韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
http://dx.doi.org/10.7468/jksmec.2013.16.3.251
2013. 12 제 16권, 제 3호, 251-266

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Dec. 2013, Vol. 16, No. 3, 251-266

사칙연산의 1차적 개념을 학습한 학습자의 Schema가 거듭제곱과 혼합계산의 관계적 이해에 미치는 영향에 대한 사례연구

김 화 수 (세한대학교)

본 연구에서는 사칙연산의 1차적 개념을 학습한 초등학생들을 대상으로 거듭제곱과 혼합계산을 내용으로 하였을 때, 정확한 개념의 인지와 개념의 연결로 스키마와 변형된 스키마[1)]를 어떻게 구성을 하는지 알아보았다. 즉 사칙연산의 1차적 개념으로 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 2차적 개념에 대한 관계적 이해를 하는지, 그리고 연구대상자들이 스스로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 어떻게 이용하여 문제 해결에 접근을 하는지, 또한 연구대상자들의 개념구성과 문제해결력에서의 스키마는 어떻게 변형을 이루어 나가는지를 심도 있게 조사하였다. 그 결과 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전 할 때, 정확한 1차적 개념에 대한 인지와 스키마 그리고 변형된 스키마가 중요한 요인으로 작용 한다는 것을 알 수 있었고 이때, 1차적 개념끼리의 연결과 정확한 1차적 개념에 대한 인지로 인해서 만들어지는 스키마와 변형된 스키마의 형성이 2차적 개념으로의 발전과 수학적 문제 해결에 무엇보다도 중요한 역할을 한다는 것을 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

수학은 과정의 학문이다. 그리고 그 과정을 구성하는 몫은 학습자이고, 학습자의 구성의 능력을 높이는 역할은 교사의 몫이다.

구성을 하기 위해서는 구성하는데 필요한 재료가 있어야 한다. 수학에서 구성에 필요한 재료는 1차적 개념[2)]이다. 1차적 개념들의 연결에 의해서 2차적 개념이 형성이 되고, 2차적 개념끼리의 연결 또는 2차적 개념과 1차적 개념들의 연결로 3차적 개념이 형성이 되고, 더 나아가 고차원적 개념이 형성이 된다. 또한 학습자가 스스로 개념을 구성하였을 때, 교사와 학습자간에 수학적 의사소통이 이루어진다.

제7차 수학과 교육과정에서는 수학적 의사소통과 관련하여 학생들의 수학에 관한, 수학을 통한 정보 교환 능력을 수학적 힘의 하나로 보고 이미 학습한 수학적 내용, 개념, 용어 등을 사용하여 자신의 생각과 아이디어를 수학적으로 표현하고 설명하는 능력에 대해 평가할 필요성을 언급하였다.(교육부, 1998)

수학적 의사소통이 이루어진다는 것은 학습자가 형성한 스키마 또는 변형된 스키마를 어떻게 구성을 했는지 그 과정을 교사에게 설명하고, 교사는 그 구성의 과정에 대해서 개념의 연결성을 분석, 파악하여 다시 학습자들에게 피드백을 주는 활동을 말한다. 요리를 만들기 위해서는 요리를 만들기 위한 재료가 필요하고, 그 재료들의 특성에 대해서 정확하게 알아야 한다. 수학적 사고 또한 수학적 사고를 하기 위한 수학적 재료(1차적 개념)가 필요하고, 그 재료(1차적 개념)들의 특성에 대해서 정확하게 알아야한다.

Goos(2004)와 McClain과 Cobb(2001)은 학생들의 수학적 발달 신장을 위해 교사의 역할에 대해서 연구를 해야 한다고 주장하였다. 수학적 문제해결력과 수학적 의사소통이 이루어지기 위해서는 무엇보다도 교사는 정확한 1차적 개념에 대한 연구를 해야 한다. 정확한 1차적 개념에 대한 연구가 이루어졌을 때, 교사는 학습자들에게 1차적 개념이라는 재료를 나누어 줄 수 있

* 접수일(2013년 12월 3일), 수정일(2013년 12월 10일), 게재 확정일(2013년 12월 20일)
* ZDM 분류 : D42
* MSC2000 분류 : 97D40
* 주제어 : 1차적 개념, 스키마, 변형된 스키마

1) Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태가 새롭게 변형된 1차적 개념을 다른 일차적 개념이나 스키마와 연결 시켜 형성되는 새로운 스키마를 의미한다.(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨)

2) 개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 쓰인 개념(수학적 약속이나 정의), 또는 스키마를 구성하는 가장 하위 단계의 개념을 뜻한다(보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념의 범위는 유동적일 수 있다).

는 것이다. 이 1차적 개념이 학습자들에게 제공되었을 때, 학습자들은 개념의 구성체인 스키마 또는 변형된 스키마를 스스로 형성 할 수 있는 것이고, 이렇게 형성된 스키마와 변형된 스키마는 수학적 문제 해결뿐만이 아니라 자신의 스키마를 어떻게 형성했는지를 교사에게 표현함으로써 수업시간에 의사소통이 자연스럽게 이루어 질 수 있는 것이다.

Skemp(1987)는 스키마를 구성하기 위하여 먼저 수학을 관계적으로 이해해야 한다고 하였다. 많은 초등 학생들은 여러 사설 교육기관이나 국립기관 그리고 개인 교습을 통하여 많은 양의 선행학습을 행하고 있다. 이들 중 대부분은 방법과 이유를 아는 관계적 이해를 하기보다는, 주어진 규칙을 적용하여 정답을 찾아내는 도구적 이해를 하고 있고 수학을 능동적이기보다는 수동적인 입장에서 받아들이게 되는 성향을 강하게 보이고 있다. 실제로 본 연구자가 연구한 초등학교 3학년 학생들은 전통적인 교사 중심의 환경에서 수학을 배운 학생들이어서 NCTM(1991 & 2000), Raymond(1997), 및 Kuhs와 Ball(1986)이 언급한 것처럼 기본적인 규칙과 수학적인 내용, 그리고 문제를 해결하는 방법과 공식은 알아도 '왜', 그렇게 되는지에 대해 아는 학생은 연구 초반에는 거의 없었다. 또한 그들이 가지고 있는 스키마가 새로운 개념이나 스키마에 연결이 되지 않을 경우에는 방법과 이유를 아는 관계적 이해의 수학이 아닌 주어진 공식에 대입하여 정답을 찾아내는 도구적 이해의 수학을 하려는 성향이 강하게 나타났다. 그러나 이들은 공식이나 수학적 현상이 '왜' 그렇게 되는지에 대해 알고 싶어 했고 그러한 궁금증에 대해 교사가 직접 해결책을 주기보다는 학생들이 가지고 있는 개념에 조금 더 가까운 개념을 제공해 주었을 때, 그들은 수학에 흥미를 가지는 것과 함께, 놀라운 과제 집착력과 응용력 그리고 여러 가지 방법을 이용한 문제해결력을 보여 주었다. 그리고 이러한 과정에서 발생한 이들의 과제 집착력은 수학적 정보의 파지에 많은 도움이 되었다.(김지원, 송상헌, 2004)

교사가 수학의 개념을 스키마로 구성하여 알고 있을 때, 교사는 학생들과의 수업이 이루어지기 이전에 자신과의 반영적 사고를 통하여 수업을 미리 진행해 볼 수 있고, 그로 인해 교사는 학생 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰 할 수 있으며, 학생 스스로 자신의 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 개선하도록 도와 줄 뿐만 아니라, 여러 가지 모양의 스키마를 형성하여 문제해결에 접근을 할 수 있는 것이다.

이러한 초점을 바탕으로 본 논문에서는 스키마를 구성하기 위해 필요한 1차적 개념에 대한 연구와 이로 인해 형성되는 스키마와 변형된 스키마를 분석 하고 이것을 중심으로 스키마식 수업모델을 제시하여 수업을 실시할 때, 나타나는 여러 현상, 즉 학생들의 개념 형성 과정상의 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전해 나갈 때, 나타나는 현상을 거듭제곱과 혼합계산에 대한 수학적 내용을 중심으로 조사 연구 하고자 하였다.

2. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 문제가 설정되었다.

1. 학생들은 사칙연산의 1차적 개념으로 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 2차적 개념에 대한 관계적 이해를 하는가?

2. 학생들은 사칙연산의 1차적 개념으로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 어떠한 방법으로 혼합계산 문제를 해결하는가?

3. 용어의 정의

1차적 개념

개념들의 결합으로 만들어지지 않은 단독으로 형성된 개념. 즉, 그 개념이 가지고 있는 본질적인 의미를 뜻한다.

예를 들어, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나 병합하는 계산법으로, 더해짐을 당하는 수는 피가수라 하고 더하는 수를 가수라고 하며, 그 결과를 합이라고 한다(고정일 외 백과사전 편찬부, 2003).

2차적 개념

1차적 개념들의 결합으로 만들어진 개념을 뜻한다. 예를 들면, 약수[3]는 사칙연산의 스키마와 변형된 스키마의 연결로 만들어진 2차적 개념이다. 그러므로 피제수에 제수가 한 번 또는 여러 번 포함되거나, 포함된 개수만큼 피제수에서 제수를 뺏을 때, 피제수의 나머지가 없으면[4] 그때의 제수는 약수가 된다. 그리고 제수를 한 번 또는 여러 번 더하거나, 더한 제수의 개수를 제수에 곱했을 때, 피제수가 나오면 이때의 제수와 곱해진 수(더한 제수의 개수)는 약수가 된다.

변형된 스키마

Skemp가 말하는 스키마는 개념과 개념들의 결합으로 이루어진 개념의 구성체를 말한다. 그러나 본 연구에서 변형된 스키마라 함은 1차적 개념의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태가 새롭게 변형된 1차적 개념을 다른 1차적 개념이나 스키마와 연결 시켜 형성되는 새로운 스키마를 의미한다.(변형된 스키마 또한 큰 의미에서 스키마에 포함됨)

예를 들면, 덧셈의 1차적 개념은 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 첨가하거나(포함시키는) 병합하는 계산법을 뜻한다. 이 1차적 개념을 바탕으로 덧셈의 본질은 변하지 않으면서 모양이나 형태를 새롭게 변형시킨, 하나의 수 또는 양에 또 하나의 수 또는 양(같은 종류, 같은 크기)을 1의 크기로 한 번 또는 여러 번 세는 계산법[5]과 같은 변형된 스키마를 형성 할 수 있다. 예를 들면, $7+8$과 같은 덧셈의 경우 $7+8$을 $(7+3)+5$와 같은 과정에 의하여 합을 구하는 것으로 형성된다. 그럼에도 불구하고 일부 아동들은 $7+8$을 7부터 수를 1씩 세는 여덟 번을 세서 더하는 방법(이 방법은 덧셈 과정에서 이미 형성되어 있는 스키마이다) 즉, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15와 같이 합을 구한다. 이와 같은 방법으로 덧셈의 합을 구하는 과정을 본 연구에서는 기존의 스키마에 일차적 개념이 연결된 변형된 스키마라고 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 관계적 이해와 변형된 스키마

수학에서 스키마를 어떻게 구성하는 것이 바람직한 것인가에 대한 아이디어로 Skemp는 관계적 이해를 들고 있다.(Skemp, 1987, pp.257-278) 그는 이해를 두 가지로 구별하여 '관계적 이해(relational understanding)'와 '도구적 이해(instrumental understanding)'라 하였는데, 관계적 이해는 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 아는 것이며, 도구적 이해는 진정으로 알지 못한 채 공식을 사용하는 능력이라고 Skemp는 설명하였다. 대부분의 학생들은 문제를 풀 때, 개념적인 접근을 먼저 시도하는 것이 아니라 공식먼저 찾고 공식에 의한 생각을 하며 공식에 의한 문제 해결을 한다. 그리고 어떻게 해서 그 문제를 풀었는지에 대한, 답을 할 때도 공식에 근거해서 설명을 하고 개념에 대한 이해를 하지 못했다 하더라도 공식만 맞으면 자신 스스로가 이해를 했다고 생각을 한다. 이것은 관계적 이해보다 도구적 이해가 학생들의 머릿속에 더 강하게 남아 있다는 것을 의미하며 다른 방향으로 생각해 본다면, 도구적 이해가 관계적 이해보다는 처음에 학습할 때, 더 빠르게 습득이 된다는 의미와도 연결이 된다. 그러나 도구적 이해는 '공식'이라는 접근방법이 이미 정해져 있어서 중재사고 활동이 거의 없는 이해이기 때문에 문제를 해결하는 속도는 빠를지 모르지만 다른 형태의 응용된 문제에 연결시키거나 상위 단계의 개념으로 확장하기는 쉽지 않다. 실제로 두 명의 초등학교 3학년 학생들에게 나눗셈에 대해서 학생 A에게는 기존의 방법과 같이 곱셈을 이용해서 나눗셈의 몫을 구하는 방법을 가르쳐 주고, 학생 B에게는 나눗셈의 개념을 가르쳐 주었을 때, 학생 A는 오직 한 가지 방법(곱셈을 이용한 방법)만을 사용하여 문제를 해결하였지만, 학생 B는 나눗셈의 개념을 이용한 두 가지의 스키마[6]와 세 가지의 변형된 스키마[7]를 사용하여 문제를 해결하는 것을 볼 수 있었다. 그리고 학생 B는

3) 어떤 수를 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수.
4) 6의 약수는 6을 나누었을 때, 나누어 떨어지게 하는 수이므로 이것을 뺄셈과 연결시키면, 피제수 6에서 제수 1을 6번(6÷1), 제수 2를 3번(6÷2), 제수 3을 2번(6÷3), 제수 6을 한 번(6÷6) 피제수의 나머지가 없이 뺄 수 있다. 그러므로 6의 약수는 1, 2, 3, 6이 된다.
5) 아동들이 덧셈을 행할 때, 기존의 세기(counting) 방법을 덧셈의 개념에 연결하여 형성한 변형된 스키마의 계산법.

문제를 해결하는 과정에서 계속 생각을 하였고, 그 생각은 곧바로 여러 창의적인 아이디어로 발전을 하였다. 그러나 학생 A는 문제를 해결하는 과정에서 생각을 거의 하지 않았고, 문제를 보는 순간 곧바로 계산에 들어갔으며, 문제 해결에 접근하는 방법 또한 오직 한 가지(곱셈을 이용한 방법) 뿐이었다. 또한, 학생 B는 자기 스스로가 문제를 여러 가지 방법으로 해결해 나가는 능동적인 모습으로 변해 가고 있었지만, 학생 A는 여전히 교사의 스키마와 공식에 의존하는 수동적인 모습을 계속해서 보이고 있었다. 여기에 상위 단계의 개념인 약수를 학습할 때, 학생 A와 B의 차이는 더 욱더 나타나기 시작했다. 학생 A는 처음과 마찬가지로 공식만을 이용하려고 하였고, 학생 B는 앞에서 배운 사칙연산의 개념을 약수에 개념에 포함시켜 약수에 대한 관계적 이해를 할 뿐만 아니라 약수의 스키마와 변형된 스키마를 사용하여 배수의 개념까지 스스로가 형성해 나가는 것을 볼 수 있었다. 즉, 학생 A는 도구적 이해에 의한 '수학 문제'를 풀었고, 학생 B는 관계적 이해에 의한 '수학'을 한 것이다.

수학에 대한 관계적 이해는 여러 가지 스키마와 변형된 스키마에 의해서 다양한 문제 해결 방법을 얻을 수 있을 뿐만 아니라, 바라보는 시각에 의해서 서로 다른 결론을 얻을 수 있는 유동성을 가지고 있다. 관계적 이해의 유동성에 대한 예를 들어 보면,

예) 어젯밤, 각자 부담한다는 약속 아래 세 사람이 택시를 합승을 하였다. 제일 처음 종호가 내리고 그 다음 인태도 내렸다. 마지막에 경수가 9000원을 지불하고 내렸는데, 경수는 종호, 인태에게 얼마씩 청구하면 될까요?

Schema 1.

(1) 모두 똑 같이 부담한다는 시각

택시비가 9000원이 나왔으므로 종호, 인태, 경수는 각각 3000원씩 내면 된다.

① $9000 \div 3 = 3000$원

② $9000 \times \frac{1}{3} = 3000$ 원

Schema 2.

(2) 거리의 비에 기준을 둔 시각

거리의 비 = 1 : 2 : 3

$a \rightarrow b \rightarrow c$ (9000원)

$a = b = c$(a구간과 b구간 그리고 c구간의 거리가 같을 경우)

종호, 인태, 경수가 간 구간은 전체 6구간이고 종호는 한 구간, 인태는 두 구간, 그리고 경수는 세 구간을 갔으므로,

종호 $= \frac{1}{6} \times 9000 = 1500$원

인태 $= \frac{2}{6} \times 9000 = 3000$원

경수 $= \frac{3}{6} \times 9000 = 4500$원

을 내면 된다. ($1500 + 3000 + 4500 = 9000$)

변형된 Schema 1.

(3) 각각의 구간을 통과하는 사람들을 기준으로 둔 시각

세 구 간을 3000원씩 나누고 한 구간마다 택시를 타고 간 사람 수로 나눈다. 첫 구간에서는 세 명 모두

---

6) ① 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 포함되어있는 개수가 몫을 나타낸다.
② 나눔을 당하는 수(피제수)가 나누는 수(제수)에 의해서 등분된 개수가 몫을 나타낸다.

7) ① 피제수에 포함된 제수의 개수만큼, 피제수에서 제수를 뺄 수 있으므로 포함된 개수와 뺀 개수는 몫이 된다.
② 포함제에 의해서 피제수에 포함된 제수를 한 번 또는 여러 번 더하면 피제수가 되므로 더해진 제수의 개수 도 몫을 나타낸다.
③ 같은 수의 덧셈은 곱셈(제수를 한 번 또는 여러 번 더하면 피제수가 되므로)으로 나타낼 수 있으므로 곱셈을 이용하여 나눗셈의 몫을 구할 수 있다.

탔으므로 3000원을 셋이 부담하여 각각 1000원씩, 두 번째 구간에서는 인태와 경수가 각 각 1500원씩 부담하고 나머지 구간에서는 경수가 혼자 타고 갔으므로 3000원을 혼자 부담한다. 따라서 종호는 1000원을 인태는 $1000+1500=2500$원을 경수는 $1000+1500+3000=5500$을 부담하면 된다. 이것을 식으로 나타내면,

$$종호 = (\frac{1}{3}\times 9000)\div 3 = 1000원$$

$$인태 = 1000+\frac{1}{2}\times 3000 = 2500원$$

$$경수 = 9000-(종호+인태)$$
$$= 9000-(1000+2500) = 5500원$$

이 된다.

종 호	인 태	경 수
1000	1000	1000
×	1500	1500
×	×	3000
1000	2500	5500

위와 같이 관계적 이해가 이루어진 상태에서는 여러 가지 방법으로 문제 해결에 접근 할 수 있고, 이익과 손해를 파악 할 수 있을 뿐 만 아니라 생활 속에서 일어나는 일들을 수학적으로 해결해 나갈 수 있는 능력을 가지게 된다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

대전에 있는 K초등학교 3학년 학생 3(남학생 1명, 여학생 2명)명을 대상으로 실시하였다. 실시한 3명은 모두, 학급 석차 10%안에 포함되는[8] 학생으로, 지능검사와 문제 해결력 검사, 창의력 검사를 통해 구성된 수학적 문제 해결력이 비슷한 성향의 학생들이었다.

8) 학급석차 10%안에 포함되는 학생을 연구 대상으로 한 이유는 Fishbein & Ajzen(1975)이 언급한 것처럼 수학교과에 대하여 일관성 있게 호의적 또는 비호의적으로 반응하게 하는 학습된 기질이 잘 나타나기 때문이다(강신포, 김판수, 유화전, 2003, p. 443).

2. 연구 방법과 절차

(1) 연구 방법

최근에는 학습자의 학습결과뿐만 아니라 학습과정에서 무엇이, 왜, 어떻게 일어났는가에 대한 보다 근본적인 문제에 대한 관심이 고조되고 있다. 본 연구는 오늘날 교과교육 분야에서 자주 사용되고 있는 질적 연구방법을 사용하여 학습자의 관점에서 학습과정을 정의하고 이론을 찾아 보다 현장감 있는 연구가 되고자 하였다. 본 연구의 목적은 학생들이 개념을 습득하고 스키마와 변형된 스키마를 형성해 가면서 나타나는 수학적 사고 발달과정을 조사하는 것이므로 일반 연구 등에서 구할 수 있는 자료 이상으로 충분한 증거 자료, 예를 들면, 관찰 ,인터뷰, 학습자 노트, 관찰자 노트 등을 사용할 수 있는 디자인의 장점 때문에 사례연구를 택하였다.

본 연구의 사례는 초등학교와 중학교에서 지도되는 거듭제곱과 혼합계산의 내용을 사칙연산의 1차적 개념을 학습한 세 명의 연구 대상자들에게 제공했을 때, 나타나는 현상(변형된 스키마)을 중심으로 기록 원고를 작성하여 분석하였다.

(2) 연구 절차

본 연구는 1차적 개념에서 2차적 개념으로 발전을 할 때, 어떠한 수학적 개념 구성과정을 거치고 어떠한 변형된 스키마를 형성하는지에 대해 알아보기 위해 연구를 하였다. 두 가지 연구 문제를 통해 학생들에게 1차적 개념에 대한 숙지와 1차적 개념들을 연결하여 만들어 낼 수 있는 간단한 2차적 개념의 구성에 대한 내용과 학습 활동지를 경험하게 하여 학생들에 의해서 발견되고 형성된 변형된 스키마의 분석과 기존 개념들과의 연결성 그리고 확장 범위에 대하여 심도 깊은 연구를 하였다

본 연구자는 학생들에게 새로운 스키마를 형성 할 수 있도록 다음과 같은 지도 절차에 따라 스키마 학습

을 전개하였다.

이와 같은 절차에 의해 스키마 학습을 수행한 후, 연구자는 학생들과 토의한 내용과 학생들이 발견한 변형된 스키마를 정리하고, 이를 통하여 연구문제를 해결한 분석 결과를 제시 하였다.

학생들에게 새로운 스키마를 형성할 수 있도록 다음과 같은 절차에 따라 스키마 학습을 전개하였다.

① 1차적 개념에 대한 설명을 해 주었다.
② 기존에 형성된 스키마의 모델을 보여 주었다.
③ 연구대상자들이 구성한 변형된 스키마에 대해서 토의를 하였다.
④ 토의에 대한 내용을 분석하였다.
⑤ 토의를 통해 발견된 변형된 스키마를 정리하였다.
⑥ 학습활동지에 제시한 문제를 해결하게 하였다.
⑦ 해결된 문제를 바탕으로 어떠한 형태의 변형된 스키마가 이루어졌는지에 대한 분석을 하였다.

예) 나눗셈을 예로 들면,
① 나눗셈의 1차적 개념에 대한 설명.
② 나눗셈에 대한 기존의 스키마 제시.
③ 연구대상자들이 구성한, 나눗셈의 변형된 스키마에 대해서 토의.
④ 토의된 내용 분석.
⑤ 토의를 통해 발견된 변형된 스키마의 정리.
⑥ 학습활동지에 제시한 문제 해결.
⑦ 연구대상자들이 해결한 학습활동지의 내용 분석.

(3) 연구 도구

연구 도구의 전체 구성은 사칙연산들의 연결성에 관한 관계적 이해와 그들의 연결성과 관련된 1차적 개념과 스키마에 관한 내용으로 이루어 졌다.

연구 도구에 나타난 개념 단계의 구조는 본 연구자의 주관적인 생각을 바탕으로 하고 있으므로 바라보는 시각이나 상황의 차이에 의해서 다시 바뀔 수 있으며, 1차적 개념의 범위 또한 넓히거나 좁힐 수 있다[9].

9) 이차적 개념이나 삼차적 개념을 바라보는 시각이나 상황에 따라서 일차적 개념으로 생각할 수 있고, 일차적 개념 또한, 이차적 개념이나 삼차적 개념으로 생각할 수 있다. 그러므로 각각의 개념에 대한 올바른 인지가 무엇보다도 중요하다.

(4) 자료 수집 방법

본 연구의 목적인 일차적 개념의 이해와 이들의 구성으로 형성되는 스키마(개념의 구성체)와 변형된 스키마를 여러 가지 모양으로 개발하기 위하여, 연구에 참여한 세 명의 K초등학교 학생들의 토의 내용과 학습활동지에 씌여진 내용들을 중심으로 자료를 수집하였다.

(5) 분석 방법

1차적 개념에 대한 이해와 변형된 스키마의 구성능력은 사례 연구를 통하여 학생들에게서 나타난 현상 그 자체를 기술한 형식, 그 자체를 취한 상태에서 1) 1차적 개념의 숙지, 2) 위와 같은 내용을 가진, 연구대상자들의 변형된 스키마 형성, 3) 2개 또는 3개 이상의 1차적 개념들의 연결로 형성된 2차적 개념에 대해서 분석을 하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

본 연구자는 위의 연구도구를 학습한 학생들이 스스로 형성한 변형된 스키마를 중심으로 다음의 연구문제에 대한 접근을 하였다.

1. 학생들은 사칙연산의 1차적 개념으로 어떠한 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 2차적 개념에 대한 관계적 이해를 하는가?

(1) 2차적 개념으로써의 거듭제곱

① 거듭제곱에 대한 개념 설명

하나의 수(같은 종류, 같은 크기)·변수(미지수)·식을 한 번 또는 여러 번 연속적으로 거듭 곱한 것 과 같은 결과를 얻을 수 있는 계산법을 말한다. 그리고 곱해진 개수는 수나 변수(문자), 식의 오른쪽 어깨 위에 쓰여 지는데 이것을 지수라고 한다.(고정일 외, 2003)

② **스키마 모델 제시**

Schema 1.

$3\times3\times3 = 3^{3(\text{3이 곱해진 갯수})}$

$\square\times\square = \square^{2(\text{□가 곱해진 갯수})}$

$x\times x\times x\times x\times x = x^{5(x\text{가 곱해진 갯수})}$

$$(x+1)\times(x+1)\times(x+1) = (x+1)^{3[(x+1)\text{이 곱해진갯수}]}$$

③ **학생과 연구자(교사)의 토의**

다음의 【프로토콜 1】은 거듭제곱의 개념과 스키마에 대하여 학습한 후, 교사와 학생들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 1】

ⓐ S2: 어? 거듭제곱이 곱셈하는 거랑 똑같네!

S1: 나도 그렇게 생각했는데...

S3: 나도...

T: 왜 그렇게 생각을 했지?

S2: 곱셈도 같은 기준을 가지고 하는 거잖아요.

S3: 네, 맞아요.

T: 진영이도 같은 생각이니?

S1: 네. 그런데 곱셈하고는 좀 다른 게 있어요.

T: 그게 뭔데?

ⓑ S1: 곱셈의 기준은 더해진 개수고요, 거듭제곱의 기준은 곱해진 개수예요.

T: 또, 다른 건 없을까?

S2: 저요!

T: 그래, 준한이가 애기해 볼래?

ⓒ S2: 곱셈은 더해진 개수를 곱하기 뒤에 쓰고요, 거듭제곱은 곱해진 개수를 그 수의 오른쪽 어깨 위에 써요.

S1: 저요!

T: 음! 진영이!

S1: 곱셈은 요, 저 번에 배운 것처럼 곱해지는 순서가 바뀌어도 답은 같잖아요, 그래서 더해진 개수를 뒤에도 쓰고요 앞에도 쓸 수 있어요.

T: 음, 다들 많은 생각을 했네. 그래서 거듭 제곱은 곱셈의 개념이 연결 되어있는 곱셈보다는 높은 개념이야.

S3: 덧셈도 되요!

T: 뭐가 되는데?

S3: 덧셈도 곱셈처럼 거듭제곱하고 연결 된다 구요.

T: 아... 그 얘기였구나. 하하하. 그럼 어떻게 연결이 되는지 얘기해 볼래?

S3: 곱셈은 덧셈하고 연결되고, 곱셈은 거듭제곱하고 연결이 되니까... 덧셈도 거듭제곱하고 연결이 될 꺼라는 생각을 했어요.

S2: 저요! 저요!

T: 준한이가 뭔가 발견했나 보구나! 얘기해 봐, 준한아.

ⓓ S2: 덧셈이 거듭제곱하고 연결되어 있으니까, 거듭제곱을 덧셈으로 바꿀 수 있어요.

T: 더 자세히 얘기해 줄래?

ⓔ S2: 5의 제곱은 5곱하기 5가 되고... 5곱하기 5는 5를 다섯 번 더하는 걸로 바꿀 수 있어요.

S1: 선생님!

T: 왜? 진영아?

ⓕ S2: 제가요, 덧셈을 거듭 제곱으로 나타내 보려고 직접 해 봤는데요, 어떤 수를 그 수만큼 더하면 제곱이 되요.

T: 예를 한 번 들어서 얘기 해 줄래?

S2: 제가 해 본 것 말해도 되요?

T: 그럼!

ⓖ S2: 2를 요~ 2번 더하면 2곱하기 2가 돼서 2의 제곱이 되고요, 5를 5번 더하면 5곱하기 5가 돼서 5의 제곱이 되요.

④ **토의된 내용 분석**

【프로토콜 1】에서 학생들은 앞에서 이미 학습했던 사칙연산의 스키마와 변형된 스키마를 거듭 제곱의 개념에 포함시켜 거듭 제곱 대한 관계적 이해(ⓐ, ⓑ, ⓒ)를 하였고, 그 과정에서 또 다른 형태의 변형된 스키마(ⓓ, ⓔ, ⓕ, ⓖ)를 형성하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리를 해 보면, 다음과 같다.

⑤ **발견된 변형된 스키마 정리**

ⓓ, ⓔ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1.

거듭 제곱은 같은 수의 곱셈으로 나타낼 수 있을

뿐 만 아니라, 같은 수의 덧셈으로 나타낼 수 있다. 그리고

예) $3\times3\times3$은 3이 세 번 곱해진 수이며, $(3\times3)\times3$이므로 3의 세 배에 대한 세 배를 뜻한다.

$3\times3=3+3+3$, $3\times3\times3=(3+3+3)\times3$,

$(3+3+3)\times3$

$=(3+3+3)+(3+3+3)+(3+3+3)$

$=3+3+3+3+3+3+3+3+3$

ⓕ, ⓖ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 2.

어떤 수를 그 수만큼 더하게 되면, 그 수의 제곱이 된다.

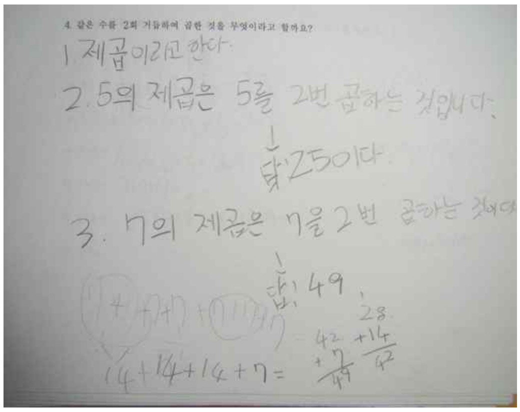
예) 5를 자신의 수 만큼인 5번 더하면,

$5+5+5+5+5=5\times5=5^2$이 된다.

9을 자신의 수 만큼인 9번 더하면,

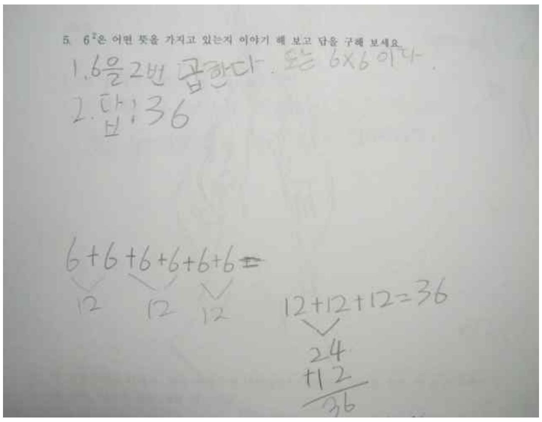
$9+9+9+9+9+9+9+9+9=9\times9=9^2$

위와 같이, 1차적 개념인 덧셈과 곱셈의 개념이 결합하여 2차적 개념인 거듭제곱을 구성하는 변형된 스키마(덧셈은 곱셈의 스키마로 곱셈은 거듭제곱의 스키마로 작용을 한다)로 작용을 하였고 이 때, 각각의 개념에 대한 관계적 이해와 여러 가지 스키마를 형성하여 문제 해결에 접근 할 수 있도록 도와준 중요한 역할을 한 것은 학생들 스스로가 형성한 변형된 스키마였다.



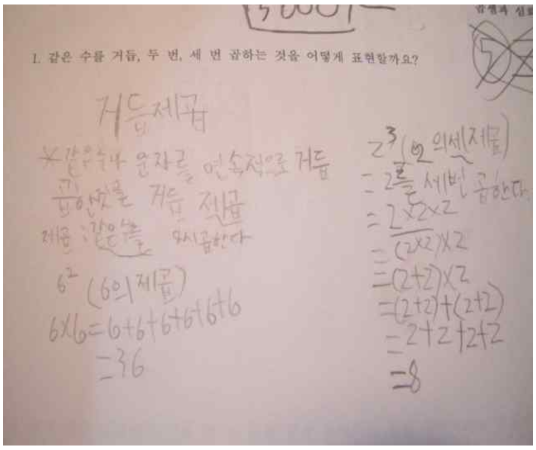
[그림 1] 거듭제곱의 스키마

[Fig. 1] Schema of Power



[그림 2] 거듭제곱의 변형된 스키마

[Fig. 2] Transformed schema of Power



[그림 3] 거듭제곱의 변형된 스키마
[Fig. 3] Transformed schema of Power

(2) 2차적 개념으로써의 혼합계산

① 혼합계산에 대한 개념 설명

하나의 식에 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 등이 섞여 있는 계산. (naver 지식백과).

② 스키마 모델 제시

Schema 1.

① ( ) 안을 먼저 계산하고, { } 안을 계산한다.
② 곱셈이나 나눗셈을 먼저 계산한다.
(곱셈과 나눗셈은 앞에서부터 차례로 계산한다.)
③ 덧셈이나 뺄셈을 계산한다.
(덧셈과 뺄셈은 앞에서부터 차례로 계산한다.)

예) $52\div\{(21-17)+9\}\times5$를 계산할 경우,
① $21-17=4$ ② $4+9=13$ ③ $52\div13=4$
④ $4\times5=20$ 이므로
$52\div\{(21-17)+9\}\times5=20$이 된다.

③ 학생과 연구자(교사)의 토의

다음의 【프로토콜 2】는 혼합계산의 개념과 스키마에 대하여 학습한 후, 교사와 학생들이 서로 대화를 나누는 장면에서 발췌한 것이다.

【프로토콜 2】

T: $7-3\times2$은 얼마일까요?
S1: 차례로 계산하면 안될까?
S3: 나도 그렇게 생각했는데...
S2: 저요! 선생님!
T: 그래! 준한아!
S2: $7-3$는 4이고, 4×2는 8이니까 답은 8이예요.
S3: 네, 맞아요.
T: 진영이도 같은 생각이니?
S3: 아참! 곱하기를 먼저 한다고 했지!
S1: 맞아!
S2: 왜, 곱하기 먼저 계산하지?
S3: 선생님께서 곱하기 먼저 계산을 한다고 했잖아~
S2: 아까는 선생님께서 그렇게 한다고 했으니까 그냥 그렇게 생각했는데... 지금은 문제를 풀려고 하니까 왜 그런지 궁금하네?
T: 그래, 왜 곱하기를 먼저 계산을 할까?
S1,S2,S3: 왜 그러지?
T: 지금 어떤 계산을 하고 있지?
S1,S2,S3: 혼합계산이요!!!
T: 그럼, 혼합계산에는 어떤 개념들이 들어있지?
S1,S2,S3: 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이요~
T: 그럼, 무엇을 가장 먼저 생각해야할까?
S1,S2,S3: 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이요~
T: 그렇지! 혼합계산도 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 연결되어있는 계산이니까 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈을 가장 먼저 머릿속에 떠올려야지!
S1,S2,S3: 네~~~
ⓐ S1: 곱셈은 덧셈하고 연결되어있고... 곱셈은 기준, 크기, 양이 같은 것을 1로 해서 하나씩 세는 것이니까... 아! 선생님! 알겠어요!!!
T: 하하하, 그래그래, 얘기해 봐 진영아~
S1: 선생님, 제 생각에는 요, 그냥 차례대로 계산해도 될 것 같아요.
T: 진영이가 뭔가를 알아냈구나!
ⓑ S1: 네! 하지만 7은 1이 7개 있는 것을 뜻하고, 3은 1이 3개있는 것이 아니라, 2가 3개 있는 것을 뜻하

기 때문에 기준, 크기가 같지 않아서 7에서 3을 직접 뺄 수 없어요. 그래서 3을 7처럼 기준이 1이 되게 만들어야 해요. 그러기 위해서 $7-3\times2$에서 3×2를 $2+2+2$으로 바꾸어 주어야 해요. 그러면 $7-3\times2$은 $7-6$이 돼서 답은 1이 돼요.

T: 그래!!! 맞다!!! 어떻게 그런 생각을 했지?

ⓒ S1: 선생님께서 수는 세기 위해서 만든 것이고, 세기 위해서는 크기, 기준, 양이 서로 같아야한다고 하셨잖아요. 그래서 저는 크기, 기준, 양을 먼저 같게 해야 한다는 생각을 했어요.

S3: 선생님! 저도 얘기해 볼래요!

T: 그래! 아현이도 얘기해 봐라~

ⓓ S3: 저도 진영이처럼 크기, 기준을 같게 하기 위해서 $7-3\times2$에서 3×2를 $3+3$로 바꾸어서 계산했어요. 그래서 $7-6$이 돼서 저도 답이 1이 돼요.

S2: 저도요 선생님!

T: 그래! 준한아~

ⓔ S2: 선생님 혼합계산에서 곱하기와 나누기를 먼저 계산하고, 더하기와 빼기를 나중에 계산한다고 했는데, 제 생각에는 먼저 계산하는 것이 아니라 수의 개념에서 배운 것처럼 기준, 크기, 양을 같게 하다 보니까 곱셈을 덧셈으로 나타내는 것을 먼저 계산하는 것으로 얘기하는 것 같아요. 아닌가요?

ⓕ S1,S3: 맞아요. 그런 것 같아요.

S2: 선생님, 그런데 왜, 수학을 배울 때 공식만 배워서 문제만 풀어요? 저는 공식이 왜 그렇게 되는지도 모르고 계속 문제만 푸는 게 제일 싫어요. 우리 엄마도 수학은 문제만 많이 풀면 시험 100점 맞는데요.

S1,S3: 우리 엄마도 그래요!!!

S1: 우리 학원 선생님은 개념을 설명해 주신다고 하시면서, 개념은 얘기해 주시지 않고 수학문제만 풀어 주세요. 그런데 저는 하나도 모르겠어요. 왜 개념을 수학문제로 설명을 해요? 정확한 개념을 알아서 우리가 지금처럼 직접 문제를 풀어야 하는 것 아니 예요?

T: 그래! 개념은 너희들이 생각하는 것처럼 원래 가지고 있는 뜻이야. 그 뜻을 알면 지금처럼 스스로 문제도 풀 수 있고, 수학으로 얘기도 할 수 있는 거야.

S1: 선생님! 저는 선생님하고 개념 수업도 하고 수학으로 얘기도 하는 것이 제일 좋아요.

S2: 저두요~

S3: 저두요~

④ 토의된 내용 분석

【프로토콜 2】에서 학생들은 앞에서 이미 학습했던 사칙연산의 스키마와 변형된 스키마를 혼합계산의 개념에 포함시켜 혼합계산에 대한 관계적 이해(ⓐ, ⓒ, ⓔ, ⓕ)를 하였고, 그 과정에서 또 다른 형태의 변형된 스키마(ⓑ, ⓓ)를 형성하였다. 위에서 발견된 변형된 스키마를 정리를 해 보면, 다음과 같다.

⑤ 발견된 변형된 스키마 정리

ⓐ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 1.

곱셈은 덧셈의 1차적 개념과 수의 1차적 개념이 연결되어 형성된 2차적 개념이다. 수는 세기위해서 만들어진 개념이고 세기 위해서는 기준(크기, 단위, 양)이 같아야 하므로 같은 기준(크기, 단위, 양)을 1로 보았을 때, 같은 기준이 몇 번 더해져 있는 가를 간단하게 나타낸 2차적 개념이다.

예)

$6+6+6+6+6$은 같은 기준(크기, 단위, 양) 6이 5번 더해진 것을 뜻한다. 그러므로 6을 1로 보고 하나씩 5번 셀 수가 있고, 이것을 6×5으로 나타낼 수 있는 것이다. 즉, 6×5는 6이라는 기준이 5개, 또는 5라는 기준이 5개(6을 5번, 5를 6번 셀 수 있다) 있다는 것을 의미한다.

ⓑ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 2.

혼합계산 또한 수의 계산처럼 기준(크기, 양, 단위)이 같아야 계산을 할 수 있으므로 곱셈(3×2)을 덧셈($2+2+2$)으로 바꾸어 계산을 한다. 즉, $7-3\times2$에서 7은 기준(크기, 양, 단위)이 1인 크기가 7개 있는 것을 뜻하고, 3×2는 기준이 2인 크기가 3개 있는 것을 뜻하므로 기준(크기, 양, 단위)이 1인 7에서 기준(크기, 양, 단위)이 2인 3을 직접 뺄 수가 없다. 그러므로 기준(크기, 양, 단위)을 같게 한 다음 계산을 한다.

예)

$$\begin{aligned}7-3\times2&=7-(2+2+2)\\&=1+1+1+1+1+1+1\end{aligned}$$

$-\{(1+1)+(1+1)+(1+1)\}=1$

ⓓ의 내용을 바탕으로 한, 변형된 Schema 3.

ⓑ의 경우과 마찬가지로 ⓓ의 경우 또한 기준(크기, 양, 단위)을 같게 하여 계산을 한다. ⓑ의 경우는 3×2를 2+2+2로 생각하여 계산을 하였고, ⓓ의 경우는 3×2를 3+3으로 생각하여 계산을 하였다.

예)

$7-3\times 2=7-(3+3)$

$=1+1+1+1+1+1+1-\{(1+1+1)+(1+1+1)\}$

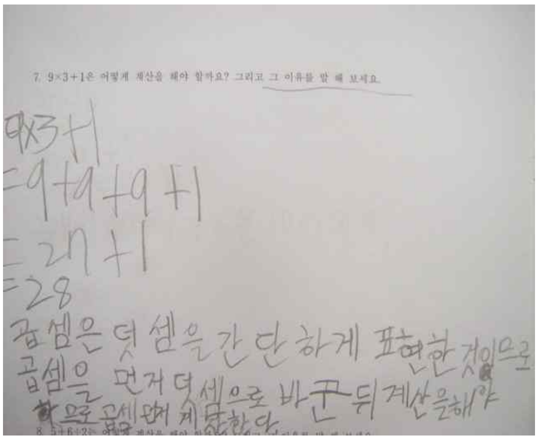
$=1$

위와 같이, 1차적 개념인 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈의 개념이 결합하여 2차적 개념인 혼합계산을 구성하는 변형된 스키마로 작용을 하였다. 즉, 혼합계산에서 곱셈을 먼저 계산한다는 의미보다는 기준(크기, 양, 단위)을 같게 하기 위하여 곱셈을 덧셈의 형태로 바꾸는 과정이 마치 곱셈을 먼저 계산하는 것처럼 보인다는 것을 학생들 스스로가 발견하고 ⓔ의 경우처럼 교사에게 문제제기까지 하는 것을 볼 수 있었다. 이와 같이 정확한 개념을 바탕으로 한 학습자 스스로의 스키마와 변형된 스키마는 수학적인 문제해결력 뿐만이 아니라 창의적인 문제해결력에도 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

2. 학생들은 사칙연산의 1차적 개념으로 형성한 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 어떠한 방법으로 혼합계산 문제를 해결하는가?

(1) 형성평가

1) 9×3+1은 어떻게 계산해야 할까요? 그리고 그 이유를 말 해 보세요.



[그림 4] 혼합계산의 변형된 스키마

[Fig. 4] Transformed schema of mixed calculations

그림 1에서 보는 바와 같이, 9×3은 같은 수 9가 3번 더해지거나(9+9+9), 같은 수 3이 9번 더해진(3+3+3+3+3+3+3+3+3) 것을 뜻하므로 기준(크기, 양, 단위)이 1이 아닌 9 또는 3이 된다. 그러므로 학생들은 기준(크기, 양, 단위)을 같게 하기 위해서 같은 수 9를 3번 더하거나(9+9+9), 같은 수 3을 9번 더하여(3+3+3+3+3+3+3+3+3) 계산을 하였다.

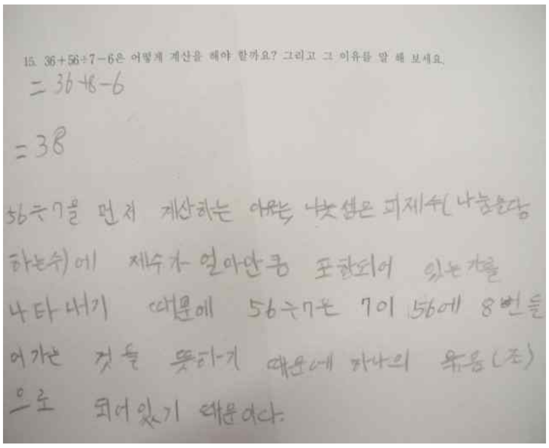
① $9\times3+1=9+9+9+1=28$

② $9\times3+1=3+3+3+3+3+3+3+3+3+1$

$=27+1=28$

위와 같이 학생들은 기준(크기, 양, 단위)을 같게 하기 위하여 곱셈을 덧셈으로 바꾸어 계산하는 스키마와 변형된 스키마의 형성으로 문제를 해결하였다.

2) 36+56÷7-6은 어떻게 계산해야 할까요? 그리고 그 이유를 말 해 보세요.



[그림 5] 혼합계산의 변형된 스키마

[Fig. 5] Transformed schema of mixed calculations

학생들은 그림 2에서 보는 바와 같이, 56÷7을 하나의 묶음(56은 피제수, 7은 제수이므로 나눗셈의 개념 중에 포함제를 이용하거나 등분제를 이용하여, 56에 7이 8번 포함되어 묶은 8, 56이 7씩 8등분되어 묶은 8을 나타내므로 뺄셈보다는 나눗셈을 먼저 계산해야 한다)으로 바라보는 스키마와 변형된 스키마 형성으로 문제를 해결하였다.

학생들은 이 질문에 대하여 사칙연산 각각의 개념과 연결(곱셈과 덧셈과의 관계, 나눗셈과 덧셈, 그리고 뺄셈과의 관계), 그리고 사칙연산 각각의 변형된 스키마를 이용하여 문제를 해결하였다.

이와 같이 스키마와 변형된 스키마는 상위 단계의 개념을 형성하거나 문제를 해결하는 능력을 가지고 있을 뿐만이 아니라 상위 단계의 개념을 하위 단계의 개념으로 바꾸어 수학 평재아나 부진아들의 수학의 관계적 이해에 도움을 줄 수 있는 능력또한 가지고 있다.

Ⅴ. 결론

본 연구는 1차적 개념을 학습한 학습자들이 어떻게 스키마와 변형된 스키마를 구성을 하는지 그리고 아직 배우지 않은 학습 내용에 대하여 스스로가 구성한 스키마와 변형된 스키마를 이용하여 어떻게 문제 해결에 접근을 하는지에 대하여 연구 분석 하였다.

본 연구자는 초등학교 수학교과서에서 다루는 내용들을 문제 풀이 위주가 아닌 개념과 스키마 중심으로 연구대상자들을 가르쳐 왔다. 처음에 연구대상자들은 자기 자신이 영재라는 생각을 가지고 있었고, 여러 수학 문제를 해결하는데 자신감을 가지고 있었다. 그러나 수업이 시작되었을 때, 이들은 오직 한 가지 대답만을 하였고, 그 대답 또한, 다른 학생이 발표하고 나면, 멈추어 버렸다. 그리고 연이어 물어보는 개념에 대한 질문에 연구대상자들은 어리둥절해 하였고, 개념의 의미 또한 문제를 해결하는 방법으로 설명하는 것을 볼 수 있었다.

문제의 이해나 해결 과정에서 학습자가 보이는 곤란도에 대한 논리·수학적 설명에 따르면 학습자는 그들이 주어진 문제를 성공적으로 해결하는데 요구되는 개념적 지식을 소유하고 있지 않기 때문에 결정적으로 그 문제의 해결에 실패하는 것으로 설명하고 있음을 볼 수 있다.(Riley, Greeno & Heller 1983). 이들은 개념에 대한 내용과 문제를 해결하는 방법을 동일시 해 왔고, 자신의 생각이 담긴 수학보다는 외적인 다른 영향에 의해서 수동적으로 이루어진 수학을 보여 주었다. 또한, 수학에 대한 흥미를 가지고 수학에 접근하는 것보다는 남보다 먼저 선행한 수학에 대해 자랑하기 위해서 수학을 하는 학생을 볼 수 있었다. 그러나 수업이 진행되면서 연구대상자들의 수학에 대한 태도가 달라지기 시작했고, 한 가지 방법만을 외치고 멈추어 버리는 수학이 아닌, 계속해서 자신의 생각을 여러 가지 방향에서 이야기하는 능동적인 수학 시간이 되어 가는 것을 볼 수 있었다.

문제해결에 대한 연구에 의하면 주어진 문제의 문장 자체를 이해하는 과정이 해결. 계획이나 전략을 구상하고 이를 수행하는 과정에 못지않게 중요하며(Greeno & Egan 1973), 실제로 학생들이 범하는 문제해결 오류의 대부분이 문제 자체는 바르게 이해하였으나 이후 해결 과정에서 범하게 되는 오류 보다는 오히려 이후 해결과정은 바르게 잘 수행하였으나 문제해결 초기의 문제 이해 단계에서 특히 문제 자체에 대한 이해가 바르지 못했기 때문에 발생하는 것으로 나타났다.(Carpenter & Moser 1983; Mayer 1982). 문제에 대한 정확한 이해가 이루어지기 위해서는 개념에 대한 학습이 필요하다. 개념에 대한 학습이 이루어졌을 때, 개념의 구성을 스스로 다양하게 할 수 있으므로 문제에 대한 이해를 정확하게 할 수 있기 때문이다. 예를

들어 사칙연산 각각의 개념에 대해서 정확하게 인지한 학생들은 구구단을 이용하지 않고 곱셈을 해결하였으며, 나눗셈 또한 개념을 이용한 2가지 방법과 변형된 스키마를 이용한 3가지 방법, 총 5가지 방법으로 문제를 해결하였다. 그리고 그렇게 한 이유에 대해서 자신이 가지고 있는 개념과 스키마를 바탕으로 자신만의 변형된 스키마를 형성하여 설명을 하였고 이러한 과정에서 연구대상자들은 자신의 학년에서 배우지 않은 상위 단계의 개념을 스스로 형성해서 문제 해결에 접근하는 것을 볼 수 있었다. 예를 들면, 미지수를 구할 때, 등식의 개념과 등식의 성질을 바탕으로 자신도 모르는 사이에 방정식이라는 상위단계의 개념을 형성하여 문제를 해결하였고, 사칙연산에 관한 관계적 이해로 초등학교 4학년 교과과정에 나오는 혼합계산에 관한 문제도 해결하였다. 그리고 이들은 스키마를 형성할 때, 연결 고리가 끊어진 부분을 토론을 통해 자신의 생각과 느낌을 말하고 다른 사람의 의견을 듣고 이해하며, 자신의 생각을 수정하는 과정을 통해서 연결 시켰다. 그리고 수학적 문제를 해결할 때, 처음에는 문제의 내용을 파악하면서 여러 가지 스키마와 변형된 스키마를 형성하여 언어적 대수로써 문제 해결에 접근해 나갔고, 그런 다음 형성된 스키마와 변형된 스키마를 식(생략적 대수, 기호적 대수)으로써 표현하며 문제를 해결해 나가는 것을 볼 수 있었다. 그러므로 교사는 정확한 개념에 대한 설명과 개념의 연결에 의해 형성되는 스키마의 모델을 학생들에게 제공해 주어야 하며, 이로 인해 형성된 학생들의 변형된 스키마를 연구하여 다시 학생들에게 피드백을 주어서 더욱더 발전된 스키마와 변형된 스키마를 형성 할 수 있도록 하는 것이 무엇보다도 중요하다고 하겠다.

참 고 문 헌

강신포 · 김판수 · 유화전 (2003). 초등학교 수학영재 및 일반아동의 정의적 특성 비교연구. 대한수학교육학회지 학교수학, 5(4), 441-457.

Kang, S. P., Kim, P. S. & Yoo, H. J. (2003). A Comparative Study on Affective Characteristics of Mathematically Gifted Children and Average Students. *Journal of Korea society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics, 5*(4), 441-457.

고정일 (2003). 파스칼 세계대백과사전. 서울: 동서문화사.

Ko, J. I. (2003). *Pascal World Encyclopedia.* Seoul: Dongsuh Press

교육부 (1998). 초등학교 교육과정 해설Ⅳ: 수학, 과학, 실과. 서울: 대한교과서.

Ministry of Education (1998). *Elementary School Curriculum GuideⅣ: Mathematics, Science, Practical course.* Seoul: Korea Textbook.

김지원 · 송상헌 (2004). 한 수학영재아의 수학적 사고특성에 관한 사례연구. 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 14(1), 89-110.

Kim, J. W. & Song, S. H. (2004.) A Case Study on Mathematical Thinking Characteristics of a Gifted Child. *The Journal of Educational Research in Mathematics,* 14(1), 89-110.

네이버 지식백과. http://terms.naver.com.

Naver encyclopedia of knowledge. http://terms.naver.com.

Carpenter, T. P., & Moser M. J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh. & M. Landan.(Eds.), *The Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.* N.Y.: Academic Press.

Fishbein, M., & Ajaen, I.(1975). *Belief, attitude, intention, and behavior : A introduction to theory and research.* Reading. MA: Addison-Wesley.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(4), 258-291.

Greeno, James G., & Egan, Dennis E. (1973). Acquiring cognitive structure by discovery and rule learning, *Journal of Educational Psychology,* 73, 85-97.

Kuhs, T. M., & Ball, D. L.(1986). *Approaches to teaching mathematics : Mapping the domains of Knowledge, Skills, and dispositions.* Center on Teacher Education, Michigan State University.

Mayer(1982). *Thinking, Problem Solving, Cognition,* N.Y.: W. H. Freeman and Co.
McClain, K. & Cobb, P. (2001). An analysis of development of sociomathematical norms in one first-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(3), 236-266.
NCTM(1991). *Professional standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA : The Author.
Raymond, A. M.(1997). Inconsistency between a begging elementary teacher' mathematics beliefs and teaching practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 550-576.
Riley, M. S., Greeno G. J., & Heller, I. J. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. Ginsberg.(Ed.), *TheDevelopment or Mathematical Thinking.* N.Y.: Academic Press.
Skemp. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. New Jersey.

A Case Study on the Influence of the Schema of Learners Who Have Learned the Primary Concepts of the Four Arithmetic Operations on the relational Understanding of Power and Mixed Calculations

Kim, Hwa Soo
Sehan University, Korea
E-mail : hskim@sehan.ac.kr

With elementary school students who have learned the primary concepts of the four arithmetic operations as its subjects, this study has investigated in depth how schema and transformed schema are composed by recognition of the correct concepts and connection of concepts, that is to say, what schema learners form along with transformed schema with the primary concepts of the four arithmetic operations to understand the secondary concepts when power and mixed calculations are taken into contents. It has also investigated how the subjects use the schema they have formed for themselves and the transformed schema to approach problem solving, and how their composition of concepts and schema in problem solving ability achieve transformations. As a result, we can tell that the recognition of precise primary concepts and transformed schema work as important factors in the development from the primary to the secondary concepts. Here, we can also see learn that the formation of the schema created due to the connection among the primary concepts and the recognition of them and of the transformed schema play more important roles in the development toward the secondary concepts and the solution of arithmetic problems than any other factors.

* ZDM Classification : D42
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : Primary concepts, Schema, Transformed schema

부록

스키마 수학

사칙연산

1. 계산이란 무엇일까요? 그리고 계산 방법에는 어떠한 것들이 있을까요?

2. 사칙연산이란 무엇일까요? 그리고 사칙연산 중 자연수에서 계산이 가능한 것은 어떤 연산일까요?

3. 덧셈이란 무엇일까요?

4. 뺄셈이란 무엇일까요?

5. 덧셈에서 더해짐을 당하는 수와 더하는 수를 무엇이라고 할까요? 그리고 그 결과를 무엇이라고 할까요?

6. 뺄셈에서 빼짐을 당하는 수와 빼는 수를 무엇이라고 할까요? 그리고 그 결과를 무엇이라고 할까요?

7. 덧셈과 뺄셈은 어떠한 관계가 있을까요?

스키마 수학

곱셈

1. 곱셈이란 무엇일까요?

2. 곱셈은 사칙 연산 중 무엇과 관계가 깊을까요?

3. 두 자리수와 한 자리수의 곱셈은 어떻게 할까요?

4. 두 자리수와 한 자리수의 곱셈은 각 자리수를 분리하여 계산할 수 있을까요?

5. 15×3을 덧셈을 이용하여 계산해 보세요.

6. 17×5를 각각의 자리수를 분리하여 계산해 보세요. (덧셈을 이용하여)

스키마 수학

나눗셈

1. 나눗셈은 어떠한 의미를 가지고 있을까요?

2. 나눗셈과 덧셈은 어떠한 관계가 있을까요?

3. 나눗셈과 뺄셈은 어떠한 관계가 있을까요?

4. 나눗셈과 곱셈은 어떠한 관계가 있을까요?

5. 나눔을 당하는 수와 나누는 수를 각각 무엇이라고 부를까요?

6. 나눔을 당하는 수(피제수)에 나누는 수(제수)가 포함이 되지 않을 때는 어떻게 해야 할까요?

스키마 수학

곱셈과 거듭제곱

1. 같은 수를 거듭, 두 번, 세 번 곱하는 것을 어떻게 표현할까요?

2. 같은 수를 연속해서 거듭 몇 번 곱한 곱을 무엇이라고 할까요?

3. 같은 수를 연속해서 거듭 몇 번 곱한 곱을 어떻게 표시할까요?

4. 같은 수를 연속해서 거듭 몇 번 곱한 곱을 표시하는 것을 무엇이라고 부를까요?

5. 다음 곱셈을 거듭제곱으로 표현해 보세요.
1) 7×7×7=
2) 2×2×2×2×2=
3) 5×5×5×5×5×5×5×5=
4) 6×6×6×6×6×6×6×6×6×6=
5) 13×13×13×13×13=

6. 곱셈과 거듭제곱은 어떠한 관계가 있을까요?

7. 같은 수의덧셈을 거듭 제곱으로 표현 할 수 있을까요? 표현 할 수 있다면, 그렇게 할 수 있는 같은 수의 덧셈을 만들어 보세요.

스키마 수학

혼합계산

1. 혼합계산이란 무엇일까요?

2. 덧셈만 있는 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

3. 뺄셈만 있는 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

4. 곱셈만 있는 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

5. 나눗셈만 있는 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

6. 덧셈과 뺄셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

7. 덧셈과 곱셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

8. 덧셈과 나눗셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

9. 뺄셈과 곱셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

10. 뺄셈과 나눗셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

11. 곱셈과 나눗셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

12. 덧셈, 뺄셈, 곱셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

13. 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 혼합된 계산은 어떻게 계산을 해야 할 까요?

14. $9\times3+1=$

15. $36+56\div7-6=$

16. $7+6\times3\div9-5=$