

# 스크류 이론을 이용한 평면형 병렬로봇의 자코비안 및 특이점 해석

최정현\* · 이재원\*\* · 이혁진\*

\* 영남대학교 기계공학부

## Analysis of Jacobian and Singularity of Planar Parallel Robots Using Screw Theory

Jung Hyun Choi\*, Jeh Won Lee\*\* and Hyuk Jin Lee\*

\* Dept. of Mechanical Engineering, Yeungnam Univ.

(Received June 7, 2012 ; Revised August 19, 2012 ; Accepted August 23, 2012)

**Key Words:** Screw Theory(스크류이론), Redundant(여유구동), Jacobian(자코비안), Singularity(특이점), Parallel Robot(병렬 로봇)

**초록:** 병렬로봇의 구동을 계산하기 위해서 자코비안과 특이점 해석이 필요하다. 기존의 자코비안을 구하는 미분의 방식은 그 계산과정이 복잡하고 기하학적인 의미도 찾기 어렵다. 본 논문에서는 스크류 이론을 사용하여 병렬로봇의 자코비안을 쉽게 구하고 그것의 기하학적인 의미도 구하였다. 뿐만 아니라 특이점도 간단한 형태로 식을 구성할 수 있으며 기하학적인 의미도 가진다. 또한, 스크류 이론의 적용이 5 링크와 같이 간단한 형태의 비 여유구동 로봇뿐만 아니라 다양한 형태의 평면형 여유구동 병렬로봇에도 적용 가능하다는 것을 본 논문에서 제시하였다.

**Abstract:** The Jacobian and singularity analysis of parallel robots is necessary to analyze robot motion. The derivations of the Jacobian matrix and singularity configuration are complicated and have no geometrical meaning in the velocity form of the Jacobian matrix. In this study, the screw theory is used to derive the Jacobian of parallel robots. The statics form of the Jacobian has a geometrical meaning. In addition, singularity analysis can be performed by using the geometrical values. Furthermore, this study shows that the screw theory is applicable to redundantly actuated robots as well as non-redundant robots.

### 1. 서론

병렬로봇은 고속작업과 부하가 많이 걸리는 작업에 적합한 구조이다. 병렬로봇을 구동하기 위하여서는 위치 및 속도지령이 필요한데 이를 위하여서는 기구의 자코비안(Jacobian) 및 특이점(singularity) 해석이 필요하다. 병렬로봇의 자코비안 해석을 위한 방법들이 여러 가지 제시되었다.<sup>(1~11)</sup> 대부분의 경우 기구학적 구속조건을 미분하여 자코비안을 계산하였다. 비교적 구조가 단순한 병렬로봇의 경우 계산이 간단하지만 자유도가 많아질수록 계산이 복잡하여 진다. 하지만 여러가지 평면형 병렬로봇에 스크류이론(screw theory)에서 제시한 기하학적 해석방법을 사용하면 자코비안을 간단히 구할 수 있고 특이점 해석

도 쉽게 할 수 있다. 이를 위해 먼저, 고속조립 및 Pick and Place 작업에 많이 쓰이고 있는 5링크 병렬 로봇의 자코비안과 특이점 해석을 수행하여 기존의 방법과 스크류 이론을 이용한 방법을 비교하였다. 이를 바탕으로 여러 형태의 평면형 병렬 로봇도 스크류이론을 이용하면 자코비안을 쉽게 구할 수 있고 특이점 해석도 쉽게 할 수 있음을 본 논문을 통하여 보이고자 한다.

### 2. 기존의 5링크 병렬 로봇의 기구학 해석

**Fig. 1**은 5링크 병렬 로봇의 개략도를 나타낸 것이다. A, D는 구동조인트이며 원점 O에서 d 만큼 떨어져 있다. B, C는 종동조인트이며  $P_x, P_y$  은 끝점의 위치이다.

#### 2.1 순간운동학을 이용한 자코비안 해석

먼저, 5링크의 끝점의 좌표는 일반적인 기구학

† Corresponding Author, [jwlee@yu.ac.kr](mailto:jwlee@yu.ac.kr)

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

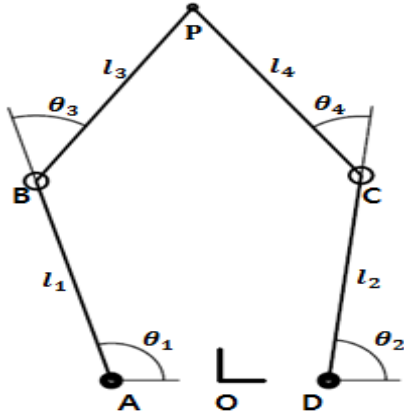


Fig. 1 5 link planar parallel robot

해석을 통해 구한다. 그 결과는 식 (1),(2)로 표현할 수 있다.

Link AB and BP

$$\begin{cases} P_x = -d + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_3) \\ P_y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \end{cases} \quad (1)$$

Link DC and CP

$$\begin{cases} P_x = d + l_2 \cos \theta_2 + l_4 \cos(\theta_2 + \theta_4) \\ P_y = l_2 \sin \theta_2 + l_4 \sin(\theta_2 + \theta_4) \end{cases} \quad (2)$$

자코비안은 로봇의 끝점의 속도( $\dot{P}$ )와 구동조인트와의 각속도( $\dot{\theta}$ )와의 관계를 나타낸다. 먼저, 식 (1),(2)를 미분을 하여 구동조인트의 각속도와 끝점의 속도의 관계식을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -(l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 + \theta_3)) \\ \dot{P}_y = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_1 + \theta_3) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{P}_x = -(l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + l_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \sin(\theta_2 + \theta_4)) \\ \dot{P}_y = l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + l_2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_4) \cos(\theta_2 + \theta_4) \end{cases} \quad (4)$$

식 (3)에  $\cos(\theta_1 + \theta_3)$  와  $\sin(\theta_1 + \theta_3)$  을 각각 곱하고 식 (4)에  $\cos(\theta_2 + \theta_4)$  와  $\sin(\theta_2 + \theta_4)$  를 각각 곱하여 정리하면 중동조인트 각속도( $\theta_3, \theta_4$ ) 가 없는 식이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{P}_x \cos(\theta_1 + \theta_3) + \dot{P}_y \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ = l_1 \dot{\theta}_1 (\sin(\theta_1 + \theta_3) \cos \theta_1 - \cos(\theta_1 + \theta_3) \sin \theta_1) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_x \cos(\theta_2 + \theta_4) + \dot{P}_y \sin(\theta_2 + \theta_4) \\ = l_2 \dot{\theta}_2 (\sin(\theta_2 + \theta_4) \cos \theta_2 - \cos(\theta_2 + \theta_4) \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (6)$$

이제 자코비안 행렬을 구성하기 위해 식을 정리한다.

$$J_p \dot{P} = J_\theta \dot{\theta} \quad (7)$$

여기서,

$$J_p = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_3) & \sin(\theta_1 + \theta_3) \\ \cos(\theta_2 + \theta_4) & \sin(\theta_2 + \theta_4) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$J_\theta = \begin{bmatrix} l_1 \sin \theta_3 & 0 \\ 0 & l_2 \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{P}_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

식 (7)에  $J_p^{-1}$ 를 양변에 곱하면 다음과 같다.

$$\dot{P} = \hat{J} \dot{\theta} \quad (12)$$

여기서,

$$J = J_p^{-1} J_\theta = \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} l_1 \sin(\theta_2 + \theta_4) \sin \theta_3 & -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_3) \sin \theta_4 \\ -l_1 \cos(\theta_2 + \theta_4) \sin \theta_3 & l_2 \cos(\theta_1 + \theta_3) \sin \theta_4 \end{bmatrix},$$

$\Delta = \sin(\theta_2 + \theta_4 - (\theta_1 + \theta_3))$  이다.

위 식 (12)는 각속도가 주어졌을 때 끝점의 속도를 알 수 있으나 자코비안( $J_p^{-1} J_\theta$ )을 구하는 과정이 매우 복잡하고, 식의 기하학적인 의미도 찾기 어렵다.

위 식 (12)을 스�크류 이론의 순간 운동학 관계식으로 나타내면 식 (14)과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{T} = \hat{J} \dot{\theta} \quad (14)$$

여기서,  $\hat{T}$ 는 스�크류 이론에서 끝점의 순간운동을 나타내는 트위스트(Twist)이다.

## 2.2 특이점 해석

### 2.2.1 정특이점

식 (7)에서 특이점 조건의 첫 번째는  $\det(J_p) = 0$  을 만족하는 값이다. 이를 정특이점(Direct Singularity)이라고 한다. 끝점의 자유도가 증가하는 경우

이며 구동조인트가 모두 고정( $\dot{\theta} = 0$ ) 되어도 끝점에 자유도가 발생하는 경우( $\dot{P} \neq 0$ ) 를 말한다.

$$\det(J_p) = \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \quad (15)$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \text{ or } \pi \quad (16)$$

여기서,  $\alpha_1 = \theta_1 + \theta_3$  이고  $\alpha_2 = \theta_2 + \theta_4$  이다. 따라서 정특이점은 Fig. 2와 같이 링크 BP와 링크 CP가 서로 평행하거나 겹치는 2가지 특이점 경우가 존재한다.

2.2.2 역특이점

특이점의 두 번째 조건은  $\det(J_\theta) = 0$  을 만족하는 값이다. 이를 역특이점(Inverse singularity)라고 한다. 끝점의 자유도가 감소하는 경우이며 끝점이 움직이지 않아도( $\dot{P} = 0$ ) 일부 조인트에 자유도( $\dot{\theta} \neq 0$ ) 가 발생하는 경우를 말한다.

$$\det(J_\theta) = l_1 l_2 \sin\theta_3 \sin\theta_4 = 0 \quad (17)$$

따라서 특이점 형상은 Fig. 3과 같이 링크 AB와 링크 BP가 서로평행하거나 겹치는 형상, 링크 CD와 CP가 서로평행하거나 겹치는 형상의 4가지 특이점 경우가 존재한다.

$$\theta_3 = 0 \text{ or } \pi \quad (18)$$

$$\theta_4 = 0 \text{ or } \pi \quad (19)$$

3. 스크류 이론을 이용한 5 링크 병렬로봇의 기구학 해석

병렬 로봇의 또 다른 해석방법으로는 스크류이론(screw theory)<sup>(12)</sup>을 이용하여 수행하는 것인데 이 방법은 기하학적 의미가 있어 병렬 로봇의 해석하는데 많이 쓰이고 있다. 따라서, 이 장에서는 스크류 이론을 이용하여 5 링크 병렬 로봇을 해석하고 그 결과를 기존 방법과 비교하자 한다.

3.1 스크류해석을 이용한 자코비안 해석

5 링크 병렬 로봇의 끝점과 구동조인트의 정역학 관계식은 다음과 같다.

$$\hat{w} = \bar{j} \bar{\lambda} \quad (20)$$

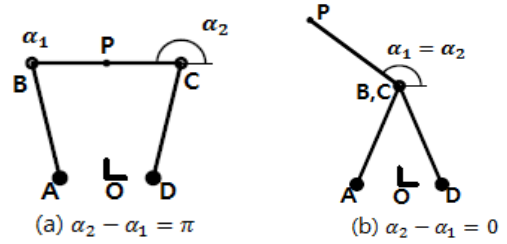


Fig. 2 Direct singularity of 5 link robot

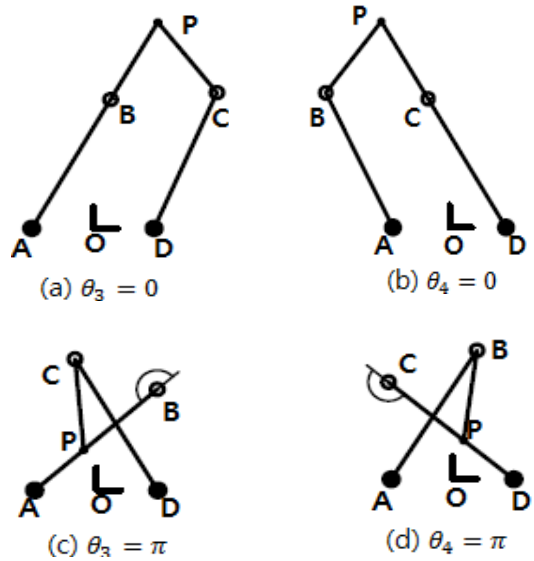


Fig. 3 Inverse singularity of 5 link robot

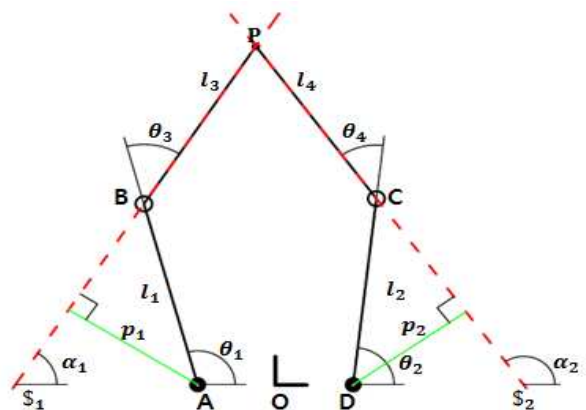


Fig. 4 Screw of 5 link planar parallel robot

여기서  $\hat{w}$ 는 끝점의 힘과 모멘트를 나타내는 렌치(Wrench)이며,  $\bar{\lambda} = [f_1 f_2]^T$ 는 구동 힘벡터를 나타낸다.  $\bar{j}$ 는 자코비안이며 각 행은 Fig. 4와 같이 절대좌표를 기준으로 구동 힘의 방향을 나

타내는 선벡터이다.

$$\bar{j} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 \\ p_1^e & p_2^e \end{bmatrix} \quad (21)$$

여기서  $\alpha_1, \alpha_2$  는 스크류 선벡터의 각도이며  $p_i^e$  로봇끝점에서 스크류 선벡터까지의 최단거리이다. 하지만 5링크 병렬 로봇은 두 스크류 선벡터가 끝점에서 만나기 때문에  $p_i^e=0$  가 된다. 그리고, 식 (20)를 구동 힘 대신 구동토크에 대한 관계식으로 바꾸면 식 (22)와 같은 형태의 자코비안을 구할 수 있다. 따라서 자코비안은 기하학적 의미를 가지는 스크류 선벡터의 방향( $\alpha_1, \alpha_2$ ), 구동축에서 스크류까지의 최단거리  $p_i$ 로 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = j\lambda \quad (22)$$

여기서,

$$j = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 \\ p_1 & p_2 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = [\tau_1 \tau_2]^T \quad (23)$$

$$p_1 = l_1 \sin\theta_3, \quad p_2 = l_2 \sin\theta_4 \quad (24)$$

### 3.2 자코비안의 비교

스크류이론을 통하여 구한 자코비안과 미분을 통하여 구한 자코비안이 서로 일치하는지 확인 할 필요가 있다.

직렬 로봇에서는 식 (25)와 같이 순간운동학을 먼저 구하고 이를 이용하여 정역학을 구한다.

$$\hat{T} = j\dot{\theta}, \quad \lambda = J^T \hat{w} \quad (25)$$

여기서 자코비안 J의 벡터들은 기하학적으로는 회전축의 위치를 나타낸다.<sup>(12)</sup>

한편, 병렬로봇의 경우는 식 (26)와 같이 정역학을 먼저 구하고 이를 이용하여 순간운동학을 구한다.

$$\hat{w} = j\lambda, \quad \dot{\theta} = j^T \hat{T} \quad (26)$$

여기서 자코비안 j의 벡터들은 기하학적으로

구동 힘 스크류 선벡터를 나타내고,  $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$ ,  $\hat{T} = [\dot{P}_x, \dot{P}_y]$  이다. 식 (14)와 같은 형태의 식을 유도하기 위하여서는 역변환이 필요하다.

$$\hat{T} = (j^T)^{-1} \dot{\theta} \quad (27)$$

식 (14)에서 표현한 J를 식 (27)에서 표현한  $(j^T)^{-1}$  와 비교하면 서로 같음을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} (j^T)^{-1} &= \frac{1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \begin{bmatrix} p_1 \sin\alpha_2 & -p_2 \sin\alpha_1 \\ -p_1 \cos\alpha_2 & p_2 \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \begin{bmatrix} l_1 \sin\alpha_2 \sin\theta_3 & -l_2 \sin\alpha_1 \sin\theta_4 \\ -l_1 \cos\alpha_2 \sin\theta_3 & l_2 \cos\alpha_1 \sin\theta_4 \end{bmatrix} \\ &= J \end{aligned}$$

따라서 병렬로봇의 자코비안을 기존의 방법처럼 순간운동학 관계식, 식 (13)으로 구하면 식이 복잡하고 기하학적인 의미를 찾기 어려우나 정역학 관계식, 식 (23)으로 구하면 쉽게 구할 수 있고 자코비안의 기하학적인 의미도 알 수 있다.

### 3.3 특이점해석

식 (28)과 같이 스크류 이론을 통하여 구한 자코비안의 행렬식으로부터 특이점을 바로 구할 수 있다.

$$\det(j) = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{p_1 p_2} = 0 \text{ or } \infty \quad (28)$$

먼저,  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0 \text{ or } \pi$  조건으로부터 Fig. 2와 같이 정특이점을 구할 수 있다. 정특이점은 기하학적으로는 모든 스크류 선벡터가 한 점에서 만나거나 서로 평행하게 되는 경우이다.

두번째로  $p_1 = l_1 \sin\theta_3 = 0$  과  $p_2 = l_2 \sin\theta_4 = 0$  의 조건으로부터 Fig. 3과 같은 역특이점을 구할 수 있다. 역특이점은 기하학적으로는 구동축에서 스크류 선벡터간의 최단거리인  $p_i$ 가 0이 되는 경우로서 한 개의 링크가 완전히 퍼지거나 접혀진 형상이다.

## 4. 여러 형태의 병렬형 평면 로봇에 대한 스크류 이론의 적용

5 링크 병렬로봇은 2DOF를 가지는 구조가 간

단한 로봇이다. 스크류 이론이 5링크 병렬 로봇 뿐만 아니라 3DOF를 가지는 병렬 로봇이나 여유 구동을 가지는 병렬 로봇에도 적용가능한지 살펴 보아야 한다.

4.1 3RRR 병렬 로봇

Fig. 5는 3RRR 병렬 로봇의 개략도이다.  $A_i$  는 구동조인트 이며  $B_i, C_i$  는 중동조인트이며  $P_x, P_y, \phi$  는 끝점위치와 각도이다.  $\alpha_i$  는 스크류 선벡터  $\$i$ 의 각도이며  $\alpha_i = \theta_i + \theta_{i+3}$ 로 나타낼수 있다. 또한  $p_i^e$  는 끝점에서 스크류 선벡터까지 최단거리이다.

4.1.1 자코비안 해석

3RRR 병렬 로봇의 끝점과 구동조인트의 정역학 관계식은 식 (29)와 같다.

$$\hat{w} = \bar{j} \bar{\lambda} \tag{29}$$

여기서,

$$\bar{j} = [\$1 \ \$2 \ \$3], \quad \bar{\lambda} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad \$i = \begin{bmatrix} c_{\alpha i} \\ s_{\alpha i} \\ p_i^e \end{bmatrix}, \quad f_i = \frac{\tau_i}{p_i}$$

식 (29)을 구동 힘 대신 구동토크에 대한 관계식으로 바꾸면 식 (30)와 같은 형태의 자코비안을 구할 수 있다. 따라서 자코비안은 스크류 선벡터의 방향, 구동축에서 스크류까지의 최단거리  $p_i$  그리고 끝점에서 스크류까지의 최단거리  $p_i^e$ 로 표현할 수 있다.

$$\hat{w} = j \lambda \tag{30}$$

여기서,

$$j = \begin{bmatrix} c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} & c_{\alpha 3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ s_{\alpha 1} & s_{\alpha 2} & s_{\alpha 3} \\ p_1^e & p_2^e & p_3^e \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix},$$

$$p_1^e = l_t \sin \theta_7, \quad p_1 = l_1 \sin \theta_4$$

$$p_2^e = l_t \sin \theta_8, \quad p_2 = l_2 \sin \theta_5$$

$$p_3^e = l_t \sin \theta_9, \quad p_3 = l_3 \sin \theta_6$$

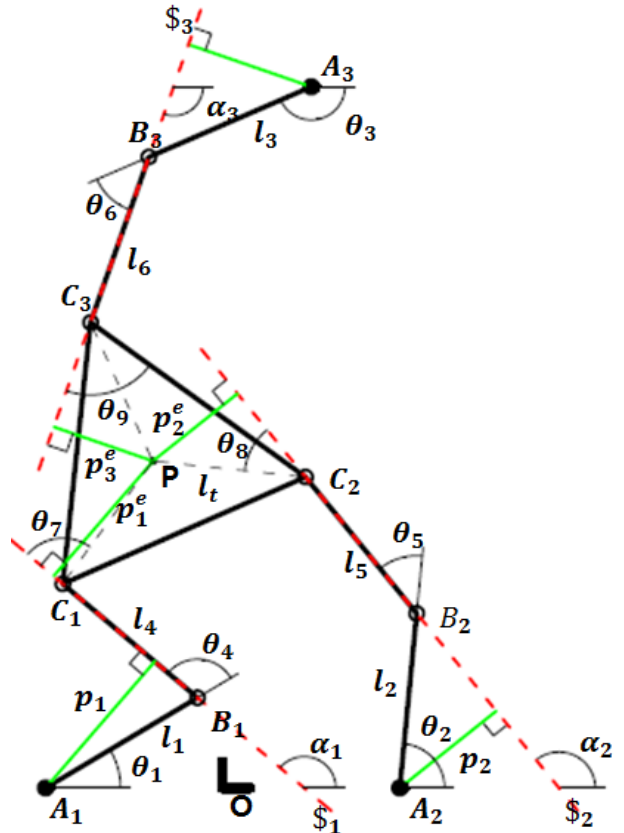


Fig. 5 Screw of 3RRR planar parallel robot

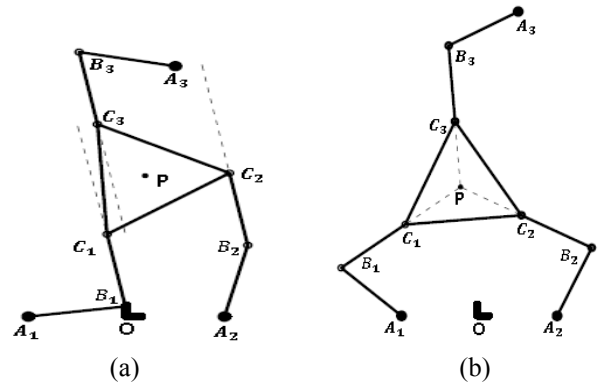


Fig. 6 Direct singularity of 3RRR robot

4.1.2 3RRR 병렬 로봇 특이점 해석

3RRR 병렬 로봇의 특이점은 스크류 선벡터의 방향과  $p_i$ 를 확인함으로써 쉽게 알 수 있다. 먼저 Fig. 6(a)와 같이 모든 스크류 선벡터가 평행하게 되면 자코비안 행렬에서 일차 종속이 되기 때문에  $\det(j)=0$ 가 되고, Fig. 6(b)와 같이 모든 스크류 선벡터가 한 점(P)에서 만나게 되면  $p_i^e=0$ 가 되기 때문에  $\det(j)=0$ 가 되어 정특이점이 발생한다. 그리고 이 자코비안 행렬에서 적

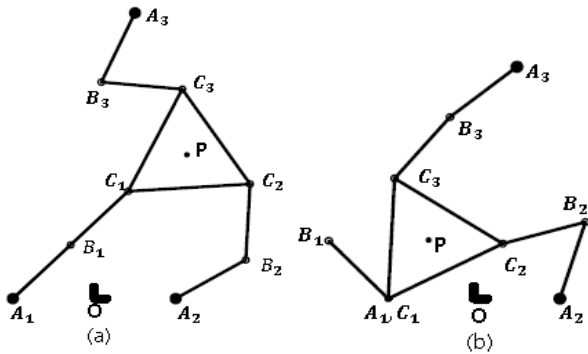


Fig. 7 Inverse singularity of 3RRR roobt

어도 하나의  $p_i$  값이 0이 되면  $\det(j) = \infty$  가 되어 역특이점이 발생한다. 이것의 기하학적인 의미는 링크가 완전히 펼쳐지거나, Fig. 7(a) 접혀지는 형상, Fig. 7(b)이다.

4.2 여유구동 4RRR 병렬로봇 해석

4RRR 병렬 로봇은 3RRR 병렬 로봇에서 1쌍의 링크와 조인트를 추가시킨 여유구동 평면형 병렬 로봇이다.<sup>(13)</sup> Fig. 8은 4RRR 병렬 로봇의 개략도를 나타낸 것이다.  $A_i$ 는 구동조인트 이며  $B_i, C_i$ 는 중동조인트이며  $P_x, P_y, \phi$ 는 끝점위치와 각도이다.  $\alpha_i$ 는 스크류 선벡터  $\$i$ 의 각도이며  $\alpha_i = \theta_i + \theta_{i+4}$ 로 나타낼수 있다.

4.2.1. 자코비안 해석

4RRR 병렬 로봇의 끝점과 구동조인트의 정역학 관계식을 스크류 이론을 사용하면 식 (31)과 같다.

$$\hat{w} = j\lambda \tag{31}$$

여기서,

$$j = \begin{bmatrix} c_{\alpha 1} & c_{\alpha 2} & c_{\alpha 4} & c_{\alpha 5} \\ p_1 & p_2 & p_4 & p_5 \\ s_{\alpha 1} & s_{\alpha 2} & s_{\alpha 4} & s_{\alpha 5} \\ p_1 & p_2 & p_4 & p_5 \\ p_1^e & p_2^e & p_4^e & p_5^e \\ p_1 & p_2 & p_4 & p_5 \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_1^e &= l_t \sin \theta_9, & p_1 &= l_1 \sin \theta_5 \\ p_2^e &= l_t \sin \theta_{10}, & p_2 &= l_2 \sin \theta_6 \\ p_3^e &= l_t \sin \theta_{11}, & p_3 &= l_3 \sin \theta_7 \\ p_4^e &= l_t \sin \theta_{12}, & p_4 &= l_4 \sin \theta_8 \end{aligned}$$

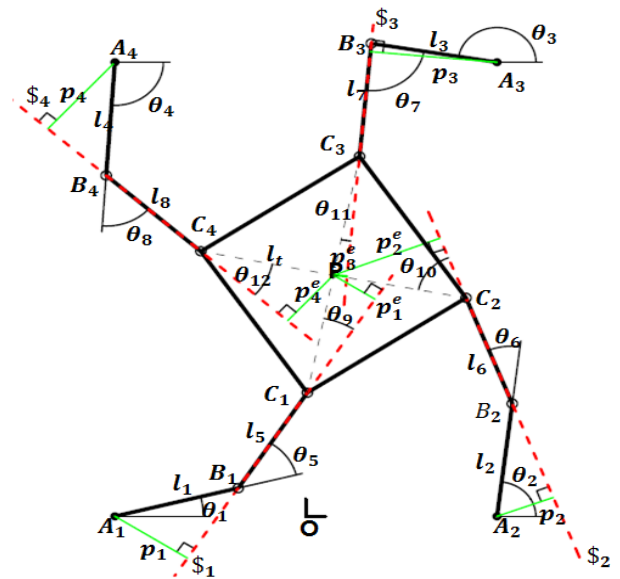


Fig. 8 Screw of 4RRR planar parallel robot

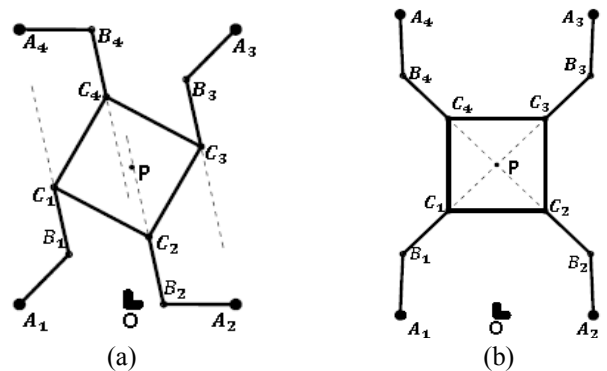


Fig. 9 Direct singularity of 4RRR robot

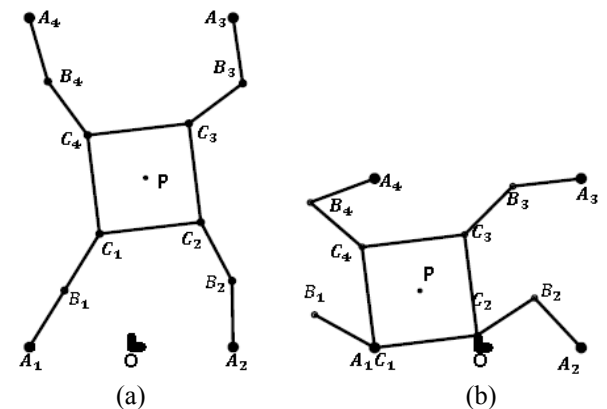


Fig. 10 Inverse singularity of 4RRR robot

4.2.2 특이점 해석

여유구동을 가지는 4RRR 병렬 로봇은 Fig. 9와 같이 모든 스크류의 선벡터가 평행하거나 한 점(P)

에서 만날 때 정특이점이 발생하며, Fig. 10과 같이 적어도하나의  $p_i$ 가 0이 될 때, 한 개의 링크가 펼쳐지거나 접히는 형상의 역특이점이 발생한다.

4.3. 여유구동 6링크 병렬 로봇 해석

6링크 병렬 로봇은 3DOF 여유구동 평면형 병렬 로봇이다.<sup>(14)</sup> Fig. 11은 6링크 병렬 로봇의 개략도를 나타낸 것이다. A,B,E,F는 구동조인트이고 C,D는 종동조인트이며  $P_x, P_y, \phi$ 는 끝점위치와 각도이다.  $\alpha_i \beta_i$ 는 스크류  $\$_i$ 의 각도이며 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta_1 + \theta_2, \\ \alpha_2 &= A \tan 2(l_1 s_1 + l_2 s_{12}, l_1 c_1 + l_2 c_{12}), \\ \alpha_4 &= \theta_4 + \theta_5, \\ \alpha_5 &= A \tan 2(l_4 s_4 + l_5 s_{45}, l_4 c_4 + l_5 c_{45}) \end{aligned}$$

4.3.1 자코비안 해석

6링크 병렬 로봇의 끝점과 구동조인트의 정역학 관계식을 스크류이론을 사용하면 식 (34)와 같다.

$$\hat{w} = j \lambda \tag{34}$$

여기서,

$$j = \begin{bmatrix} \frac{c_{\alpha 1}}{p_1} & \frac{c_{\alpha 2}}{p_2} & \frac{c_{\alpha 4}}{p_4} & \frac{c_{\alpha 5}}{p_5} \\ \frac{s_{\alpha 1}}{p_1} & \frac{s_{\alpha 2}}{p_2} & \frac{s_{\alpha 4}}{p_4} & \frac{s_{\alpha 5}}{p_5} \\ \frac{p_1^c}{p_1} & \frac{p_2^c}{p_2} & \frac{p_4^c}{p_4} & \frac{p_5^c}{p_5} \end{bmatrix}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} p_1^c &= l_3 \sin \theta_3, & p_1 &= l_1 \sin \theta_2 \\ p_2^c &= l_3 \sin(\phi_3 - \alpha_1), & p_2 &= \frac{l_1 l_2 \sin \theta_2}{l_{lc}} \\ p_4^c &= l_6 \sin \theta_6, & p_4 &= l_4 \sin \theta_5 \\ p_5^c &= l_6 \sin(\phi_6 - \alpha_2), & p_5 &= \frac{l_4 l_5 \sin \theta_5}{l_{rc}} \\ l_{lc} &= \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_2} = \overline{AC} \\ l_{rc} &= \sqrt{l_4^2 + l_5^2 + 2l_4 l_5 \cos \theta_5} = \overline{DF} \\ \phi_3 &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \phi_6 &= \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 \end{aligned}$$

4.3.2 특이점 해석

여유구동을 가지는 6링크 병렬 로봇의 정특이

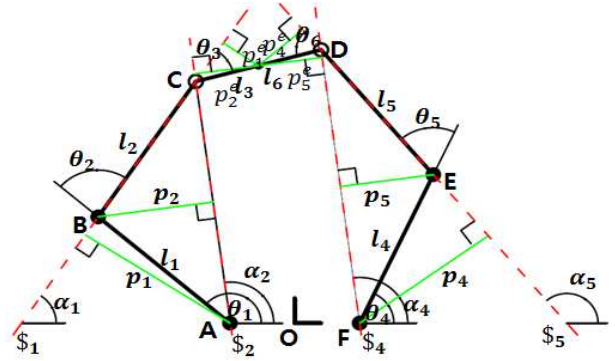


Fig. 11 Screw of 6 link planar parallel robot

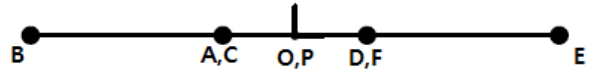


Fig. 12 Direct singularity of 6 link robot

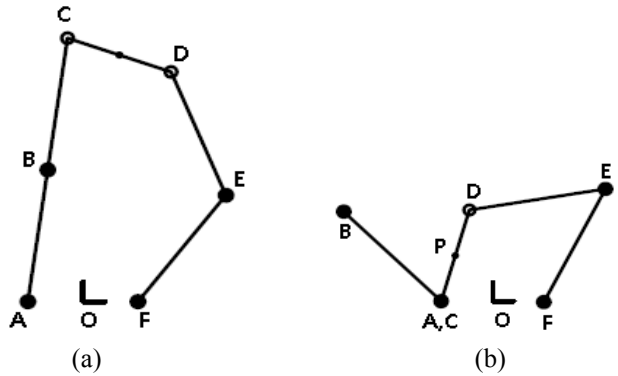


Fig. 13 Inverse singularity of 6link robot

점은 특수한 경우 인데 Fig. 12와 같이 모든 스크류의 선벡터가 한직선위에 있고 끝점(P)에서 만날 때 정특이점이 발생한다. 그리고 역특이점은 Fig. 13과 같이 적어도 한 개의 링크가 펼쳐지거나 접히는 형상이고  $p_i=0$ 가 될 때 발생한다.

5. 결론

기존의 병렬 로봇에서 자코비안과 특이점 해석에서 유도과정이 복잡하였다. 이것은 해석을 수행할 때 병렬 로봇을 직렬 로봇과 같은 방식으로 위치를 미분하여 순간운동학을 구하고 이때 구한 자코비안을 이용하여 기구를 해석함으로써 발생된 문제이다. 병렬 로봇은 직렬 로봇과 달리 정역학 관계식으로 접근해야 자코비안을 쉽게 구할 수 있으며 식의 기하학적인 의미도 쉽게 찾을 수

있다. 뿐만 아니라 모든 스크류 선벡터가 평행하게 되면 자코비안 행렬이 일차 종속이 되거나 한 점에서 만나게 되면  $p_i^c=0$  가 되기 때문에  $\det(j)=0$  가 되어 정특이점이 발생한다. 또한 자코비안 행렬에서 적어도 하나의  $p_i$  값이 0이 되면  $\det(j)=\infty$  가 되어 역특이점이 발생한다. 이것의 기하학적인 의미는 링크가 완전히 펼쳐지거나 접혀지는 형상이다. 이와 같은 사실들은 비 여유구동 로봇에만 적용 가능한 것이 아니라 여유구동 로봇까지 적용할 수 있음을 본 논문을 통하여 알 수 있었다.

### 후 기

이 논문은 2012년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(원자력기술개발사업, No. 2012043785).

### 참고문헌

- (1) Wang, J., Wua1, J., Li, T. and Liu, X., 2008, "Workspace and Singularity Analysis of a 3-DOF Planar Parallel Manipulator with Actuation Redundancy," *Cambridge University Press*, Vol. 27, pp. 51~57.
- (2) Wang, J., 2004, "Kinematic Analysis and Design of Kinematically Redundant Parallel Mechanisms," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 126, pp. 109~118.
- (3) Zarkandi, S., Vafadar, A. and Esmaili, O. R., 2011, "Kinematics, Workspace and Singularity Analysis," *Robotics, Automation and Mechatronics (RAM) IEEE Conference on*, pp. 61~66.
- (4) Ebrahimia, I. and Carretero, J. A., 2007, "3-PRRR Redundant Planar Parallel Manipulator: Inverse Displacement, Workspace and Singularity Analyses," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 42, pp. 1007~1016.
- (5) Octomo, D., 2006, "Direct Kinematics and Analytical Solution to 3RRR Parallel Planar Mechanisms," *Control, Automation, Robotics and Vision, ICARCV '06. 9th International Conference on*, pp. 1~6.
- (6) Cervantes-Sanchez, J. J., 2001, "On the Kinematic Design of the 5R Planar, Symmetric Manipulator," *Mechanism and Machine Theory*, pp. 1301~1313.
- (7) Wu, Y.L., Wu, X.Z., Kuen, Y.Y., Li, Z.X., 2001, "Analysis and Control of Redundant Parallel Manipulators," *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, Vol. 4, pp. 3748~3754.
- (8) Mohamed, M.G., 2005, "Design and Analysis of Kinematically Redundant Parallel Manipulators with Configurable Platforms," *Robotics, IEEE Transactions on*, Vol. 21, pp. 277~287.
- (9) Bonev, I. A. and Gosselin, C. M., 1997, "Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Joints," *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 21, pp. 377~398.
- (10) Degani, A., 2006, "Graphical Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators," *Robotics and Automation, 2006. ICRA 2006. Proceedings 2006 IEEE International Conference on*, pp. 751~756.
- (11) Kumar, M., 2007, "Elimination of Singularities in Parallel Robotic Manipulators," SASTRA University Reg.no-01061.
- (12) Duffy, J., 1996, "Statics and Kinematics with Applications to Robotics," *Cambridge University Press*, pp. 41~152.
- (13) Hong, M. S., 2008, "Kinematical Analysis and Control of 4-RRR Parallel Robot " Department of Mechanical Engineering, Graduate school of Yeungnam University, pp. 4~22.
- (14) Ji, Z., 2003, "Study of Planar Three-Degree-of-Freedom 2-RRR Parallel Manipulators," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 38, pp. 409~416.