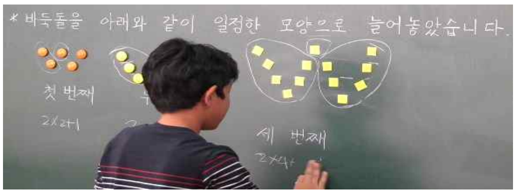
또한 학생들은 자신의 해결 방법을 설명하고 정당화하기 위해 글이나 그림, 수식 등을 이용하였다. 이러한 표현 방법들은 자신의 아이디어에 대한 정당화를 지원하는 도구의 역할을 하였다.

4) 전체 논의에서의 정당화 활동

소집단에서의 정당화 활동을 마친 후에는 전체 토의가 실시되었다. 전체 토의에서는 각 소집단에서 문제를 해결하기 위한 전략을 정당화하고 그 전략으로 좀 더 큰 항을 구하기 위한 일반식을 제시해보는 활동으로 진행되었다.

교사1: 자, 내가 찾은 방법, 혹은 우리 모둠에서 찾은 방법이 쉽고 누구나가 할 수 있는 방법인 것 같다고 생각하는 사람, 나와서 설명해 볼까요? 누가 먼저 해 볼까요? 석호? 석호 나와 보세요.

석호: 저는 이것을 맨 위 가운데에 있는 하나를 묶어주고 양쪽에 있는 것들을 또 묶어 식으로 만들었습니다. 첫 번째는 $2\times2+1$, 두 번째는 $2\times4+1$, 세 번째는 $2\times4+1$로 나타낼 수 있습니다. 맨 위에 가운데에 있는 하나를 묶어주고 양쪽을 나누어 묶어주면 답이 나온다고 생각합니다.



[그림 10] 석호의 정당화 과정
[Fig. 10] Seok-ho's justification process

교사2: (학생들이 손을 들자) 질문 있는 사람? 네. 민지.

민지: 두 번째가 $2\times4+1$이라고 했는데 세 번째도 $2\times4+1$이라고 썼어요.

교사3: 네, 두 번째 식과 세 번째 식을 같게 썼어요.

석호: (지우고 $2\times6+1$ 이라고 고쳐 쓴다.)

교사4: 새로운 방법이 나왔어요. 석호야, 쓴 식에서 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 찾아볼 수 있을까? (석호가 머뭇거리자) 우리는 이걸 간단하게 정리를 하고 싶어요. 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 찾아서 좀 더 쉽게 정리해 볼 사람?

진석: 준하요.

교사5: 불러보세요.

준하 : $2\times(\text{횟수}\times2)+1$. [* 횟수는 항의 번호를 의미하는 것으로 사용되고 있다.]

교사6: (준하 말을 받아 적으면서) 이렇게 나타낼 수 있대요. 맞나 살펴볼까요? (첫 번째 식을 가리키며) 횟수가 1이니까, $2\times2+1$. (두 번째 식을 가리키며) 횟수가 2니까, $2\times2=4$. 그래서 $2\times4+1$. (세 번째 식을 가리키며) 횟수가 3이니까, $2\times3=6$. 따라서 $2\times6+1$ 맞네요. 자 했어요.

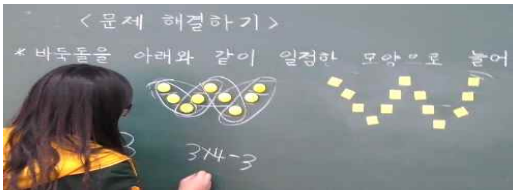
교사7: 자, 그럼, 난 이거 말고 다른 방법으로 풀었어요. 그래, 예지!

예지: (칠판 앞으로 걸어 나와 첫 번째 그림을 가리키며) 난 이걸 한 줄이라고 생각했어. 한 묶음에는 2개가 있는데 그 묶음이 4개가 있습니다. 그리고 또한 한 묶음이라고 생각하면 공통되는 부분이 3개가 생깁니다. 그래서 $2\times4-3=5$가 나옵니다.

예지: (두 번째 그림을 보며) 이것도 한 묶음이 3개씩이고 4묶음이 있으며 공통되는 것이 3개가 있습니다. 따라서 $3\times4-3=9$입니다. (세 번째 그림을 가리키며) 이것도 또한 네 묶음으로 나옵니다. 그래서 한 묶음에 있는 개수 4개와 4묶음, 공통부분 3개를 빼면 $4\times4-3=13$이 나옵니다.

교사8: 누구나에게 쉽게 알려주려면 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 찾아야 해요. 누가 식으로 나타내 볼까요? 지원이?

지원: [$(\text{횟수}+1)\times4-3$이라고 쓴다.]



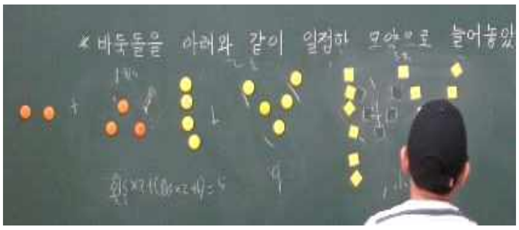
[그림 11] 예지의 정당화 과정
[Fig. 11] Ye-ji's justification process

교사9: 잘했어요. 맞는지 살펴볼까요? (칠판에 쓰인 수식을 차례로 가리키며) 횟수+1이니까 5, 9, 13. 맞네요. 또 다른 방법? 준하가 해볼까?

준하1: 첫 번째는 $\text{횟수}\times2+(\text{횟수}\times2+1)=5$가 되고 두 번째는 9, 세 번째는 13이 됩니다.

교사10: 그런데 준하야, 친구들이 잘 못 알아듣겠대.

준하2: (바둑돌을 옮기며 작은 목소리로 설명한다)



[그림 12] 준하의 정당화 과정

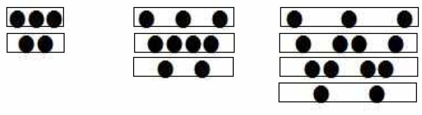
[Fig. 12] Joon-ha's justification process

교사: 준하의 설명은 첫 번째는 2+3, 두 번째는 4+5, 세 번째는 6+7라는 거예요. 이렇게 된다면 7번째는 얼마나 될까? 앞의 숫자는 14가 되고 뒤의 숫자는 15가 되어서 2×7+15=29가 되는 구나. 아, 무척 창의적인데요. (칠판에 수식을 적는다) 횟수×2+(횟수×2+1). 정말 간단한 것이 좋은 것 같네요.

전체 논의에서의 정당화 활동은 소집단 토의에서와 같이 각각의 주어진 그림에서 패턴을 찾는 경험적 정당화의 유형을 보여주고 있으나, 50번째 그림에 있는 바둑돌의 수를 구해야 한다는 점과 변하는 부분과 변하지 않는 부분에 주목할 것을 요구하는 교사의 방향 제시로 패턴을 형식화된 일반식으로 정리하고 있는 모습을 볼 수 있다. '석호'는 첫 번째 바둑돌의 개수를 2×2+1, 두 번째 바둑돌의 개수를 2×4+1, 세 번째 바둑돌의 개수를 2×6+1(처음에는 2×4+1 로 썼다가 민지의 지적으로 수정)로 구할 수 있다고 하였는데, 이것을 준하는 2×(회수×2)+1과 같은 일반화된 식으로 정리하였다(횟수는 항의 번호를 의미함). '예지'는 첫 번째 바둑돌의 개수를 2×4-3, 두 번째 바둑돌의 개수를 3×4-3, 세 번째 바둑돌의 개수를 4×4-3으로 구할 수 있다고 정당화하고 있는데, 이것을 '지원'은 (횟수+1)×4-3과 같은 일반화된 식으로 정리하였다. '준하'는 처음 설명부터 '횟수×2+(횟수×2+1)'라는 일반화된 식으로 설명을 하고 있다. 하지만 학생들이 이해하지 못하고 있는 것을 본 교사는 '준하'에게 바둑돌을 이용하여 설명하도록 하였다. '준하'는 W 모양의 바둑돌을 뒤쪽 V 모양과 앞쪽 부분으로 나누어 첫 번째는 2+3, 두 번째는 4+5, 세 번째는 6+7과 수식으로 나타내고 있다. 교사는 학생들의 이해를 돕기 위해 다시 한 번 정리해주고 있다. 김성준(2003)은 패턴을 통한 일반화에서 주된 문제는 그 패턴보다는 그것을 유용한 대수적 표현으로 나타내는 것이며, 여기서 큰 수는 대수적 표현을 이끌어내기 위한 중간 단계에서 산술 과정과 대수 결과를 동시에 나타내기 위해 효과적으로 사용될 수 있다고 하였다. 실험 수업에서 학생들이 일반화된 식을 필요로 하는 이유도 큰 수의 항을 구하기 위한 과정으로 이해될 수 있다.

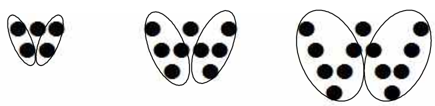
전체 논의 과정은 소집단 토의 과정보다 더 활기차고 깊이 있는 상호작용을 보여주고 있는데, 이는 소집단 토의에서 같은 논의가 이루어진 것 때문인 것을 보인다. 수업에서의 개별 활동, 소집단 토의, 전체 논의에서 제시된 정당화 방법들을 정리하면 다음과 같다.

- <해결 방법 1> 3+{4×(n-1)}+2, n: n번째



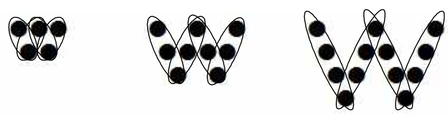
3+2 3+4+2 3+4+4+2

- <해결 방법 2> (n+1)×2)+1, n: n번째



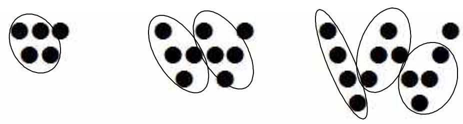
2×2+1 4×2+1 6×2+1

- <해결 방법 3> (n+1)×4-3, n: n번째



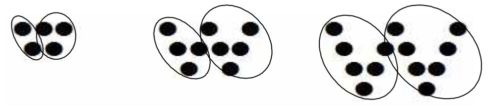
2×4-3 3×4-3 4×4-3

- <해결 방법 4> 4×n+1, n: n번째



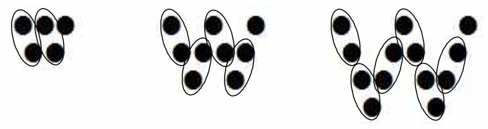
4×1+1 4×2+1 4×3+1

- <해결 방법 5> (n×2)+(n×2+1), n: n번째



2+3 4+5 6+7

- <해결 방법 6> 2×(n×2)+1, n: n번째



2×2+1 2×4+1 2×6+1

- <해결 방법 7> 곱셈 구구 4단과의 비교

항	1	2	3	…	n
개수	5	9	13	…	4×n+1
4단	4	8	12	…	4×n
규칙	4+1	8+1	12+1	…	4×n+1

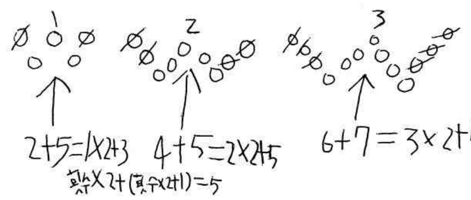
2. 논의

앞에서 살펴본 문제 이해 활동, 개별 탐구 활동, 소집단 토의 활동, 전체 논의 활동에 대한 결과를 바탕을 몇 가지 논의해 보고자 한다.

첫째, 문제해결 과정에서 수학적 정당화의 강조는 학생들의 사고를 촉진하고 문제해결 전략에 대한 깊이 있는 이해를 이끈다는 점이다. 소집단 활동에서 '지민'은 각 항의 바둑돌 개수가 5, 9, 13, … 으로 각 항의 바둑돌 개수의 차이가 4개임을 이용하여 네 번째 항의 바둑돌의 개수를 17개라고 예상하고 있다. 아마도 '지민'은 이 방법으로 가능한 범위까지 구할 수 있었을 것이다. 하지만 "50번째, 100번째는 어떻게 구할거야?" 라는 '소영'의 반박에 더 이상의 설명을 하지 못하고 있다. '소영'의 반박은 '지민'이가 자신의 아이디어를 더 깊이 있게 고려하게 되는 자극이 되었다. '지민'의 아이디어는 <해결 방법 4>와 <해결 방법 7>과 같은 방법으로 정리될 수 있을 것이다. 전체 논의 활동에서 '석호'와 '예지'는 자신의 해결 방법을 구체적인 그림을 통해 정당화하고, '준하'와 '지원'은 이 방법을 일반화된 식으로 보여주고 있다. 이러한 과정을 통해 '석호'와 '예지'는 자신의 방법을 더욱 깊이 있게 이해할 수 있었다.

Staples 외(2012)는 수학적 정당화가 학생들의 학습, 특히 개념을 심화하도록 촉진할 수 있다고 지적하고 있다. 또한 Carpenter 외(2003)는 수학 수업의 목표 중의 하나는 학생들이 개념에 대해 의문을 가지고 개념을 정당화하기 위해 수학적 논쟁을 사용할 필요가 있다는 것을 돕는 것이라고 지적하면서, 학생들이 어떤 것이 옳은지 스스로 판단하고 다른 사람이 참이라고 하기 때문에 그것을 간단하게 받아들이지 않도록 해야 함을 강조하였다. 학생들은 정당화 과정을 통해 자신의 주요한 아이디어를 다시 한 번 반성해보게 되고 자신의 아이디어에 대한 깊이 있는 이해를 얻게 될 것이다.

둘째, 정당화는 의사소통 기능과 표현 기능의 발달을 돕는다. 수학적 정당화가 적절한 근거를 바탕으로 자신의 의견을 설명하고 설득하는 과정이라고 할 때, 정당화는 그림, 수식, 기호, 표 등 몇 가지의 표현을 포함하기 때문에 학생들이 다양한 표현을 개발하고 참여할 기회를 제공하였다. 정당화가 표현 능력을 개발하는 유일한 방법은 아니지만 정당화는 가치 있는 표상적 능숙함에 도달하는데 도움을 주는 유용한 도구가 될 수 있다. 본 연구에서 학생들은 개별 탐구 활동, 소집단 토의, 전체 논의 과정에서 다양한 정당화를 보여주고 있다. 많은 경우는 그림과 수식, 글 등을 이용하여 규칙을 설명하고 있다. [그림 13]은 '준하'의 정당화 전략으로 먼저 그림을 통해 패턴을 관찰하고 그림을 수식으로 나타내고 있다.



[그림 13] 준하의 정당화 전략

[Fig. 13] Joon-ha's justification strategy

'준하'는 수식에 대한 관찰을 통해 횟수×2+(횟수×2+1)라는 일반화된 식으로 정리하고 있다. 일반화된 식은 전체 논의 과정에서 '변하는 부분과 변하지 않는

부분'에 대한 교사의 안내를 통해 추가된 것으로 보인다. 흥미로운 점은 '준하'가 전체 논의에서 설명한 내용은 <해결 방법 5>와 일반화된 식은 같다는 점이다. 일반화 식은 같지만 그림으로 보면 서로 다른 정당화 방법임을 알 수 있다.

Yackel(2004)은 상호작용주의 관점에서 설명과 정당화를 개인의 구성이 아닌 교사와 학생에 의해 상호작용적으로 구성되는 의사소통의 기능을 담당하는 담화의 측면으로 생각할 수 있다고 지적하고 있다. 지금까지 많은 연구들이 수학적 정당화를 학문적 관점에서 포괄적인 증명 활동으로 정리하고 있지만 정당화가 필연적으로 사회적 과정이라면 교실에서의 정당화는 의사소통의 관점에서 학생들의 수학 학습을 지원하는 도구이다.

셋째, 정당화는 학생들의 이해를 평가하는 주요한 방법이 될 수 있다. 교사는 학생들의 정당화 과정이나 유형 등에 대한 관찰을 통해 주어진 목표에 도달한 정도를 모니터할 수 있을 것이다. 교사는 학생들의 정당화로부터 학생들이 문제에 대해 어떻게 생각하고 있는지에 대한 정보를 얻을 수 있다. 이 정보를 통해 학생들이 어려워하는 것, 잘못 알고 있는 것 등을 파악하게 되고 차후의 교육 프로그램을 구성하는데 도움을 줄 것이다. 또한 정당화는 자기-평가의 기능도 한다. 정당화는 학생들이 자신의 해결 방법이나 실수를 반성하도록 자극한다. 앞에서 언급했듯이, 이것은 수학적 개념과 아이디어에 대한 깊은 이해를 이끌 것이다. 본 연구의 담임교사는 인터뷰에서 수학적 정당화 활동이 학생들의 수학적 능력을 평가하는 좋은 방법이 될 것 같다고 언급했다.

> 정당화는 지필평가로는 알 수 없는 학생들의 다양한 능력을 볼 수 있는 것 같아요. 자신의 아이디어를 수학적으로 의사소통하는 능력이라든지, 근거를 들어 조리 있게 설명하는 방법이나... 다른 학생의 설명을 듣고 질문하는 것을 통해서도 그 학생의 능력을 볼 수 있었던 것 같아요. 정당화 과정에서 예전에 볼 수 없었던 깊이 있고 창의적인 반응들을 볼 때, 학생들도 매우 집중해서 활동에 참여하는 것으로 보입니다.

넷째, 정당화는 사회적 관계 및 역동적인 교실 문화를 형성하는데 기여한다는 점이다. 교실에서의 정당화는 자신의 아이디어를 설명하고, 상대방의 설명을 듣고, 반박하는 과정을 통해 자신의 아이디어를 반성해 보는 역동적인 과정이다. 이러한 과정을 통해 수학적 설명과 정당화에 관련된 교실 규범이 형성되고 상대방을 존중하고 배려하는 사회적 관계에 대한 태도도 향상될 것이다.

수학적 정당화 활동은 학생들에게 있어 수학을 학습하고 한다는 생각을 갖게 해 준다. Conner(2012)는 수학적 정당화 활동이 활발한 교실은 학생들이 지적 자율성을 보이는 있다고 하였고, Yackel & Cobb(1996)은 수학교육의 목표중의 하나는 학생들의 지적 자율성을 신장시키는 것이라고 제안하였는데, 수학적 정당화는 이 목표를 실현하는 구체적인 방법이 될 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 수학적인 관점이나 개인적인 측면이 아닌 교수 실제로써 그리고 사회적 측면에서 수학적 정당화가 가지는 의미와 교실에서의 역할을 살펴보고자 하였다.

수학적 정당화는 주장이 참임을 보이는 포괄적인 증명 활동으로, 일반적으로 증명의 관점에서 정당화의 목적과 역할 등을 고려해온 것이 사실이다. 수학적인 관점에서 증명(정당화)의 역할은 주장의 타당성을 검증하고, 결과를 조명하거나 통찰을 제공해주고, 지식을 체계화하는 것이라고 할 수 있다. 하지만 교실 실제로써의 정당화는 수학에 대한 이해와 수학을 하는 것에 대한 능숙함을 증진시키는 수단으로 학생들의 학습을 돕는 도구가 되어야 한다. 정당화가 수학에서 중요하기 때문에 수학 교실에서 다루어져야 한다는 학문적 중요성에 기초하여 정당화가 중요한 것이 아니라, 교실에서의 학습 관행 측면에서 중요하게 다루어져야 한다.

본 연구 결과에서 논의했듯이, 수학적 정당화를 위해 자신의 주요한 아이디어를 살펴보고 명료화하는 과정을 통해 그리고 다른 학생들의 설명을 듣는 과정을 통해 개념적 이해가 심화될 수 있다. 또한 교실에서의 수학적 정당화는 의사소통 기능과 다양한 표현 능력의 발달을 돕고 표상간의 연결을 도울 수 있으며, 학습을 모니터링하고 평가할 수 있게 해줄 뿐만 아니라 교실

에서의 다양성을 다룰 수 있도록 도울 수 있다.

본 연구 결과를 바탕으로 몇 가지 제언을 하고자 한다. 첫째, 본 연구는 문제해결을 통한 수학적 정당화 활동을 살펴보았다. 교수 실제로써 수학적 정당화에 관심을 갖고 수학적 정당화 능력을 신장시키기 위한 지도 방법 및 프로그램에 대한 연구가 필요하다. 둘째, 수학적 정당화는 수학 학습의 여러 측면의 발달과 관련된다. 개념적 이해, 의사소통 능력, 평가 등의 주제와 관련된 후속 연구들이 더욱 필요하다. 셋째, 수와 연산, 도형, 측정 등 여러 영역에서 수학적 정당화가 적용되는 사례 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8].

Ministry of Education, Science and Technology (2011). *Mathematics curriculum.* Notification No. 2011-361 [supplement 8] of the Ministry of Education, Science and Technology.

권성룡 (2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등 수학교육>, **7(2)**, 85-99.

Kwon, S. Y. (2003). A study on mathematical justification activities in elementary school. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 7*(2), 85-99.

김민주・권오남 (2006). 사회적 상호작용 중심의 탐구지향학습에서 나타나는 학생들의 논증과 수학적 정당화. 교육학연구, **44(1)**, 247-275.

Kim, M. J., & Kwon, O. N. (2006). Students' argumentation and mathematical justification in inquiry-oriented learning. *Korean Journal of Educational Research, 44*(1), 247-275.

김성준 (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. 대한수학교육학회지 <학교수학>, **5(3)**, 343 -360.

Kim, S. J. (2003). A study on approaches to algebra focusing on patterns and generalization. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics: School Mathematics, 5*(3), 343 -360.

김정하・강문봉 (2009). 초등학교 교사들의 수학적 정당화에 대한 연구. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, **19(3)**, 371-392.

Kim, J. H., & Kang, M. B. (2009). A study on mathematical justification of elementary school teachers. *Journal of Educational Research in Mathematics, 19*(3), 371-392.

김지영・박만구 (2011). 수학 영재 교육 대상 학생의 기하 인지 수준과 증명 정당화 특성 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, **14(1)**, 13-26.

Kim, J. Y., & Park, M. G. (2011). An analysis of justification process in the proofs by mathematically gifted elementary students. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series C: Education of Primary School Mathematics, 14*(1), 13-26.

서은미・류희찬 (2009). 탐구형 기하 소프트웨어 환경에서 나타나는 초등학생의 수학적 정당화. 한국교원대학교 수학교육연구소, 청람수학교육, **1(1)**, 39-65.

Seo, E. M., & Lew, H. C. (2009). Case study of the elementary students' mathematical justification displayed in the process of solving geometry problems using dynamic geometry software. *KNUE Journal of Mathematics Education, 1*(1), 39-65.

서지수, 류성림 (2012). 수와 연산・도형 영역에서 초등 3학년 학생들의 수학적 정당화 유형에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **26(1)**, 85-108.

Seo, J. S., & Ryu, S. R. (2012). A study the types of mathematical justification shown in elementary school students in number and operations, and geometry. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education*

Series E: Communications of Mathematical Education, 26(1), 85-108.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situation of validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147-176.

Carpenter, T. P., Fanke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school.* Portmouth, NH: Heinmann.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2005). Learning about statistical covariation. *Cognition and Instruction, 21*(1). 1-78.

Cobb, P., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal, 29*(3), 573-604.

Conner, A. (2012). Warrants as indications of reasoning patterns in secondary mathematics classes. *Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education(TSG-14, 2984-2992)*, Seoul, Korea.

Council of Chief State School Officers(CCSSO) & National Governors Association Center for Best Practices(NGA Center). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics.* http://www.corestandards.org/

Forman, E. A., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. K., & Brown, C. A. (1998). You're going to want to find which and prove it: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction 8*(6). 527-548.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange 21*(1), 6-13.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1), 5-23.

Krummheuer, G. (1995). The ethnology of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*(pp. 229-269). Hisdales, Nj: Erbaum.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* NY: Cambridge University Press.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Luhmann, N. (1995). *Social systems.* Stanford, CA: Stanford University Press.

Maturana, H. R., & Varela, F. J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston: Shambhala.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1968). *Mathematics and plausible reasoning.* (2nd ed.). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Popper, K. (1963). *Conjectures and refutations: The growth of scientific knowledge.* London: Routledge and Kegan Paul.

Rigelman, N. R. (2007). Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics, 13*(6), 308-314.

Reid, D. A. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teacher. *Journal of Mathematics Teacher, 15*(1), 3-31.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of student's justification. *The Mathematics Teacher*, *91*(8), 670-675.

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E.

(2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifacted role in middle grades mathematics classrooms. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(4), 447-462.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*(updated ed.). NY: Cambridge University Press. Originally published in 1958.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience.* Cambridge, MA: MIT Press.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analyzing the teacher's role in collective argumentation. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 423-440.

Yackel, E. (2004). Theoretical perspectives for analyzing explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. *Journal of the Korea of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 8*(1), 1-18.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. 27*(4), 458-477.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

Effects of Mathematical Justification on Problem Solving and Communication

Jeong, In Su
Ok Jeong Elementary School, Oksu-dong 233-16, Seongdong-gu, Seoul, Korea
E-mail : smfcjung@sen.go.kr

Mathematical justification is the process through which one's claim is validated to be true based on proper and trustworthy data. But it serves as a catalyst to facilitate mathematical discussions and communicative interactions among students in mathematics classrooms. This study is designed to investigate the effects of mathematical justification on students' problem-solving and communicative processes occurred in a mathematics classroom. In order to fulfill the purpose of this study, mathematical problem-solving classes were conducted. Mathematical justification processes and communicative interactions recorded in problem understanding activity, individual student inquiry, small and whole group discussions are analyzed.

Based on the analysis outcomes, the students who participated in mathematical justification activities are more likely to find out various problem-solving strategies, to develop efficient communicative skills, and to use effective representations. In addition, mathematical justification can be used as an evaluation method to test a student's mathematical understanding as well as a teaching method to help develop constructive social interactions and positive classroom atmosphere among students. The results of this study would contribute to strengthening a body of research studying the importance of teaching students mathematical justification in mathematics classrooms.

* ZDM Classification : D42
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : mathematical justification, problem solving, communication