Journal of The Korea Society of Computer and Information
Vol. 17, No. 10, October 2012
www.ksci.re.kr
http://dx.doi.org/10.9708/jksci/2012.17.10.155

외판원 문제의 확장된 k-opt 알고리즘

이 상 운*

The Extended k-opt Algorithm for Traveling Salesman Problem

Sang-Un, Lee *

요 약

본 논문은 지금까지 해결하지 못한 NP-Hard 문제들 중의 하나인 외판원 문제를 해결할 수 있는 알고리즘을 제안한다. 제안된 알고리즘은 간선교환 방법을 적용한 발견적 알고리즘이다. 초기해를 구하는 전형적인 방법은 첫 번째 노드부터 가장 인접한 노드를 방문하여 외판원의 경로를 결정하는 방법이다. 본 논문에서는 각 노드의 최소 간선을 선택하여 선택된 간선들 중 최소값을 가진 노드부터 출발하는 Min-Min 방법과 최대값을 가진 노드부터 출발하는 Min-Max 방법을 적용하고 두 방법 중 최소 경로길이를 가진 방법을 초기해로 결정하였다. 초기해로부터 최적해를 구하는 과정은 기존의 2-간선 교환 방법 (2-opt)을 기본적으로 적용하고, 추가로 확장된 3-opt와 4-opt를 제안하였다. 이와 같은 방법을 7개의 실제 데이터들에 적용한 결과 지금까지 알려진 최적해를 빠르고 정확히 구하는데 성공하였다.

▸ Keywords : 외판원 문제, 전수조사 방법, 간선 교환법, 발견적 방법, 최소-최소 탐색과 최소-최대 탐색

Abstract

This paper suggests traveling salesman problem algorithm that have been unsolved problem with NP-Hard. The proposed algorithm is a heuristic with edge-swap method. The classical method finds the initial solution starts with first node and visits to mostly adjacent nodes then decides the traveling path. This paper selects minimum weight edge for each nodes, then perform Min-Min method that start from minimum weight edge among the selected edges and Min-Max method that starts from maximum weight edges among it. Then we decide tie initial solution to minimum path length between Min-Min and Min-Max method. To get the final optimal solution, we apply

• 제1저자 : 이상운*
• 투 고 일 : 2012. 06. 19, 심사일 : 2012. 07. 22, 게재확정일 : 2012. 09. 10.
* 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 (Dept. of Multimedia Eng., Gangneung-Wonju National University)

previous two-opt to initial solution. Also, we suggest extended 3-opt and 4-opt additionally. For the 7 actual experimental data, this algorithm can be get the optimal solutions of state-of-the-art with fast and correct.

▸ Keywords : Traveling Salesman Problem, Exhaustive Search Method, Edge Exchange Method, Heuristic Method, Min-Min and Min-Max Search

I. 서 론

외판원 문제 (Traveling Salesman Problem, TSP)는 n개의 도시가 주어졌을 때, 임의의 도시에서 출발하여 경로길이 (소요 비용)의 합이 최소가 되도록 모든 도시를 한 번씩만 방문하고 출발 도시로 다시 돌아오는 문제이다[1-4].

외판원 문제를 해결하는 가장 쉬운 방법은 n개의 도시를 연결하는 도로 (간선)에 대해 전수조사 (exhaustive search)를 대칭행렬 (symmetric matrix)인 경우 $\frac{(n-1)!}{2}$회, 비대칭 행렬 (asymmetric matrix)인 경우 $(n-1)!$회 수행하여 최적해를 구한다. 결국 이 방법은 컴퓨터를 활용하여도 원하는 시간에 해답을 얻지 못하는 단점이 있다[5]. 예를 들면, $n=10$인 비대칭 행렬인 경우 $9!=362{,}880$, $n=26$인 경우 $25!=1.551\times10^{25}$으로 기하급수적으로 증가하여 아직까지 해결하지 못한 NP-Hard 문제로 알려져 있다[6]. 외판원 문제의 최적해를 도출하지는 못하지만 최적해에 가까운 해를 빠르게 구하기 위해 발견적 방법인 욕심쟁이 (greedy) 알고리즘, 간선 교환 방법 (2-opt, 3-opt, k-opt) 알고리즘, Tabu 탐색 알고리즘, 모조의 담금질 (simulated annealing)과 유전자 알고리즘 (genetic algorithm)들이 적용되고 있다[7].

외판원 문제는 계산수학 (computational mathematics) 분야에서 가장 집중적으로 연구하고 있는 문제 중의 하나로 일반적인 경우에 대한 효율적인 해법이 아직 알려지지 않고 있다[4,8]. 결국, Clay Mathematics Institute에서는 2000년에 이 문제 해결에 100만불의 상금을 제시하고 있다[9,10].

본 논문은 발견적 방법 중 하나인 k-opt인 간선 교환 방법 (edge exchange method)을 적용한 알고리즘을 제안하여 외판원 문제의 최적해를 빠르게 구할 수 있음을 증명한다. 이를 위해 기본적으로는 기존의 2-OPT를 적용하고, 보다 실용적인 3-OPT와 4-OPT를 제안한다.

2장에서는 외판원 문제의 초기해를 구하는 방법과 간선 교환 방법의 문제점을 고찰해 본다. 3장에서는 실제 문제에 적합한 3-OPT와 4-OPT를 추가적으로 제안하고 간선 교환 방법을 적용하여 외판원 문제의 최적해를 도출할 수 있는 발견적 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 실제 데이터들에 적용하여 제안된 알고리즘의 적합성을 검증한다.

II. 관련연구와 연구 배경

그림 1은 Kratica와 Radojevi[11]에서 인용된 TSP이다. Kratica와 Radojevi[11]는 전형적인 임의선택 방법 (classical arbitrary chosen method)으로 첫 번째 노드 (노드 1)에서 출발하여 일명 욕심쟁이 알고리즘인 "가장 인접한 이웃 탐색 (Nearest Neighbor Search)"을 수행하여 $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=58$을 얻었다. 이를 "1st Node Method"라 하자. 또한, 최적해는$1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{20}{\rightarrow}6\underset{15}{\rightarrow}4\underset{5}{\rightarrow}5\underset{7}{\rightarrow}1=56$이라고 제시하고 있다. 그러나 1st Node Method로부터 최적해를 구하는 방법은 제시하지 못하였다.

	1	2	3	4	5	6
1		3	10	11	7	25
2	3		6	12	8	26
3	10	6		9	4	20
4	11	12	9		5	15
5	7	8	4	5		18
6	25	26	20	15	18	

그림 1. TSP-1
Fig. 1. Traveling Salesman Problem-1

참고로 모든 노드에서 시작하여 탐색한 결과 최적해 $z_{opt}=56$을 얻지 못한다. 그러나 이 방법은 특정 문제에 대해서는 최적해를 얻을 수도 있다.

노드 1 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=58$

노드 2 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=64$

노드 3 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=69$

노드 4 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1 = 58$

노드 5 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1 = 57$

노드 6 : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1 = 58$

초기 경로가 설정된 값에 대해 최적해에 근접하기 위해 간선 교환 방법 (k-opt)이 제안되었다[1,2,7,8,12]. 그림 2는 Stougie[8]가 제시한 2-간선 교환 (2-opt) 방법과 3-간선 교환 (3-opt) 방법의 예이다. 그러나 전형적인 첫 번째 노드부터 가장 이웃한 노드들을 탐색하는 초기해에 대해 그림 2의 간선 교환 방법을 적용하여도 최적해를 얻지 못한다. 이는 발견적 방법들이 공통적으로 직면하고 있는 문제로 언덕 오르기 방법 (hill climbing method)을 적용하여 초기해가 최적해로 도달하는 과정에서 지역 최적점 (local minimum)에 빠져 전역 최적점 (global minimum)인 최적해 z_{opt}에 도달하지 못하기 때문이다[7,13]. 또한, 대부분의 외판원 문제는 2-opt만 적용되며, Stougie[8]가 제시한 3-opt는 거의 적용되지 않는 문제점이 있다. 이에 대한 근거는 4장에서 적용된 실험 데이터들에서 참고할 수 있다.

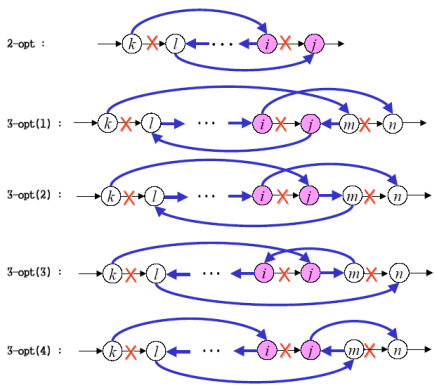


그림 2. 간선 교환 방법 (2-opt와 3-opt)
Fig. 2. Edge Swap Method (2-opt and 3-opt)

m개의 노드가 존재하는 경우의 일반적인 TSP는 $m = n$인 $m \times m$ 정방행렬에 대해서만 고려하며, 비대칭 행렬에 대해서는 고려하지 않는다. 왜냐하면, TSP는 m개의 노드를 목걸이 (또는 염주)와 같이 사이클을 만드는 문제로, 반드시 $m = n$이 되어야 하며, $m \neq n$이 될 수 없기 때문이다. 또한, 행렬 값 c_{ij}는 i노드에서 j노드로의 이론상의 직선거리가 아닌 실제 경로 (직접 경로 또는 다른 노드를 거치는 간접 경로)의 최단거리이다. 따라서, $|c_{ij}| = m^2 - m, (c_{ij} = \infty, i = j)$의 최단경로길이를 생성한다. 이와 같은 이유로, 본 논문에서는 일반적인 TSP에 한정하여 대칭행렬에 대해서만 고려하며, 비대칭 행렬은 고려하지 않는다.

TSP에 대한 k-opt 간선교환 기본 개념은 Barun et al.[14]과 Helsgaun[15]에서 제시하고 있다. 그러나 TSP의 해밀턴 사이클에 대한 3-opt와 4-opt의 가능한 모든 경우수에 대해서는 제시되지 않고 있으며, 어떤 간선을 대상으로 k-opt를 수행하는지에 대한 기준을 제시하지 않고 있다. 만약, 모든 간선을 대상으로 k-opt를 수행하면 전수탐색법과 유사한 수행 횟수가 필요하다. 3장에서는 2-opt 간선 교환 방법 개념에 기반하여 TSP의 실제 문제에 적합한 확장된 3-opt와 4-opt를 추가적으로 제시하고, k-opt를 수행하는 대상을 확정하는 기준을 제시하여 TSP의 최적해 z_{opt}를 얻을 수 있는 알고리즘을 제안한다.

III. 외판원 문제의 k-opt 알고리즘

TSP의 최적해를 구하기 위해서는 초기해를 먼저 결정해야 한다. 전통적인 TSP의 초기해는 첫 번째 노드부터 시작하여 가장 인접한 노드들을 방문하는 방법을 적용하고 있다. 본 논문에서는 2가지 다른 방법을 적용한다. 먼저, 각 노드의 가장 인접한 노드 (행의 최소 간선)를 선택한다. 이때 $\{i,j\}$, $(i = j)$는 고려하지 않는다. 선택된 값들 중에서 최소값을 가진 노드부터 시작하여 가장 인접한 노드들을 방문하는 Min-Min Method와 선택한 값들 중 최대값을 가진 노드부터 시작하여 가장 인접한 노드들을 방문하는 Min-Max Method를 적용한다. Min-Min과 Min-Max Method로 얻은 경로 길이의 합이 최소가 되는 $z_{\min}$을 초기해로 결정한다.

간선 교환 방법을 적용하여 초기해 $z_{\min}$을 개선하여 최적해 z_{opt}를 얻기 위해서는 어떤 간선을 교환할 것인가가 문제로 제기된다. 본 논문에서는 초기해의 간선들의 집합 e_{tsp}을 교환 가능성이 높은 간선 집합 e_{ex}와 교환 가능성이 희박한 간선들의 집합 $e_{\min}$으로 분류한다. 이를 위해 e_{tsp}의 간선들에 대해 대칭행렬이므로 $w\{i,j\}$와 동일한 값인 $w\{j,i\}$를 삭제한다. 다음으로 행과 열 모두 최소값 $(w\{i,j\} = (\min c_i \cap \min c_j))$이면 $e_{\min}$에, 어느 하나가 최소가 아닌 간선 $(w\{i,j\} \neq (\min c_i \cap \min c_j))$이면 e_{ex}에 저장한다.

초기해에 대해 1차 개선은 e_{ex} 간선들에 대해 최대값 간선부터 내림차순으로 그림 3의 간선 교환 방법 (2-opt와 3-opt)을 적용한다. 이때 새로 추가된 간선들은 $e_{\min}$에 저장한다.

본 논문에서는 k-opt를 그림 3과 같이 2-opt, 3-opt (1,2,3)와 4-opt로 제시하였다. 여기서 2-opt는 일반적으로 적용되는 방법이며, 3-opt (1,2,3)와 4-opt는 기존의 방법과 다른 것이다. 3-opt 적용 방법은 $(w\{i,j\} \neq (_{\min}c_i \cap _{\min}c_j))$의 배치 형태에 따라 결정될 수 있다.

본 논문에서 적용된 실험 데이터들은 모두 그림 3의 2-opt, 3-opt (1,2,3)과 4-opt로 문제가 해결되었다. 그러나 보다 일반적인 문제 해결을 위해 그림 4의 3-opt도 추가로 제안한다. 그림 4 이외에도 다양한 종류의 3-opt들이 추가로 고려될 수 있다.

기존의 k-opt를 적용하는 방법은 n개 도시를 연결하는 $n-1$개 간선 중에서 $w\{i,j\}$를 기준으로 $w\{i,j\}$에 인접된 2개의 간선을 제외한 $n-3$개의 간선을 모두 비교하는 방법을 적용하였다. 반면에, 비교 횟수를 단축시킬 수 있는 방법을 2-opt에 대해 정의하면 $w\{i,j\}$를 기준으로 교환될 간선 $w\{k,l\}$을 다음과 같이 결정한다.

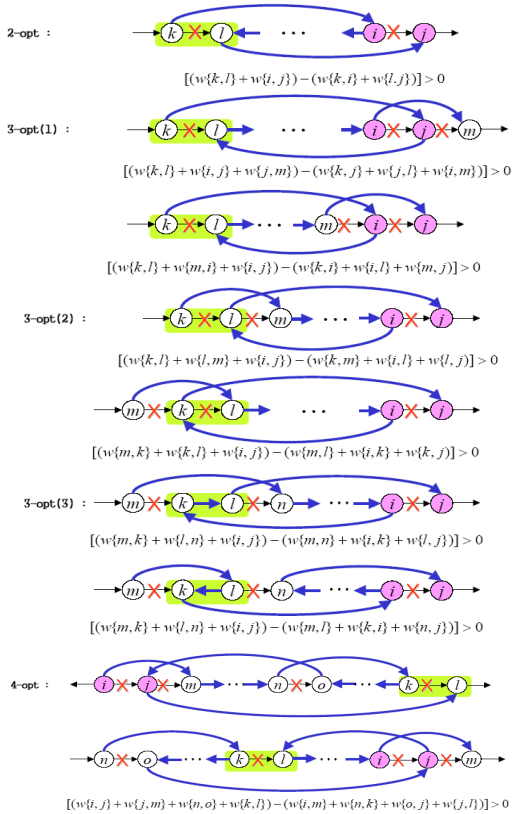


그림 3. 기본적인 k-opt
Fig. 3. Basic k-opt

(1) k 노드 (유출)에서 i노드 (유입)로의 간선 $w\{k,i\}$를 찾는 것으로 i열 (유입)에서 $w\{i,j\}$보다 작은 비용을 갖는 행 (유출)이 대상이 된다.
(2) l 노드 (유출)에서 j노드 (유입)로의 간선 $w\{l,j\}$를 찾는 것으로 j열 (유입)에서 $w\{i,j\}$보다 작은 비용을 갖는 행 (유출)이 대상이 된다.
(3) 초기해로 연결된 경로에서 k 노드와 l 노드들의 간선이 $w\{k,l\}$로 결정된다.

본 논문에서 적용된 실험 데이터들은 모두 그림 3의 2-opt, 3-opt (1,2,3)과 4-opt로 문제가 해결되었다. 그러나 보다 일반적인 문제 해결을 위해 그림 4의 3-opt도 추가로 제안한다. 그림 4 이외에도 다양한 종류의 3-opt들이 추가로 고려될 수 있다.

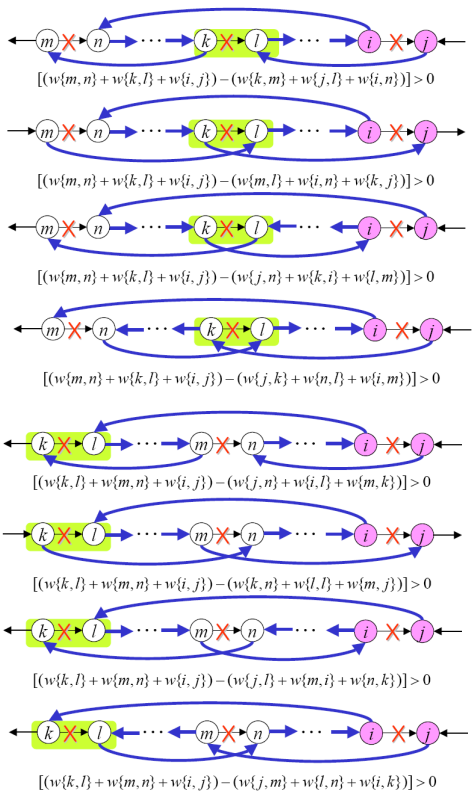


그림 4. 추가적인 3-opt
Fig. 4. Additional 3-opt

그림 3의 2-opt와 3-opt (1,2,3)를 적용하여 비용 절감 효과가 가장 큰 간선들을 교환하면 새로운 경로가 설정된다. 초기해에 대해 1차 개선 결과 얻은 경로는 초기해와 다른 경

로가 되어 $e_{\min}$ 간선들에 대해 교환 가능한 경우가 발생할 수 있다. 따라서 2차 개선은 $e_{\min}$ 간선들에 대해 비용 내림차순으로 2-opt, 3-opt (1,2,3)를 적용하여 새로운 경로를 설정한다. 이때 교환되지 않은 간선들을 e_{rem}에 저장한다. 경로가 변경되면 2차 개선과정에서 교환되지 않은 간선들에 대해 3-opt로 간선 교환이 이루어질 가능성이 있다. 따라서 2차 개선 후 변경된 경로에 대해 e_{rem} 간선들을 대상으로 3-opt와 4-opt를 적용하여 최종적으로 z_{opt}를 얻는다. 본 알고리즘의 상세한 내용은 그림 5에 제시되어 있다.

Step 1. 초기 경로 설정
1-1. 각 노드 (행)의 최소값 ($_{\min}c_i$) 선택
1-2. 이중 탐색
1-2-1. 선택된 값들 중 최소값 (Min) 행 노드 i에서 출발, "Nearest Neighbor Search" 수행. (Min-Min Method)
1-2-2. 선택된 값들 중 최대값 (Max) 행 노드 i에서 출발, "Nearest Neighbor Search" 수행. (Min-Max Method)
1-3. 최소 경로길이 $z_{\min}$ 방법 선택, 간선들을 e_{tsp}에 저장
Step 2. $z_{\min}$에 대해 해 개선
2-1. $w\{i,j\}$에 대해 $w\{j,i\}$ 삭제, $e_{tsp}=e_{ex}+e_{\min}$로 분리
e_{ex} = 각 노드의 행 (유출)과 열 (유입)이 최소값이 아닌 간선들
$e_{\min}$ = 각 노드의 행 (유출)과 열 (유입)이 최소값인 간선들
if $e_{ex}=\{\varnothing\}$ then $z_{opt}\leftarrow z_{\min}$, e_{tsp}를 최적해 경로로 설정, 알고리 즘 종료.
2-2. 1차 개선
e_{ex}에 대해 비용 내림차순으로 2-opt와 해당 3-opt (1,2,3) 수행, 가장 큰 비용 절감 값으로 경로 수정, 새로 추가된 간선을 $e_{\min}$에 저장.
2-3. 2차 개선
$e_{\min}$에 대해 비용 내림차순으로 2-opt와 해당 3-opt (1,2,3) 수행, 가장 큰 비용 절감 값으로 경로 수정, 교환된 간선은 $e_{\min}$에서 삭제, 새로 추가된 간 선은 $e_{\min}$에 저장, 교환되지 않은 간선은 e_{rem} 에 저장.
2-4. 3차 개선
e_{rem}에 대해 비용 내림차순으로 3-opt와 4-opt 수행, 가장 큰 비용절감 값으로 경로 수정.

(Nearest Neighbor Search)
- 초기값 : 방문 노드 집합 $T=\{i\}$ 저장, 미방문 노드 집합 V에 $V=V\setminus i$ 저장
- 다음 방문 노드 결정 : $j\in V$인 최소값 간선 선택
(미방문 노드들 중 가장 가까운 노드 방문)
- if $|V|=1$ then 해당 노드의 간선 선택
- if $V=\varnothing$ then 시작 노드의 간선 선택

그림 5. TSP의 확장된 k-opt 알고리즘
Fig. 5. The Extended k-opt TSP Algorithm

간선 교환 방법인 k-opt는 대칭행렬에만 적용된다. 왜냐하면 대칭행렬은 무방향 그래프 (Undirected Graph)로 간선 교환에 따라 경로가 반대로 변경되어도 간선 $w\{i,j\}=w\{j,i\}$로 동일한 경로 길이를 얻을 수 있다. 반면에, 비대칭행렬은 방향 그래프 (Digraph)로 간선 교환으로 경로가 반대로 변경되면 $w\{i,j\}\neq w\{j,i\}$ 속성을 갖고 있어 경로길이가 증가할 수 있기 때문이다. 결국, k-opt는 대칭행렬에만 한정되어 적용될 수 있다.

TSP-1에 대해 Min-Min Method와 Min-Max Method로 초기 경로를 탐색한 결과는 그림 6과 같다. 초기해에 대해 Min-Min Method와 Min-Max Method가 동일한 경로길이를 얻어 Min-Min Method를 대상으로 해 개선을 수행하였으며, 본 문제는 $e_{ex}=25\{6,1\}$에 대해 2-opt만을 수행하여 최적해 $z_{opt}=56$을 얻는데 성공하였으며, $e_{\min}$과 e_{rem}은 간선 교환 대상이 존재하지 않아 해 개선이 수행되지 않았다.

	1	2	3	4	5	6
1		3	10	11	7	25
2	3		6	12	8	26
3	10	6		9	4	20
4	11	12	9		5	15
5	7	8	4	5		18
6	25	26	20	15	18	

최소값 = $3\{1,3\}$, 최대값 = $15\{6,4\}$

Min-Min Method : $1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=58$

방문 노드	$_{\min}c_i$	T	V	선택	다음 방문노드
1	$\{1,2\}=3$	{1}	{2,3,4,5,6}	$\{1,2\}=3$	2
2	$\{2,1\}=3$ $\{2,3\}=6$	{1,2} {1,2}	{3,4,5,6} {3,4,5,6}	- $\{2,3\}=6$	3
3	$\{3,5\}=4$	{1,2,3}	{4,5,6}	$\{3,5\}=4$	5
5	$\{5,3\}=4$ $\{5,4\}=5$	{1,2,3,5} {1,2,3,5}	{4,6} {4,6}	- $\{5,4\}=5$	4
4	$\{4,6\}=15$	{1,2,3,4,5}	{6}	$\{4,6\}=15$	6
6	$\{6,1\}=25$	{1,2,3,4,5,6}	$\varnothing$	$\{6,1\}=25$	1
경로길이				58	

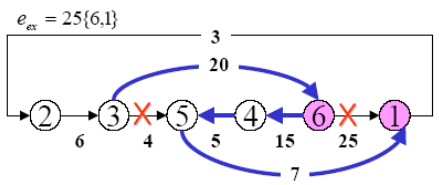
Min-Max Method : $6\underset{15}{\rightarrow}4\underset{5}{\rightarrow}5\underset{4}{\rightarrow}3\underset{6}{\rightarrow}2\underset{3}{\rightarrow}1\underset{25}{\rightarrow}6=58$

초기해 : $z_{ini}=1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{4}{\rightarrow}5\underset{5}{\rightarrow}4\underset{15}{\rightarrow}6\underset{25}{\rightarrow}1=58$

	1	2	3	4	5	6	$_{\min}c_i$
1		3	10	11	7		○
2			6	12	8	26	○
3	10			9	4	20	○
4	11	12	9			15	×
5	7	8	4	5		18	○
6	25	26	20		18		×
$_{\min}c_j$	×	○	×	○	○	○	

$e_{ex}=25\{6,1\}$,

$e_{\min}=3\{1,2\},6\{2,3\},4\{3,5\},15\{4,6\},5\{5,4\}$



최적해 : $z_{opt}=1\underset{3}{\rightarrow}2\underset{6}{\rightarrow}3\underset{20}{\rightarrow}6\underset{15}{\rightarrow}4\underset{5}{\rightarrow}5\underset{7}{\rightarrow}1=56$

그림 6. TSP-1의 2-opt 최적해
Fig. 6. Optimal solution of 2-opt for TSP-1

IV. 알고리즘 적용 및 분석

실험에 적용되는 데이터는 6개로 그림 7에 제시되어 있다. TSP-2는 Pleines[5]에서, TSP-3는 Tsilingiris[16]에서, TSP-4는 Pleines[5]에서, TSP-5와 TSP-6는 Kratica와 Radojevi[11]에서, TSP-7은 Pleines[5]에서 인용되었다. TSP-2은 TSP-1과 동일하게 6개 도시를 방문하는 문제이며, TSP-3~TSP-6은 10개 도시를 방문하는 경우이다. TSP-7은 26개 도시를 방문하는 경우로 본 실험에서는 가장 어려운 문제이다.

	1	2	3	4	5	6
1		12	25	30	28	22
2	12		16	20	22	10
3	25	16		23	26	21
4	30	20	23		31	18
5	28	22	26	31		14
6	22	10	21	18	14	

(a) TSP-2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		8	5	9	12	14	12	16	17	22
2	8		9	15	17	8	11	18	14	22
3	5	9		7	9	11	7	12	12	17
4	9	15	7		3	17	10	7	15	18
5	12	17	9	3		8	10	6	15	15
6	14	8	11	17	8		9	14	8	16
7	12	11	7	10	10	9		8	6	11
8	16	18	12	7	6	14	8		11	11
9	17	14	12	15	15	8	6	11		10
10	22	22	17	18	15	16	11	11	10	

(b) TSP-3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		16	44	93	1	30	30	5	78	42
2	16		68	61	42	77	41	79	22	32
3	44	68		39	48	21	36	28	40	80
4	93	61	39		43	8	66	46	30	35
5	1	42	48	43		67	69	11	84	91
6	30	77	21	8	67		97	43	63	67
7	30	41	36	66	69	97		85	89	18
8	5	79	28	46	11	43	85		2	85
9	78	22	40	30	84	63	89	2		5
10	42	32	80	35	91	67	18	85	5	

(c) TSP-4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		96	105	50	41	86	46	29	56	70
2	96		78	49	94	21	64	63	41	37
3	105	78		60	84	61	54	86	76	51
4	50	49	60		45	35	20	26	17	18
5	41	94	84	45		80	36	55	59	64
6	86	21	61	35	80		46	50	28	8
7	46	64	54	20	36	46		45	37	30
8	29	63	86	26	55	50	45		21	45
9	56	41	76	17	59	28	37	21		25
10	70	37	51	18	64	8	30	45	25	

(d) TSP-5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		72	43	217	92	183	116	143	161	141
2	72		51	222	52	182	99	83	186	72
3	43	51		229	97	199	121	115	203	101
4	217	222	229		219	40	156	285	63	299
5	92	52	97	219		179	57	123	159	100
6	183	182	199	40	179		130	265	65	251
7	116	99	121	156	57	130		158	91	154
8	143	83	115	285	123	265	158		269	14
9	161	186	203	63	159	65	91	269		255
10	141	72	101	299	100	251	154	14	255	

(e) TSP-6

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1		4074	639	4326	4528	4073	3730	3691	3641	3354	3514	3804	2671	3438	3078	3148	2318	2460	2098	2926	2294	2299	1276	2019	2542	1801
2	4074		3532	3126	3286	2665	2962	383	907	2783	1884	1035	3140	1130	1855	1459	1803	2337	1962	1900	2571	2260	3725	2422	1943	2263
3	639	3532		3687	2889	3475	1986	3466	3094	2715	2678	2846	952	2967	2605	2509	1781	1718	1561	2347	1728	1641	637	1390	1903	1709
4	4326	3126	3687		1141	638	577	3356	3306	972	1400	2689	2306	2128	1656	2304	2798	3141	2276	1968	2046	2219	3075	2363	2361	2913
5	4528	3286	3889	1141		1254	847	3849	3499	1174	1602	2798	2506	2278	1858	2506	3027	3296	2978	2170	2248	2421	3277	2365	2563	3118
6	4073	2665	3475	638	1254		407	2825	2775	732	895	2102	2080	1467	1106	1749	2370	2666	2295	1408	1786	1850	2859	2116	1950	2357
7	3730	2962	1986	577	847	407		2779	2729	409	810	1981	1727	1508	1060	1703	2230	2864	2195	1362	1463	1769	2836	1793	1810	2338
8	3691	383	3466	3356	3849	2825	2779		549	2370	1969	626	2764	1665	1719	1076	1420	1954	1579	1417	2187	1877	2839	2039	1460	1880
9	3641	907	3094	3306	3499	2775	2729	549		2320	1919	588	2718	1615	1669	1026	1370	1904	1529	1367	2138	1827	3789	1989	1410	1830
10	3354	2783	2715	972	1174	732	409	2370	2320		428	1637	1334	1099	684	1332	1823	2117	1804	966	1074	1247	3103	1391	1389	1941
11	3514	1884	2678	1400	1602	895	810	1969	1919	428		1745	1294	698	256	904	1395	1782	1350	568	1054	1004	2093	1320	979	1527
12	3804	1035	2846	2689	2798	2102	1981	626	588	1637	1345		2083	1129	915	367	886	1238	1030	688	1507	1205	2254	1833	802	1252
13	2671	3140	952	2306	2808	2080	1727	2764	2715	1334	1294	2083		1872	1150	1525	1661	1898	1492	1300	905	871	1420	882	1375	1413
14	3438	1130	2967	2125	2278	1497	1506	1665	1615	1099	698	1129	1872		718	599	1216	1670	1299	612	1456	1298	2529	1378	1064	1627
15	3078	1855	2605	1656	1858	1106	1060	1719	1669	684	256	915	1150	718		648	1139	1582	1107	312	857	748	1928	1018	723	1271
16	3148	1459	2509	2304	2506	1749	1703	1076	1026	1332	904	367	1525	589	648		669	1114	781	337	1095	889	1847	1129	582	1073
17	2318	1803	1781	2798	3027	2370	2230	1420	1370	1823	1395	886	1661	1216	1139	669		930	220	912	1096	801	1588	964	416	517
18	2260	2337	1718	3141	3296	2666	2564	1954	1904	2117	1752	1238	1898	1670	1582	1114	930		371	1257	1321	942	1504	991	764	449
19	2098	1962	1561	2276	2978	2295	2195	1579	1529	1804	1398	1090	1492	1299	1107	781	220	371		913	927	632	1539	664	409	297
20	2926	1900	2347	1968	2170	1408	1362	1417	1367	966	568	688	1300	612	312	337	912	1257	913		830	668	1480	950	504	1071
21	2294	2571	1728	2046	2248	1786	1463	2187	2138	1074	1034	1507	905	1456	857	1055	1096	1321	927	830		305	1043	317	710	842
22	2299	2260	1641	2219	2421	1850	1769	1877	1827	1247	1004	1205	871	1298	748	859	801	942	632	668	305		1052	280	415	572
23	1276	3725	637	3075	3277	2859	2836	2839	2789	2103	2093	2234	1420	2529	1928	1847	1591	1504	1338	1480	1043	1052		772	1295	1030
24	2019	2422	1390	2363	2565	2116	1793	2039	1989	1391	1320	1533	882	1978	1018	1129	964	991	664	950	317	280	772		578	517
25	2842	1943	1903	2361	2563	1950	1810	1460	1410	1389	979	802	1278	1064	723	552	416	764	409	504	710	415	1295	578		567
26	1801	2263	1709	2913	3115	2357	2335	1890	1830	1941	1527	1282	1413	1627	1271	1073	517	449	297	1071	842	572	1030	517	567	

(f) TSP-7

그림 7. 실험 데이터
Fig. 7. Experimental Data

Pleines[5]는 TSP-2에 대한 최적해로 $z_{opt} = 1 \xrightarrow[12]{} 2 \xrightarrow[16]{} 3 \xrightarrow[23]{} 4 \xrightarrow[18]{} 6 \xrightarrow[14]{} 5 \xrightarrow[28]{} 1 = 111$을 제시하고 있다. TSP-2 문제에 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 그림 8에 제시되어 있다. 본 문제에 대해 초기해로 Min-Min 방법을 선택하고 e_{ex}에 대해 해 개선작업을 수행한 결과 Pleines[5]가 제시한 최적해 z_{opt}와 동일한 값을 얻었다.

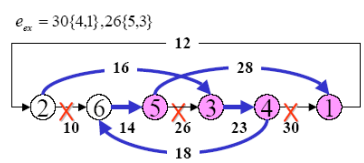
Min-Min Method : $2 \xrightarrow[10]{} 6 \xrightarrow[14]{} 5 \xrightarrow[26]{} 3 \xrightarrow[23]{} 4 \xrightarrow[30]{} 1 \xrightarrow[12]{} 2 = 115$

Min-Max Method : $4 \xrightarrow[18]{} 6 \xrightarrow[10]{} 2 \xrightarrow[12]{} 1 \xrightarrow[25]{} 3 \xrightarrow[26]{} 5 \xrightarrow[31]{} 4 = 122$

초기해 : $z_{ini} = 2 \xrightarrow[10]{} 6 \xrightarrow[14]{} 5 \xrightarrow[26]{} 3 \xrightarrow[23]{} 4 \xrightarrow[30]{} 1 \xrightarrow[12]{} 2 = 115$

	1	2	3	4	5	6	$\min c_i$
1		12	25		28	22	○
2			16	20	22	10	○
3	25	16		23		21	×
4	30	20			31	18	×
5	28	22	26	31			×
6	22		21	18	14		○
$\min c_j$	×	○	×	×	○	○	

$e_{ex} = 30\{4,1\}, 26\{5,3\}, 23\{3,4\}$



최적해 : $z_{opt} = 2 \xrightarrow[16]{} 3 \xrightarrow[23]{} 4 \xrightarrow[18]{} 6 \xrightarrow[14]{} 5 \xrightarrow[28]{} 1 \xrightarrow[12]{} 2 = 111$

그림 8. TSP-2의 3-opt 알고리즘 최적해
Fig. 8. Optimal solution of 3-opt for TSP-2

TSP-3에 대해 Tsilingiris[16]는 Nearest-Neighbor Heuristic Method (1^{st} Node Method)로 $1\xrightarrow[5]{}3\xrightarrow[7]{}4\xrightarrow[3]{}5\xrightarrow[6]{}8\xrightarrow[8]{}7\xrightarrow[6]{}9\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}2\xrightarrow[22]{}10\xrightarrow[22]{}1=95$, Closest Insertion Heuristic Method는 79, Geometric Heuristic Method는 73을, TSPdyn via Dynamic Programming Method는 $2\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}5\xrightarrow[3]{}4\xrightarrow[7]{}8\xrightarrow[11]{}10\xrightarrow[10]{}9\xrightarrow[6]{}7\xrightarrow[7]{}3\xrightarrow[5]{}1\xrightarrow[8]{}2=73$을 얻었으며, 최적해로 $z_{opt}=73$을 제시하고 있다. 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 그림 9에 제시되어 있다. 본 문제에 대해 초기해로 Min-Max 방법을 선택하고 $e_{ex}=\{\varnothing\}$가 되어 초기해가 최적해로 결정되었으며, Tsilingiris[14]와 동일한 결과를 얻었다.

TSP-4에 대해 Pleines[5]는 Erster Schritt는 176, Weitere Iterationschritte는 176, Ergebnis는 175를 얻었음을 제시하였다. 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 (그림 10)에 제시되어 있다. 본 문제에 대해 초기해로 Min-Min 방법을 선택하고 e_{ex}의 $61\{4,2\}$에 대해서만 해 개선작업이 수행되어 Pleines[5]가 제시한 최적해 z_{opt}와 동일한 값을 얻는데 성공하였다.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		8	5	9	12	14	12	16	17	22
2	8		9	15	17	8	11	18	14	22
3	5	9		7	9	11	7	12	12	17
4	9	15	7		3	17	10	7	15	18
5	12	17	9	3		8	10	6	15	15
6	14	8	11	17	8		9	14	8	16
7	12	11	7	10	10	9		8	6	11
8	16	18	12	7	6	14	8		11	11
9	17	14	12	15	15	8	6	11		10
10	22	22	17	18	15	16	11	11	10	

Min-Min Method : $4\xrightarrow[3]{}5\xrightarrow[6]{}8\xrightarrow[8]{}7\xrightarrow[6]{}9\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}2\xrightarrow[8]{}1\xrightarrow[5]{}3\xrightarrow[17]{}10\xrightarrow[18]{}4=87$

Min-Max Method : $10\xrightarrow[10]{}9\xrightarrow[6]{}7\xrightarrow[7]{}3\xrightarrow[5]{}1\xrightarrow[8]{}2\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}5\xrightarrow[3]{}4\xrightarrow[7]{}8\xrightarrow[11]{}10=73$

초기해 : $z_{ini}=10\xrightarrow[10]{}9\xrightarrow[6]{}7\xrightarrow[7]{}3\xrightarrow[5]{}1\xrightarrow[8]{}2\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}5\xrightarrow[3]{}4\xrightarrow[7]{}8\xrightarrow[11]{}10=73$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min c_i$
1		8		9	12	14	12	16	17	22	○
2			9	15	17	8	11	18	14	22	○
3	5	9		7	9	11		12	12	17	○
4	9	15	7			17	10	7	15	18	○
5	12	17	9	3			10	6	15	15	○
6	14		11	17	8		9	14	8	16	○
7	12	11	7	10	10	9		8		11	○
8	16	18	12		6	14	8		11	11	×
9	17	14	12	15	15		6	11			○
10	22	22	17	18	15	16	11		10		○
$\min c_j$	○	○	○	○	×	○	○	×	×	○	

$e_{ex}=\{\varnothing\} \Rightarrow z_{ini}=z_{opt}$

최적해 : $z_{opt}=10\xrightarrow[10]{}9\xrightarrow[6]{}7\xrightarrow[7]{}3\xrightarrow[5]{}1\xrightarrow[8]{}2\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[8]{}5\xrightarrow[3]{}4\xrightarrow[7]{}8\xrightarrow[11]{}10=73$

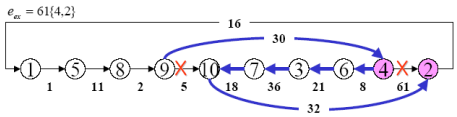
그림 9. TSP-3의 0-opt 알고리즘 최적해
Fig. 9. Optimal solution of 0-opt for TSP-3

Min-Min $z^3\xrightarrow[21]{}6\xrightarrow[8]{}4\xrightarrow[30]{}9\xrightarrow[2]{}8\xrightarrow[5]{}1\xrightarrow[1]{}5\xrightarrow[42]{}2\xrightarrow[32]{}10\xrightarrow[18]{}7\xrightarrow[36]{}3=195$

초기해 : $z_{ini}=1\xrightarrow[1]{}5\xrightarrow[11]{}8\xrightarrow[2]{}9\xrightarrow[5]{}10\xrightarrow[18]{}7\xrightarrow[36]{}3\xrightarrow[21]{}6\xrightarrow[8]{}4\xrightarrow[61]{}2\xrightarrow[16]{}1=179$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min c_i$
1			44	93	1	30	30	5	78	42	○
2	16		68		42	77	41	79	22	32	○
3	44	68		39	48	21		28	40	80	○
4	93	61	39		43		66	46	30	35	×
5		42	48	43		67	69	11	84	91	○
6	30	77		8	67		97	43	63	67	○
7	30	41	36	66	69	97		85	89		×
8	5	79	28	46		43	85		2	85	○
9	78	22	40	30	84	63	89			5	○
10	42	32	80	35	91	67	18	85			○
$\min c_j$	×	×	×	○	○	○	○	×	○	○	

$e_{ex}=61\{4,2\}, 36\{7,3\}$



최적해 : $z_{opt}=1\xrightarrow[1]{}5\xrightarrow[11]{}8\xrightarrow[2]{}9\xrightarrow[30]{}4\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[21]{}3\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[18]{}10\xrightarrow[32]{}2\xrightarrow[16]{}1=175$

그림 10. TSP-4의 2-opt 알고리즘 최적해
Fig. 10. Optimal solution of 2-opt for TSP-4

TSP-5에 대해 Kratica와 Radojevi[11]는 1^{st} Node Method는 $1\xrightarrow[29]{}8\xrightarrow[21]{}9\xrightarrow[17]{}4\xrightarrow[18]{}10\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[21]{}2\xrightarrow[64]{}7\xrightarrow[36]{}5\xrightarrow[84]{}3\xrightarrow[105]{}1=403$, Min-Min Method는 $6\xrightarrow[8]{}10\xrightarrow[18]{}4\xrightarrow[17]{}9\xrightarrow[21]{}8\xrightarrow[29]{}1\xrightarrow[41]{}5\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[54]{}3\xrightarrow[78]{}2\xrightarrow[21]{}6=323$, 최적해는 $6\xrightarrow[8]{}10\xrightarrow[18]{}4\xrightarrow[17]{}9\xrightarrow[21]{}8\xrightarrow[29]{}1\xrightarrow[41]{}5\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[54]{}3\xrightarrow[78]{}2\xrightarrow[21]{}6=323$을 제시하고 있다. 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 그림 11에 제시되어 있다. 본 문제에 대해 초기해로 Min-Min 방법을 선택하고 e_{ex}, $e_{\min}$에 대해 해 개선 작업을 수행한 결과 개선 대상이 없어 초기해를 최적해로 결정하였으며, 이는 Kratica와 Radojevi[11]가 제시한 최적해 z_{opt}와 동일한 값임을 알 수 있다.

Min-Min Method : $6\xrightarrow[8]{}10\xrightarrow[18]{}4\xrightarrow[17]{}9\xrightarrow[21]{}8\xrightarrow[29]{}1\xrightarrow[41]{}5\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[54]{}3\xrightarrow[78]{}2\xrightarrow[21]{}6=323$

Min-Max Method : $5\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[20]{}4\xrightarrow[17]{}9\xrightarrow[21]{}8\xrightarrow[29]{}1\xrightarrow[70]{}10\xrightarrow[8]{}6\xrightarrow[21]{}2\xrightarrow[78]{}3\xrightarrow[84]{}5=384$

초기해 : $z_{ini}=6\xrightarrow[8]{}10\xrightarrow[18]{}4\xrightarrow[17]{}9\xrightarrow[21]{}8\xrightarrow[29]{}1\xrightarrow[41]{}5\xrightarrow[36]{}7\xrightarrow[54]{}3\xrightarrow[78]{}2\xrightarrow[21]{}6=323$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min c_i$
1		96	105	50	41	86	46		56	70	○
2	96			49	94	21	64	63	41	37	○
3	105	78		60	84	61		86	76	51	×
4	50	49	60		45	35	20	26	17		○
5		94	84	45		80	36	55	59	64	○
6	86		61	35	80		46	50	28	8	○
7	46	64	54	20		46		45	37	30	×
8	29	63	86	26	55	50	45			45	×
9	56	41	76		59	28	37	21		25	○
10	70	37	51	18	64		30	45	25		○
$\min c_j$	○	×	×	○	○	○	×	○	○	○	

$e_{ex} = 78\{3,2\}, 54\{7,3\}$

최적해 : $z_{opt} = 6 \xrightarrow[8]{} 10 \xrightarrow[18]{} 4 \xrightarrow[17]{} 9 \xrightarrow[21]{} 8 \xrightarrow[29]{} 1 \xrightarrow[41]{} 5 \xrightarrow[36]{} 7 \xrightarrow[54]{} 3 \xrightarrow[78]{} 2 \xrightarrow[21]{} 6 = 323$

그림 11. TSP-5의 0-opt 알고리즘 최적해
Fig. 11. Optimal solution of 0-opt for TSP-5

TSP-6에 대해 Kratica와 Radojevi[11]는 1st Node Method는 $1 \xrightarrow[43]{} 3 \xrightarrow[51]{} 2 \xrightarrow[52]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[251]{} 10 \xrightarrow[14]{} 8 \xrightarrow[143]{} 1 = 805$, Min-Min Method는 $8 \xrightarrow[14]{} 10 \xrightarrow[72]{} 2 \xrightarrow[51]{} 3 \xrightarrow[43]{} 1 \xrightarrow[92]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[265]{} 8 = 788$, 최적해는 $1 \xrightarrow[43]{} 3 \xrightarrow[51]{} 2 \xrightarrow[83]{} 8 \xrightarrow[14]{} 10 \xrightarrow[100]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[183]{} 1 = 725$를 제시하였다. 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 그림 12에 제시되어 있다. 본 문제에 대해 초기해로 Min-Min 방법을 선택하고 e_{ex}와 $e_{\min}$에 대해 해 개선 작업 수행 결과 Kratica와 Radojevi[11]가 제시한 최적해 z_{opt}와 동일한 값임을 알 수 있다.

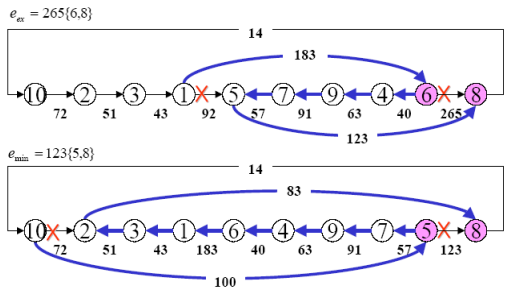
Min-Min Method : $8 \xrightarrow[14]{} 10 \xrightarrow[72]{} 2 \xrightarrow[51]{} 3 \xrightarrow[43]{} 1 \xrightarrow[92]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[265]{} 8 = 788$

Min-Max Method : $9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[130]{} 7 \xrightarrow[57]{} 5 \xrightarrow[52]{} 2 \xrightarrow[51]{} 3 \xrightarrow[43]{} 1 \xrightarrow[141]{} 10 \xrightarrow[14]{} 8 \xrightarrow[269]{} 9 = 860$

초기해 : $z_{ini} = 8 \xrightarrow[14]{} 10 \xrightarrow[72]{} 2 \xrightarrow[51]{} 3 \xrightarrow[43]{} 1 \xrightarrow[92]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[265]{} 8 = 788$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\min c_i$
1		72		217	92	183	116	143	161	141	×
2	72		51	222	52	182	99	83	186		○
3	43			229	97	199	121	115	203	101	○
4	217	222	229		219	40	156	285		299	○
5		52	97	219		179	57	123	159	100	×
6	183	182	199		179		130	265	65	251	×
7	116	99	121	156		130		158	91	154	○
8	143	83	115	285	123		158		269	14	○
9	161	186	203	63	159	65		269		255	○
10	141	72	101	299	100	251	154		255		○
$\min c_j$	○	×	○	○	×	○	○	×	×	○	

$e_{ex} = 265\{6,8\}, 92\{1,5\}$



최적해 : $z_{opt} = 1 \xrightarrow[43]{} 3 \xrightarrow[51]{} 2 \xrightarrow[83]{} 8 \xrightarrow[14]{} 10 \xrightarrow[100]{} 5 \xrightarrow[57]{} 7 \xrightarrow[91]{} 9 \xrightarrow[63]{} 4 \xrightarrow[40]{} 6 \xrightarrow[183]{} 1 = 725$

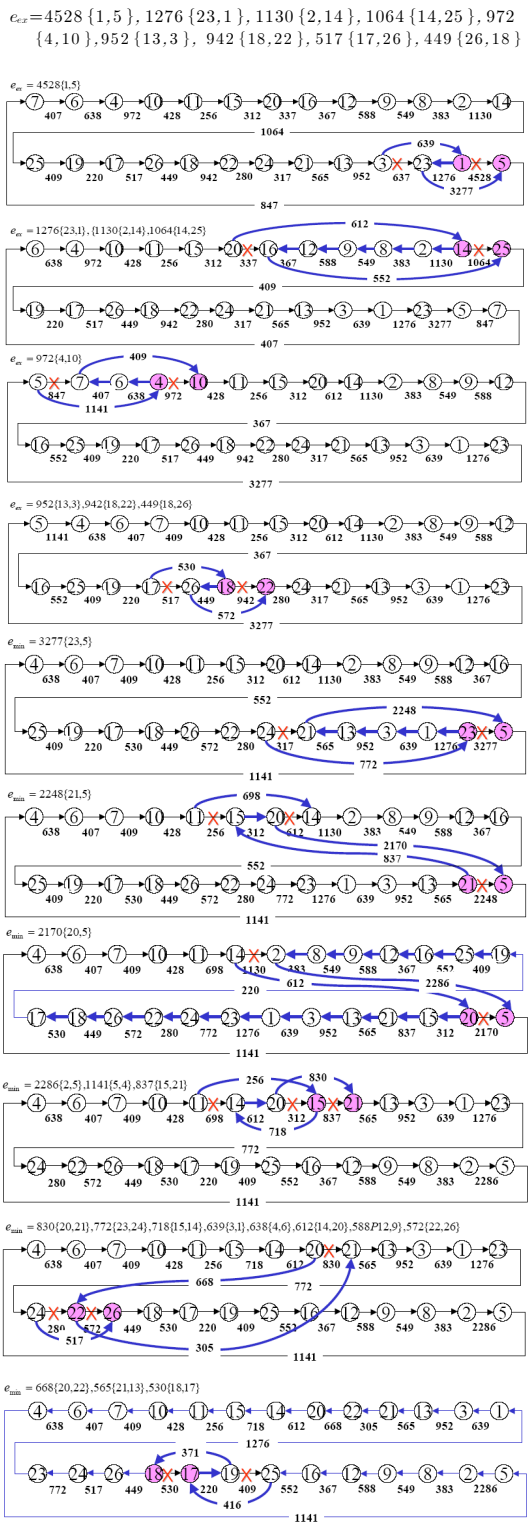
그림 12. TSP-6의 2-opt 알고리즘 최적해
Fig. 12. Optimal solution of 2-opt for TSP-6

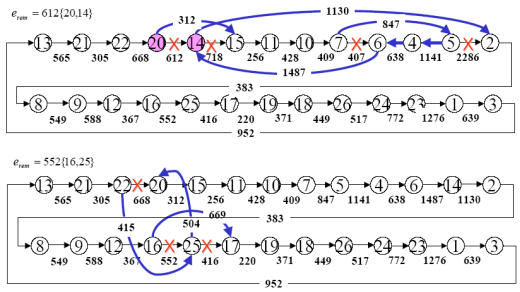
TSP-7에 대해 Pleines[5]는 최적해로 $1 \xrightarrow[639]{} 3 \xrightarrow[952]{} 13 \xrightarrow[565]{} 21 \xrightarrow[305]{} 22 \xrightarrow[415]{} 25 \xrightarrow[504]{} 20 \xrightarrow[312]{} 15 \xrightarrow[256]{} 11 \xrightarrow[428]{} 10 \xrightarrow[409]{} 7 \xrightarrow[847]{} 5 \xrightarrow[1141]{} 4 \xrightarrow[638]{} 6 \xrightarrow[1487]{} 14 \xrightarrow[1130]{} 2 \xrightarrow[383]{} 8 \xrightarrow[549]{} 9 \xrightarrow[588]{} 12 \xrightarrow[367]{} 16 \xrightarrow[669]{} 17 \xrightarrow[220]{} 19 \xrightarrow[371]{} 18 \xrightarrow[449]{} 26 \xrightarrow[517]{} 24 \xrightarrow[772]{} 23 \xrightarrow[1276]{} 1 = 16,189$를 제시하였다. 제안된 간선 교환 알고리즘을 적용한 결과는 그림 13에 제시되어 있다. 본 문제는 26개의 도시를 방문하는 복잡한 문제로 초기해로 Min-Max 방법을 선택하고 e_{ex}, $e_{\min}$과 e_{rem}에 대해 해 개선 작업을 수행하였으며, Pleines[5]가 제시한 최적해 z_{opt}와 동일한 값을 얻는데 성공하였다.

Min-Min Method : $17 \xrightarrow[220]{} 19 \xrightarrow[297]{} 26 \xrightarrow[449]{} 18 \xrightarrow[764]{} 25 \xrightarrow[415]{} 22 \xrightarrow[280]{} 24 \xrightarrow[317]{} 21 \xrightarrow[565]{} 13 \xrightarrow[952]{} 3 \xrightarrow[637]{} 23 \xrightarrow[1043]{} 20 \xrightarrow[312]{} 15 \xrightarrow[256]{} 11 \xrightarrow[428]{} 10 \xrightarrow[409]{} 7 \xrightarrow[407]{} 6 \xrightarrow[638]{} 4 \xrightarrow[1141]{} 5 \xrightarrow[2278]{} 14 \xrightarrow[589]{} 16 \xrightarrow[367]{} 12 \xrightarrow[588]{} 9 \xrightarrow[549]{} 8 \xrightarrow[383]{} 2 \xrightarrow[4074]{} 1 \xrightarrow[2318]{} 17 = 20,676$

Min-Max Method : $5 \xrightarrow[847]{} 7 \xrightarrow[407]{} 6 \xrightarrow[638]{} 4 \xrightarrow[972]{} 10 \xrightarrow[428]{} 11 \xrightarrow[256]{} 15 \xrightarrow[312]{} 20 \xrightarrow[337]{} 16 \xrightarrow[367]{} 12 \xrightarrow[588]{} 9 \xrightarrow[549]{} 8 \xrightarrow[383]{} 2 \xrightarrow[1130]{} 14 \xrightarrow[1064]{} 25 \xrightarrow[409]{} 19 \xrightarrow[220]{} 17 \xrightarrow[517]{} 26 \xrightarrow[449]{} 18 \xrightarrow[942]{} 22 \xrightarrow[280]{} 24 \xrightarrow[317]{} 21 \xrightarrow[565]{} 13 \xrightarrow[952]{} 3 \xrightarrow[637]{} 23 \xrightarrow[1276]{} 1 \xrightarrow[4528]{} 5 = 19,370$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	$\min c_i$
1		4074	639	4526	4528	4073	3730	3691	3641	3354	3314	2671	3435	3078	3148	2518	2260	2098	2926	2294	2299			2019	2542	1801	×
2	4074		3532	3128	2686	2665	2362		907	2753	1884	1035	3146	1130	1855	1459	1805	2337	1962	1830	2871	2260	3725	2422	1643	2263	×
3	639	3532		3687	2889	3476	1966	3466	3094	2719	2675	2846	952	2967	2605	2509	1791	1718	1561	2347	1728	1641	697	1380	1903	1709	○
4	4526	3128	3687		1141		577	3356	3306	972	1400	2689	2306	2125	1656	2304	2795	3141	2276	1968	2046	2219	3075	2363	2361	2813	×
5		3386	3889	1141		1264	847	3849	3499	1174	1602	2798	2506	2276	1858	2806	3027	3296	2978	2170	2248	2421	3277	2565	2563	3115	○
6	4073	2665	3475	638	1264			2825	2775	752	898	2102	2080	1487	1106	1749	2370	2666	2285	1408	1786	1850	2859	2116	1950	2387	○
7	3730	2362	1986	577		407		2779	2729	409	810	1981	1727	1508	1060	1705	2230	2564	2193	1362	1463	1769	2836	1793	1810	2338	○
8	3691	383	3466	3356	3349	2825	2779			2370	1969	626	2764	1665	1719	1076	1420	1984	1579	1417	2187	1877	2839	2039	1460	1880	○
9	3641	907	3094	3306	3499	2775	2729	949		2320	1919		2715	1615	1669	1026	1370	1904	1529	1367	2138	1827	2789	1989	1410	1830	○
10	3354	2753	2715		1174	752	409	2370	2320		628	1637	1334	1099	694	1332	1623	2117	1804	966	1074	1247	2103	1391	1389	1941	○
11	3314	1884	2675	1400	1602	898	810	1969	1919			1345	1294	636	256	904	1395	1732	1358	565	1034	1004	2093	1520	979	1527	○
12	3354	1035	2846	2689	2798	2102	1981	626	988	1637	1345		2083	1129	915		886	1238	1030	698	1307	1205	2234	1533	802	1252	○
13	2671	3146	952	2306	2506	2080	1727	2764	2715	1374	1294	2083		1872	1150	1528	1661	1898	1492	1300		871	1420	882	1278	1413	×
14	3435		2967	2125	2276	1487	1508	1665	1615	1099	698	1129	1872		718	589	1216	1670	1289	612	1456	1298	2529	1575	1064	1627	×
15	3078	1855	2605	1656	1858	1106	1060	1719	1669	694		915	1150	718		648	1139	1582	1107	312	837	748	1928	1018	723	1271	○
16	3148	1459	2509	2304	2806	1749	1705	1076	1026	1332	904	587	1828	589	648		669	1114	781		1088	859	1847	1129	552	1073	○
17	2518	1803	1781	2795	3027	2570	2230	1420	1370	1823	1395	886	1661	1216	1139	669		530		912	1096	901	1558	964	416	817	×
18	2260	2337	1716	3141	3296	2666	2564	1954	1904	2117	1752	1238	1696	1670	1582	1114	530		371	1287	1321	942	1804	991	764		×
19	2098	1962	1561	2276	2978	2285	2193	1579	1529	1804	1358	1030	1492	1299	1107	781	220	371		913	927	632	1338	664		297	○
20	2926	1800	2347	1968	2170	1408	1362	1417	1367	966	568	688	1300	612		337	912	1287	913		830	668	1480	950	504	1071	○
21	2294	2871	1728	2068	2248	1786	1463	2187	2138	1074	1034	1907	969	1456	837	1088	1096	1321	927	830		305	1043	517	710	842	×
22	2299	2260	1641	2219	2421	1850	1769	1877	1827	1247	1004	1205	871	1298	748	859	901		632	668	308		1052	280	415	572	○
23	1276	3725		3075	3277	2859	2836	2839	2789	2103	2093	2234	1430	2529	1928	1847	1858	1804	1338	1480	1043	1052		772	1288	1030	×
24	2019	2422	1380	2363	2565	2116	1793	2039	1989	1391	1320	1533	882	1575	1018	1129	964	991	664	950	317		772		578	517	○
25	2542	1843	1903	2561	2563	1950	1810	1460	1410	1389	979	802	1275		723	552	416	764	409	504	710	415	1288	578		967	○
26	1801	2263	1709	2913	3115	2587	2338	1880	1830	1941	1527	1252	1413	1627	1271	1073		449	297	1071	842	572	1030	517	567		×
$\min c_j$	×	○	×	×	×	○	×	○	○	×	○	○	○	×	○	○	○	×	×	○	×	○	○	×	×		





최적해 : $z_{opt}=1\underset{639}{\rightarrow}3\underset{952}{\rightarrow}13\underset{565}{\rightarrow}21\underset{305}{\rightarrow}22\underset{415}{\rightarrow}25\underset{504}{\rightarrow}20\underset{312}{\rightarrow}15\underset{256}{\rightarrow}11\underset{428}{\rightarrow}10\underset{409}{\rightarrow}7\underset{847}{\rightarrow}5\underset{1141}{\rightarrow}4\underset{638}{\rightarrow}6\underset{1487}{\rightarrow}14\underset{1130}{\rightarrow}2\underset{383}{\rightarrow}8\underset{549}{\rightarrow}9\underset{588}{\rightarrow}12\underset{367}{\rightarrow}16\underset{669}{\rightarrow}17\underset{220}{\rightarrow}19\underset{371}{\rightarrow}18\underset{449}{\rightarrow}26\underset{517}{\rightarrow}24\underset{772}{\rightarrow}23\underset{1276}{\rightarrow}1=16,189$

그림 13. TSP-7의 k-opt $(k=2,3,4)$ 알고리즘 최적해
Fig. 13. Optimal solution of k-opt $(k=2,3,4)$ for TSP-7

제안된 알고리즘은 6개의 도시 방문 문제 (TSP-1, TSP-2), 10개 도시 방문 문제 (TSP-3, TSP-4, TSP-5, TSP-6)와 26개 도시 방문 문제 (TSP-7)에 대해 기존에 알려진 최적해를 구하는데 성공하였다.

제안된 min(min-min, min-max) 초기치에 대해 k-opt를 적용한 결과는 표 1과 같다. TSP-3와 TSP-5는 초기해에 대해 k-opt 적용 없이 최적해를 구하였음을 알 수 있다. TSP-1, TSP-4와 TSP-6는 2-opt로 최적해를 구하였으며, TSP-2는 3-opt로 최적해를 구하였다. 특이하게도 TSP-7과 같이 큰 데이터의 경우 2,3과 4-opt가 혼합 적용되어 최적해를 구하였다. 결론적으로, 제안된 알고리즘은 기존의 k-opt 기본개념을 확장시킨 확장된 k-opt를 제안하였으며, 초기해를 min(min-min, min-max)로 구하면 쉽게 k-opt를 적용할 수 있음을 보였다.

표 1. 제안 알고리즘 결과
Table 1. The Result of Proposed Algorithm

문제	알려진 최적해	제안 알고리즘	
		k-opt	최적해
TSP-1	56	2-opt	56
TSP-2	111	3-opt	111
TSP-3	73	0-opt	73
TSP-4	175	2-opt	175
TSP-5	323	0-opt	323
TSP-6	725	2-opt	725
TSP-7	16,189	2-, 3-, and 4-opt	16,189

V. 결론

본 논문은 지금까지 해결하지 못한 외판원 문제에 대해 k-opt 간선 교환 방법으로 지금까지 알려진 최적해를 구할 수 있음을 보였다. 이를 위해 초기해를 구하는 방법을 새로 제시하였으며, 기존의 간선 교환 방법인 2-opt를 확장하여 3-opt와 4-opt를 추가로 제안하였다. 또한, 초기해로부터 최적해를 도출하는 과정을 체계적으로 제안하였다.

제안된 알고리즘은 7개의 다양한 실제 문제들에 적용한 결과 모든 데이터에 대해 지금까지 알려진 최적해를 빠르게 구하는데 성공하였다. 제안된 알고리즘 검증에는 관련 데이터 부족으로 단지 7개 데이터만 적용하여 일반화된 알고리즘으로의 한계점이 존재한다. 따라서 추후 보다 많은 실제 데이터들에 적용하여 3-opt (1,2,3) 만으로 해결되는지 아니면 추가적으로 제안한 3-opt (4-11)가 활용되는지를 검증할 예정이다.

참고문헌

〔1〕 Wikipedia, "Travelling Salesman Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_Salesman_Problem, Wikimedia Foundation Inc., 2012.

〔2〕 A. Likas and V. T. Paschos, "A Note on a New Greedy-solution Representation and a New Greedy Parallelizable Heuristic for the Traveling Salesman Problem," Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 13, pp. 71-78, 2002.

〔3〕 A. Schrijver, "On the History of Combinatorial Optimization (till 1960)," in Handbook of Discrete Optimization'' (K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel, eds.), Elsevier, Amsterdam, pp. 1-68, 2005,

〔4〕 J. Denzinger, D. Fuchs, M. Fuchs, and M. Kronenburg, "The Teamwork Method for Knowledge-Based Distributed Search: The travelling salesman problem," University of Kaiserslautern, 2008.

〔5〕 J. Pleines, "ZIP-Methode: ein Kombinatorischer Ansatz zur Optimalen Lősung Allgemeiner Traveling- Salesman-Problem (TSP)," Kőnnen bekannte Lősungen nicht nur auf Gesamtgrphen sondern auf Teilgraphen angewandt werden, so bringt die ZIP-Methode den entscheidenden Quantensprung der rechentechnischen Vereinfachung, 2006.

〔6〕 S. Vempala, "18.433 Combinatorial Optimization: NP-completeness," http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Mathematics/18-433Fall2003/778D00DB-F21C-486C-ABD8-F5E7F5C929C3/O/I20.pdf, 2003.

〔7〕 E. Charniak and M. Herlihy, "CSC 751 Computational Complexity: Local Search Heuristics," Department od Computer Science, Brown University, 2008.

〔8〕 L. Stougie, "2P350: Optimaliseringsmethoden, "http://www.win.tue.nl/~leen/OW/2P350/Week8/week8.pdf, College Wordt ggeven op vinjdagmiddag, 2001.

〔9〕 W. Cook, "The Traveling Salesman Problem," The School of Industrial and Systems Engineering, Gatorgia Tech, 2008.

〔10〕 A. Battese, "Millennium Problems," Clay Mathematics Institute, http://www.claymath.org/millennium/, 2008.

〔11〕 J. Kratica and S. Radojevi, "One Improvement to Nearest Neighbor Method for Solving Traveling Salesman Problem," LIRA 95 Proceedings, pp. 77-82, Novi Sad, 1996.

〔12〕 D. S. Johnson and L. A. McGeoch, "The Traveling Salesman Problem: A Case Study in Local Optimization," Department of Mathematics and Computer Science, Amherst College, 1995.

〔13〕 H. D. Beale, "Neural Network Design," PWS Publishing Company, 1996.

〔14〕 B. Chandra, H. Karloff, and C. Tovey, "New Results on the Old k-Opt Algorithm for the TSP," SIAM Journal on Computing, Vol. 28, No. 6, pp. 1998-2029, 1999.

〔15〕 K. Helsagaun, "General k-Opt Submoves for the Lin-Kernighan TSP Heuristic," Math. Prog. Comp., Vol. 1, pp. 119-163, 2009.

〔16〕 P. S. Tsilingiris, "A Multi-stage Decision-Support Methodology for The Optimization-based Linear-network Design," Degree of Diploma in Naval Architecture and Marine Engineering at the School of Naval Architecture and Marine Engineering of the National Technical University of Athens, 2005.

저 자 소 개

이 상 운(Sang-Un, Lee)
1983 ~ 1987년 :
한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
1995 ~ 1997년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
1998 ~ 2001년 :
경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
2003. 3 ~ 현재 :
강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수
관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리,
소프트웨어 개발 방법론,
소프트웨어 신뢰성,
신경망, 뉴로-퍼지,
그래프 알고리즘
e-mail : sulee@gwnu.ac.kr