한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 3, 565-584, September 2012

중등 영재학생들의 GSP를 활용한 내분삼각형 넓이의 일반화

이헌수[1] · 이광호[2]

본 연구는 내분삼각형 넓이의 일반화에 대한 탐구 과정에서 GSP가 영재학생들의 기하학적 원리와 개념의 이해를 어떻게 돕고, 일반화 과정에서 시각화한 내용을 어떻게 논리적으로 전개하는가에 대하여 탐구하였다. 이를 위하여 M대학교 과학영재교육원 중등수학 심화과정에 있는 학생 4명을 연구 참여자로 선정하여, 학생들이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 삼각형의 넓이와 기존의 삼각형 넓이 사이의 규칙성을 탐구하고 이를 일반화하는 과정에서 수집된 디지털 오디오 녹취물, 학생 활동을 촬영한 비디오 녹화자료와 학생활동지를 서로 연계하여 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다. 첫째, GSP를 활용한 시각화는 수학 영재학생들이 기하학적 원리와 개념을 직관적으로 이해하고 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 주고, 귀납적 추론 능력과 분석적이고 연역적인 추론 능력을 계발하는데 도움을 준다. 둘째, GSP를 활용한 교수・학습은 수학 영재학생들에게 능동적인 탐구활동을 조장하고 수학적인 개념의 확장이나 사고의 확산에 긍정적인 역할을 한다. 셋째, GSP를 활용한 수학영재 교수・학습은 수업에 소극적인 태도를 보인 학생에게 수업에 적극적으로 참여하도록 함으로써 수학에 대한 흥미와 태도, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 수학적 과제 집착력을 발현하게 한다.

주요용어 : 수학영재교육, GSP, 내분삼각형, 삼각형의 넓이

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

21세기 고도의 지식정보화 사회에서의 국가 경쟁력과 사회적 생산성의 가치는 창의적인 지식과 정보에 의해서 이루어지며 창의적인 인적 자원의 양성으로 창출된다. 창의적인 인재 육성과 관련하여 창의성에 대한 중요성이 점차 증대되기 시작하고, 이와 같은 창의적인 인재를 발굴하고 육성하는 것이 국가 교육정책의 시급한 과제로 부각되었다.

최근 각 나라마다 국가경쟁력을 강화하기 위하여 창의적인 인재 육성의 중요성을 강조하

1) 목포대학교 수학교육과 (leehs@mokpo.ac.kr)
2) 한국교원대학교 초등교육과 (paransol@knue.ac.kr), 교신저자

면서 창의성에 대한 국가적 관심이 고조되고 있고, 창의적인 인재를 조기에 발굴하여 그들의 잠재력을 최대한 계발할 수 있도록 다양한 정책 방안을 마련하려고 많은 시간과 노력을 투자하고 있다. 이처럼 각 나라마다 창의적인 우수한 인재를 육성하기 위하여 국가 차원의 창의적인 인재 육성 정책을 수립하고 창의적인 인재 육성 교육의 강화 및 지원을 확대하고 있는 이유는 학생 개인의 자아실현 측면뿐만 아니라 국가가 필요로 하는 창의적인 인재 육성을 통하여 국가경쟁력을 향상시킨다는 측면에서도 매우 중요한 의미를 가지고 있기 때문이다. 우리나라의 경우, 2009년에 개정된 수학과 교육과정에서도 수학적 창의성 신장을 강조하고 있다. 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다(황혜정 외, 2012). 황혜정 외(2012)에 의하면, 여기서 말하는 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다. 이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선적으로 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행사는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다(황혜정 외, 2012). 2009 개정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 보고 있다.

시대가 변화하고 사회가 발전해 감에 따라서 수학교육에서 가르쳐야 하는 교육의 내용과 방법도 변화하고 있다. 20세기 말부터 시작된 기술문명의 비약적인 발전은 수학교육에서 테크놀로지 도입의 필요성을 요구하게 되었고, 수학교육에서 그래픽 능력과 계산 능력을 가진 테크놀로지의 도입은 수학의 교수학습 방법과 본질뿐만 아니라 수학적인 내용에서 변화를 유도하고 있다. 기술 문명의 급속한 발달은 칠판과 분필, 자와 컴퍼스를 활용한 고전적인 수업환경을 계산기, 컴퓨터, 컴퓨터 소프트웨어 등과 같은 테크놀로지를 활용한 수업환경으로의 변화를 가져왔고, 컴퓨터의 탁월한 기능과 능력은 교수 · 학습의 방법을 현저하게 변화시키고, 수학적 내용도 긍정적인 변화를 가져왔다. 미래의 수학 교실은 학생들이 첨단 테크놀로지를 이용하여 복잡한 수학적 활동을 통하여 생산적이고 반성적으로 사고하게 된다(NCTM, 2000). 테크놀로지의 강조와 탁월한 기능은 교수 · 학습의 방법적인 측면을 변화시키고, 수학 내용을 이해하는데 있어 긍정적인 변화에 일조하고 있다. 수학교육에서의 테크놀로지를 활용한 교수 · 학습 방법은 학생들에게 학습에 능동적으로 참여할 수 있는 기회를 제공하고, 교사의 일방적 강의 방식이 아닌 학생들의 자기주도적인 탐구 · 발견 학습을 가능하게 하여 학습의 효과를 높일 수 있는 교수 · 학습 방법이라고 할 수 있다.

따라서, 본 연구는 중등 수학 영재학생들이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 삼각형의 넓이와 기존의 삼각형 넓이 사이의 규칙성을 탐구하고 이를 일반화하는 과정에서 GSP가 학생들에게 미치는 영향에 대한 사례연구를 통하여 수학 영재교육에서의 테크놀로지 활용에 대한 효과를 탐구하고자 한다.

2. 연구문제

본 연구는 중등 수학 영재학생들이 GSP를 이용하여 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 삼각형의 넓이와 기존의 삼각형 넓이 사이의 규칙성을 탐구하고 이를 일반화하는 과정에서 다음과 같은 문제를 연구하고자 한다.

(1) GSP를 활용한 시각화가 학생들의 수학적 창의성의 발현에 어떻게 도움을 주는가?
(2) GSP를 활용한 시각화가 학생들의 대수화 과정과 논리적 전개 과정에 어떠한 도움을 주는가?

3. 연구의 제한점

본 연구는 중소도시 소재의 대학 부설 과학영재교육원에 소속되어 있는 소수의 학생을 대상으로 한 사례연구이므로 대도시나 다수의 학생들에게 일반화하기에는 한계가 존재할 수 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학 영재성과 수학 창의성

수학 영재성과 수학적 능력을 구성하는 요인으로 수학 창의성이 강조되고 있다. 수학 창의성은 수학 영재성을 구성하는 중요한 요인으로 창의적으로 수학 문제를 발견하고, 이해하고, 해결하는 능력으로 수학적 능력을 구성하는 중요한 능력이라고 할 수 있다. 김홍원・김명숙・송상헌(1996)은 수학 영재성의 구성요소로 수학적 사고능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식으로 구분하였다. 수학적 사고능력은 수학적 문제를 이해하고 해결하는데 기본적으로 요구되는 사고 능력을 의미하며 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적・연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력 등의 하위 능력들이 포함된다. 수학적 과제 집착력은 일정 시간동안 끈기 있게 수학 문제에 몰두하는 능력으로, 수학에 대한 흥미와 태도, 인내심, 지속성, 집중성, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 요소이다. 수학적 창의성은 수학적 문제를 창의적으로 해결하는 능력으로 유창성, 융통성, 독창성, 정교성의 능력들이 포함된다. 그리고 배경 지식은 수학 문제를 해결하는데 필요한 수학적 지식과 다른 영역의 지식을 의미한다. 지식에는 사실적 지식과 절차적 지식이 포함된다. 일반적으로 배경 지식은 수학적 지식을 의미한다.

황동주(2006)는 수학영재 행동특성과 관련된 문헌 연구를 통하여 일반적인 수학정신능력, 수학적 능력, 정보수집과 처리능력, 수학적 성향으로 구분하였다. 황동주에 의하면 일반적인 수학정신능력에는 이해와 적용능력, 추론능력, 속도와 능숙한 과정, 흥미와 소질; 수학적 능력에는 직관적 통찰능력, 정보의 조직화 능력, 추상화 능력, 공간화/시각화 능력, 일반화 /적용 능력; 수학 창의성; 수학적 성향에는 의사소통능력, 과제집착력과 동기, 독립성, 수학과

연결성 등이 포함된다고 하였다. 김부윤 · 이지성(2006)은 수학적 창의성의 구성요소로 확산성, 논리성, 적극성, 독자성, 집중성, 수렴성, 정밀성의 7가지 하위 요소로 구분하였고, 신희영 · 고은성 · 이경화 (2007)와 이강섭 · 심상길 (2007)은 수학적 창의성의 구성요소를 독창성, 유창성, 융통성, 정교성의 인지적인 요소로 구분한 반면, 김부윤 · 이지성(2006)은 이러한 인지적인 요소 외에 강한 의지, 의욕이나 과제에 대한 열중을 지속하는 태도 등과 같은 정의적인 측면을 포함하고 있다. 홍진곤 · 강은주(2009)는 문헌 연구와 실험관찰을 통하여 수학영재는 직관적 · 구조적 통찰 능력, 정보처리 과정, 패턴을 일반화하는 능력, 문제해결과정에서의 논리성, 형식 연역 추론을 포함한 추상화 능력, 독창적이고 발산적 사고 능력, 수학적 심미성 등의 인지적 특성을 지닌다고 하였다.

Weaver와 Brawley(1959)는 수학적 능력의 구성요소를 수량과 주변 사물의 수량적인 면에 대한 민감성, 호기심, 신속한 지각, 이해, 처리 능력 그리고 수량과 수량적 자료를 추상적이고 상징적으로 처리하는 능력, 수학적 형태, 구조, 상호관계를 지각하는 능력, 수량적인 상황을 고정된 방식이 아니라 통찰, 상상, 창의성, 독창성, 자기주도성, 독립성, 집중성 및 끈기를 가지고 융통성 있게 생각하고 수행하는 능력, 분석적 · 연역적 추론 능력, 귀납적 추론 능력 등으로 제시하였다. Krutetskii(1976)는 수학적 능력을 학교에서 수학 교과를 학습하여 해당 지식과 기능을 익히는 능력인 학교 수학 능력과 사회적 가치를 지니는 독창적인 산출물을 창조해 내는 능력이자 학문으로서의 수학을 하는 능력인 창의적 수학 능력을 구분하였다. Krutetskii에 의하면 평범한 아동들은 문제를 분석하고 종합하는 과정에 들어가서야 비로소 연관성을 찾으려고 하는 분석-종합적인 절차를 찾으려는 반면, 수학적 능력이 뛰어난 영재아들은 문제의 구조를 파악하여 신속하고도 단축된 사고를 하는 분석-종합적인 통찰을 사용하여 곧바로 문제를 복합된 전체로 파악한다고 하였다.

NCTM(1987)은 수학영재들이 가지고 있을 수 있는 행동 특성을 크게 일반적 행동 특성, 학습 행동 특성, 창의적 행동 특성, 수학적 행동 특성으로 구분하였는데, 그 중 수학적 행동 특성으로 수에 대한 조기의 호기심과 이해, 수와 공간적 관계에 대한 논리적이고 상징적인 사고 능력, 수학적 패턴, 구조, 관계와 연산에 대한 지각과 일반화 능력, 분석적, 귀납적 · 연역적으로 추론하는 능력, 수학적 기호, 관계, 증명, 풀이 방법 등을 기억하는 능력, 수학적 문제를 풀이하는 데 있어서의 활동력과 지속성 등의 특성을 지닌다고 하였다.

2. 테크놀로지를 활용한 수학 영재교육

NCTM(1991)은 수학 교사들에게 수학을 가르침에 있어 계산기, 컴퓨터, 그리고 다른 종류의 테크놀로지를 교육 내용에 알맞게 적절히 도입하여 교육의 효과를 높일 것을 강조하고 있다. 컴퓨터의 다양한 기능은 추상적인 수학 내용을 시각화하여 지도할 수 있을 뿐만 아니라 그 시각화가 학생들의 직접적인 경험이나 통제를 통해 이루어 질 수 있다는 점에서 수학 학습의 어려움을 완화시켜 준다. 특히 형식적인 증명이나 개념학습의 전 단계에서 그래픽이나, 애니메이션, 시뮬레이션 등을 통한 직관적인 탐구 활동은 수학의 역동적이고 발생적인 측면을 부각시킬 수 있다.

수학적 사실을 발견하고 창조하기까지의 과정은 귀납이고, 일단 찾아진 사실을 증명하는 과정은 연역이다. 이와 같은 사실은 기하 교육에 시사하는 바가 크다고 할 수 있다. 기하 교육은 평면이나 공간에서 기하학적인 도형의 기본적인 사실에 대한 이해 이상으로, 연역적

추론 방법에 대한 이해와 나아가 창조적으로 사고하고 스스로 생각하는 능력에 초점을 두어야 한다. 연역적 추론을 지도하는데 있어 기하만큼 효과적인 영역은 없다고 할 수 있으며, 대수와 달리 다양한 해결 방법이 존재하는 기하 문제는 사고력을 신장시키는 좋은 소재가 될 수 있다.

기하의 주된 목적은 학생들의 기하학적 직관을 키우고 논리적인 추론 능력을 향상시키는데 있다. 이것을 위해서는 연역적 증명 활동만으로는 부족하며, 탐구하며 추측하며 가설을 설정하는 비형식적 활동도 중요하다. 그러나 우리나라 기하 교육의 문제점은 수업 시간에 연역적 추론을 할 수 있는 충분한 시간이 학생들에게 제공되지 못함으로써 증명 교육의 목적인 수학적 사고, 즉 의미 있는 논리적 추론을 경험할 수 있는 기회가 적고(나귀수, 1998), 학생들의 사고력을 증진시키기보다는 학생들의 수준에 비해 지나치게 엄밀한 논증기하를 가르치는데 편중되어 있어, 학생들은 그 증명과정을 이해하는 것조차 어려워하고 있는 실정이다(이금주, 2007).

학교 수학에서 증명학습은 학생들이 논리적이고 체계적으로 사고하도록 하는데 중요한 역할을 한다. NCTM(1989)은 모든 학생들을 위한 중요한 수학적 소양의 하나로서 수학적 추론 능력을 제시하고 학교 수학의 모든 분야에서 추론을 보다 강조할 것을 요구하였고 또한, NCTM(2000)은 증명과 추론 학습과정에서 학생들의 탐구 및 추측 활동을 강조하였다. 이런 관점에서 증명에 대한 지도는 형식적인 증명 절차에만 중점을 두기보다는 학생들의 직관이나 귀납적 접근을 통한 탐구 과정 또한 중요시 여겨야 한다.

Simon과 Blum(1996)은 학생들의 증명에 대한 이해는 귀납적 방식에서 연역적 방식으로 발전한다고 주장하였고, 나귀수(1998)는 학교 수학에서 증명은 단지 형식적이고 연역적인 정당화 과정만을 의미하는 것이 아니라 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등 여러 측면이 통합되어진 과정으로 제시되어야 한다고 제안하였다. 이는 학생들의 연역적 증명에 대한 이해를 돕기 위해서는 교사는 학생들의 귀납적 탐구과정이 활발하게 일어날 수 있는 학습 환경을 제공해야 한다고 볼 수 있다.

테크놀로지를 이용한 증명 학습의 긍정적인 견해로 Schoenfeld(1988)는 테크놀로지를 이용하여 학생들이 연역적 실험과 경험적 실험 사이에 연결을 만들 수 있고, 경험적으로 가설을 실험하여 자신이 행한 것을 발견하고 증명한 것에 대해서 사고할 수 있게 된다고 하였고, 신동선・류희찬(1999)은 컴퓨터를 이용한 시각화는 수학적 지식의 의미를 눈으로 확인시킬 수 있어 수학적 개념을 보다 근본적으로 이해시킬 수 있고, 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 학생들에게 연역적인 증명의 필요성을 인식하는데 긍정적인 역할을 할 수 있다고 하였다. 또한, GSP와 같은 역동적인 기하 소프트웨어가 학생들의 직관과 경험적 정당화 활동을 풍부하게 만들어 학생들의 증명학습에 긍정적인 영향을 끼친다고 주장하였다(류희찬・조완영, 1999; Scher, 1996; Edwards, 1997; Galindo, 1998; Marrades & Gutie′rrez, 2000). NCTM(1989, 2000)은 학생들의 추론 및 증명 활동에 역동적인 기하 소프트웨어와 같은 테크놀로지의 사용을 적극 권장하고 있다. 증명과정에서 GSP의 사용은 증명 과제에 대한 시각적 표현을 가능하게 하여 학생들의 귀납적 탐구활동을 용이하게 하고, 또한 학생들의 추론에 대한 즉각적인 피드백을 제공함으로써 학생들의 증명학습을 도울 수 있다(신유경・강윤수・정인철, 2008; Marrades & Gutie′rrez, 2000). 비록 소프트웨어의 사용은 학생들에게 직접적으로 형식적인 연역적 증명과정을 제시하지는 못하지만, 수학적 아이디어에 대한 추측과 확인의 기회를 제공하여 학생들의 증명학습을 돕는데 기여할 수 있다(Scher, 1996). 그리고 증명과정에서 GSP의 활용은 학생들에게 다양한 사례를 검증하여 일반화를 시도하는데

도움을 주고(신유경 외, 2008; 이헌수 · 박종률 · 정인철, 2009), 능동적으로 증명에 필요한 아이디어를 탐구하는 습관을 키우는데 긍정적인 역할을 한다(한동승 · 조지연, 2003; 신유경 외, 2008).

그러나 Chanzan(1993)과 신유경 외(2008)는 증명 학습에서 역동적인 기하 소프트웨어의 사용이 오히려 연역적 증명의 역할이나 필요성을 약화시키는 결과를 초래할 수 있다고 주장하였다. 즉, 소프트웨어의 측정, 변환, 드래그(drag) 기능을 통한 다양한 귀납적 추론 및 탐구활동이 학생들의 경험적 정당화에 대한 의존도를 높여 연역적 증명의 필요성에 대한 인식을 저해할 수 있다는 것이다. 또한, 테크놀로지 탐구 수업에서 탐구 방법에 대한 지식 부족에서 학생들이 어려움을 겪을 수 있다. 한혜숙 · 신현성(2008)은 컴퓨터 사용 그 자체를 좋아하지 않거나, 소프트웨어의 사용법을 익히는데 많은 어려움을 느끼는 학생들에게 그 소프트웨어의 사용은 오히려 학습에 방해가 될 수 있다고 지적하면서 교사의 적절한 발문 및 잘 구성되어진 학습 과제를 제시하는 등의 교사의 역할이 오히려 더 중요하다고 하였다.

학생들을 위한 교육과정은 단순히 단편적인 지식을 습득하게 하는 것이 아니라, 어떤 주제를 중심으로 다양한 활동을 함으로써 그 주제에 관하여 깊이 있게 이해하고, 문제 해결에서 특정 사고 과정을 직접 적용할 수 있는 기회를 제공해 주도록 구성되어야 한다. 또한 교수 · 학습에서 학습의 초점은 주로 질문과 문제에 두고, 이미 학습한 것을 토대로 주어진 문제를 분석하고 검토 · 비판하는데 초점을 두어 정보의 습득보다는 사고기술 및 사고과정을 강조하는 학습활동을 전개하도록 구성하여야 한다. 이때 교사는 직접적인 감독보다는 보조자로서 아동들의 학습에 자극과 도전을 주어 학생들이 진리 탐구에 대하여 흥미를 갖도록 하는 역할을 수행하여야 한다. 학생들은 교사가 일방적으로 강의하는 학습보다는 창의적 사고와 논리적 사고의 학습, 자기주도적 학습, 발견식 · 탐구식 학습 등의 학습활동을 선호한다.

이러한 관점에서 볼 때, 수학 교육에서 GSP와 같은 테크놀로지를 활용한 교수 · 학습 방법은 학생들에게 학습에 능동적으로 참여할 수 있는 기회를 제공하고, 교사의 일방적 강의 방식이 아닌 학생들의 자기주도적인 탐구 · 발견식 학습을 가능하게 하여 학습의 효과를 높일 수 있는 학습방법이라 할 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

수학 영재학생들의 내분삼각형의 일반화 탐구 과정에서 GSP를 활용한 시각화, 추론, 대수화와 논리적 탐구 과정을 연구하기 위하여 M대학교 과학영재교육원 중등 심화수학 과정에 있는 중학교 2학년 학생 13명을 대상으로 수업을 진행하였다. 이중 학생 A, B, C, D 4명을 선택하여 집중적으로 관찰하여 사례연구를 수행하였다. 연구 대상에 포함된 학생들 모두 연구자가 실시한 이전의 몇 차례 수업에서의 수업행동을 관찰한 결과 남들보다 월등히 특별하거나 뚜렷하게 영재성을 발현하지 못한 학생들이었다. 특히 GSP를 활용한 수학영재 교수 · 학습을 하기 전 몇 차례 수업시간에 나타난 행동에서 학생 C는 수업 중 주의가 산만하여 수업에 집중을 잘 하지 못하는 학생이었고, 학생 D는 수업에 능동적으로 참여하지 못하고

소극적인 수업 활동 모습을 보였고, 수업 중 질문의 답변 등에서 자신의 답에 대한 확신이 없어 자신감이 결여된 모습을 보인 학생이었다.

2. 연구 방법

본 연구는 중등 수학 영재학생들이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 삼각형의 넓이와 기존의 삼각형의 넓이 사이의 규칙성을 탐구하고 이를 일반화하는 과정에서 GSP가 학생들에게 미치는 영향에 대하여 분석하기 위하여 정성적 사례 연구 방법을 사용하였다.

1) 관찰

(1) 참여 관찰

테크놀로지를 활용한 모든 수업 과정을 고정된 디지털 비디오카메라를 이용하여 전체적으로 녹화하였고, 또 다른 디지털 비디오카메라를 이용하여 학생들의 개인별 수업 상황을 집중적으로 녹화하였다. 수업중 학생들 간의 의사소통 및 연구자와 학생들 간의 의사소통은 디지털 녹음기를 이용하여 녹음하였다. 연구자는 학생들의 탐구 학습시 학생들이 GSP의 작도 과정에서 도움을 요청하는 경우에만 개입하였고, 개입하는 경우에 가급적 객관적인 입장을 유지하려고 노력하였다.

(2) 비디오 관찰

테크놀로지를 이용하여 주어진 과제를 해결하는 과정에서 전체적으로 나타나는 학생들의 행동 및 반응을 분석하기 위하여 고정용 디지털 비디오 카메라에 녹화된 자료를 관찰하였다. 그리고 학생들이 주어진 과제를 GSP를 활용하여 시각화하는 과정과 시각화한 자료를 어떻게 활용하는가에 대해 심층적으로 분석하기 위하여 이동형 디지털 비디오 카메라에 녹화된 자료를 관찰하였다.

1) 인터뷰

학생들은 주어진 과제에 대해 GSP를 이용한 시각화, 시각화한 자료를 활용한 추론, 대수화, 일반화 과정을 학생 활동지에 기록하였다. 연구자는 탐구 과정과 활동지 기록 등을 관찰하면서 정확히 파악할 수 없는 그림이나 식, 서술된 내용과 학생들의 탐구학습에 대한 이해나 흥미 등을 정확하게 파악하기 위하여 개별적인 인터뷰를 실시하였고 때에 따라서는 집단적인 인터뷰를 실시하였다.

2) 산출물 분석

학생들의 산출물은 GSP를 이용한 시각화 자료와 학생들이 탐구 학습시 기록한 학생 활동지로 구분할 수 있다. GSP를 이용한 시각화 자료는 학생들이 주어진 문제를 어떻게 시각화 하는가에 대한 학습자의 성취를 정확하게 파악하기 어려웠기 때문에 발견할 수 있는 특성이 매우 한정적이었다. 학생 활동지에서는 시각화 자료에서 정확히 파악할 수 없는 대수화 과정과 일반화 과정에서 나타난 특징 등을 분석하였다.

3. 자료의 수집

사례연구의 자료로는 학생들이 테크놀로지를 활용한 탐구 활동을 관찰 한 관찰 자료, 탐구 활동에 참여한 학생들의 면담 자료, 탐구 활동 수행의 결과물인 학생 활동지와 테크놀로지를 이용하여 시각화한 시각화 자료 등을 수집하였다.

1). 관찰 자료

테크놀로지를 활용한 모든 수업 과정을 고정된 디지털 비디오카메라를 이용하여 전체적으로 녹화하였고, 또 다른 디지털 비디오카메라를 이용하여 학생들의 개인별 수업 상황을 집중적으로 녹화하였다. 또한, 수업 중 연구자와 학생, 학생들 상호간의 의사 소통시 이를 명확하게 파악하기 위하여 연구자는 수업 중에 학생들 간의 의사소통 및 연구자와 학생들 간의 의사소통을 디지털 녹음기를 이용하여 녹음하였다.

2) 면담 자료

학생들은 주어진 과제에 대해 GSP를 활용한 활동자료, 시각화한 자료를 활용하여 추론 및 대수화 과정, 일반화 과정을 학생 활동지에 기록하였다. 연구자는 탐구 과정과 활동지 기록 등을 관찰하면서 정확히 파악할 수 없는 그래프나 식, 서술된 내용과 학생들의 탐구학습에 대한 이해나 흥미 등을 정확하게 파악하기 위하여 개별적인 면담을 실시하였다.

3) 문서 자료

본 연구에서 수집한 문서 자료는 학생들이 GSP를 활용하여 탐구활동을 진행하면서 작성한 탐구활동지 및 GSP를 이용하여 컴퓨터의 모니터에 시각화한 자료 등이다.

4. 자료의 분석

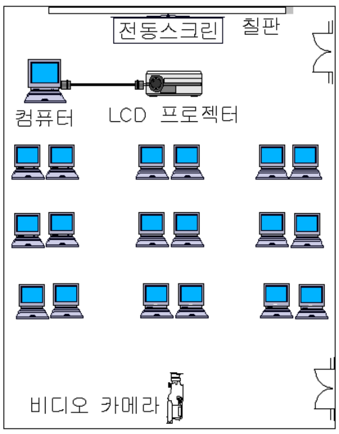
GSP를 활용한 탐구 활동의 전체 진행 상황을 고정된 한 대의 디지털 비디오 카메라를 이용하여 녹화하였고, 학생들이 주어진 과제를 해결하는 과정에서의 행동 및 반응, 시각화를 통한 대수화 과정 등을 이동형 디지털 비디오 카메라로 촬영하였다. 또한 탐구 활동의 전체 진행 상황과 학생들의 개별 면담을 녹음기를 이용하여 녹음하였다. 학생들의 산출물은 GSP를 활용한 탐구학습 자료와 학생들이 탐구 학습시 기록한 학생 활동지로 구분할 수 있다. GSP를 이용한 탐구학습 자료는 학생들이 주어진 문제를 해결하기 위하여 GSP를 올바르고

적절하게 사용하였는지에 대한 분석 자료로 활용하였다. GSP를 이용한 시각화 자료는 학생들이 주어진 문제를 어떻게 시각화하는가에 대한 학습자의 성취를 정확하게 파악하기 어려웠기 때문에 발견할 수 있는 특성이 매우 한정적이었다. 학생 활동지에서는 시각화 자료에서 정확히 파악할 수 없는 대수화 과정과 증명에서 나타난 특징 등을 분석하였다.

수업의 전 진행 상황을 녹화한 녹화자료 및 인터뷰, 산출물과 수업의 문제점 분석 등을 정성적 접근법을 사용하여 분석하였다. 녹화자료 및 녹음 자료 그리고 인터뷰 자료는 모두 전사를 하였으며 그 내용을 바탕으로 의미를 찾아내는 현상학적 접근 방법(Patton, 2002)으로 자료를 분석하였다.

5. 연구 현장의 구성

GSP를 활용한 탐구 학습에서의 연구 현장은 GSP의 조작에 익숙하지 못한 학생이 쉽게 따라할 수 있도록 LCD 프로젝트를 컴퓨터에 연결하여 컴퓨터 모니터에 나타난 화면을 강의실 전면에 있는 스크린에 나타나도록 구성하였다. 그리고 학생들의 모든 수업 과정 및 수업시 학생들의 행동 등의 자료를 수집하기 위하여 [그림 Ⅲ-1]과 같이 강의실 뒤편에 한 대의 디지털 비디오 카메라를 고정하여 설치하였다. 또한, 중등심화수학 과정에 있는 중학교 2학년 학생 13명 중 연구 대상자로 선정된 학생 4명을 연구자가 집중적으로 관찰하기 위하여 제일 앞자리에 배치하였고, 개개인의 GSP의 조작이나 수업 상황 등을 정밀히 관찰하기 위하여 연구보조자가 또 다른 이동식 디지털 비디오카메라로 학생들의 실험 장면을 집중적으로 촬영하였다.

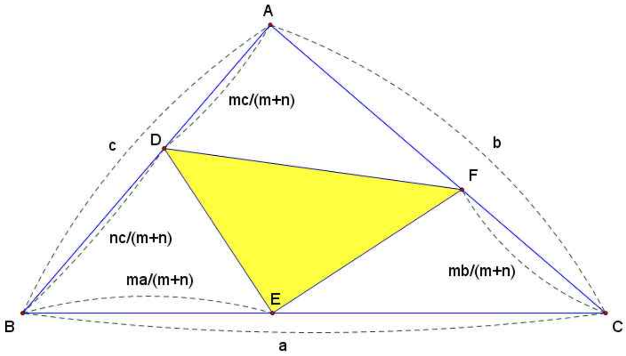


[그림 Ⅲ-1] 연구 현장의 구성

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

중등 수학 영재학생들이 GSP를 활용하여 임의의 삼각형 ABC의 각 변을 $m:n$으로 내분한 점 D, E, F를 연결하여 만든 내분삼각형 DEF의 넓이를 일반화하였다. 그 과정에서

GSP를 활용한 시각화를 통하여 수학적으로 추론하고 대수화하며 논리적으로 전개하는 과정에서 수학 영재학생들이 기하학적 원리와 개념을 이해하는데 GSP를 활용한 시각화의 효과와 탐구 과정에서 시각화한 내용을 어떻게 대수화하고 논리적으로 전개하는지 알아보았다.

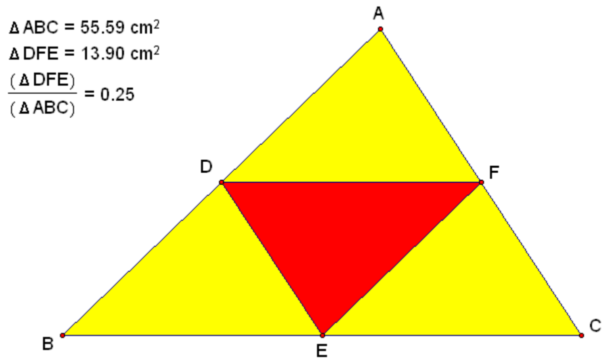


[그림 Ⅳ-1] 삼각형 ABC의 각 변을 $m:n$으로 내분하여 만든 내분삼각형 DEF

1. GSP를 활용한 시각화가 수학 영재학생들의 창의성의 발현에 어떻게 도움을 주는가?

(1) GSP를 활용한 시각화는 수학 영재학생들이 기하학적 원리와 개념을 직관적으로 이해하고 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 주고, 귀납적 추론 능력과 분석적이고 연역적으로 추론하는 능력을 계발하는데 도움을 주었다.

학생들은 삼각형의 각 변을 1:1로 내분한 삼각형의 내분점을 연결하여 만든 내분삼각형의 넓이의 비를 관찰하기 위하여 [그림 Ⅳ-2]와 같이 $\triangle ABC$와 $\triangle ABC$를 1:1로 내분하여 만든 내분삼각형 $\triangle DEF$를 작도 하였다. 그들은 GSP의 측정 메뉴를 사용하여 각각의 넓이를 측정한 후 두 삼각형의 비를 계산 하였다.



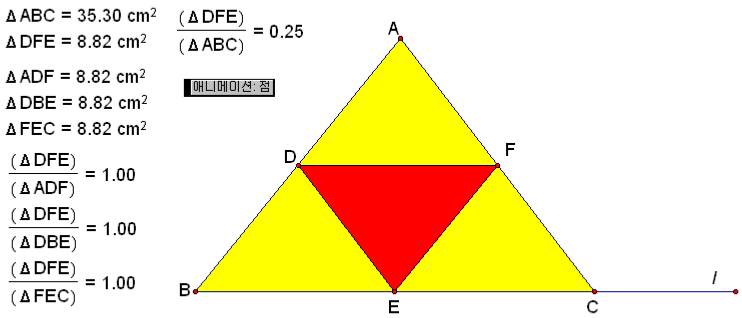
[그림 Ⅳ-2] 각 변을 1:1로 내분한 삼각형

$\triangle ABC$의 넓이와 $\triangle ABC$의 각 변을 1:1로 내분하여 만든 $\triangle DEF$ 넓이의 비에 대한 학생의 생각을 알아보고자 인터뷰를 한 내용을 보면 다음과 같다.

연구자 : $\triangle ABC$의 넓이와 $\triangle ABC$의 각 변을 1:1로 내분하여 만든 $\triangle DEF$ 넓이는 각각 얼마이고, 두 삼각형의 넓이의 비는 얼마입니까?
학생A : $\triangle DEF$ 넓이는 16.33㎠이고 $\triangle ABC$의 넓이는 65.34㎠이고 넓이의 비는 1:4가 나와요.
연구자 : 그럼 $\triangle ABC$의 모양이 변하면 두 삼각형의 넓이의 비는 어떻게 되나요?
학생A : 두 삼각형의 면적이 변해도 넓이의 비는 일정하게 1:4가 나와요.
연구자 : 모양이 변하더라도 두 삼각형의 넓이의 비가 일정한데 왜 그럴까요?
학생A : 한 눈으로 봐도 두 삼각형이 닮은 삼각형이라는 것을 알 수 있잖아요
연구자 : 왜?
학생A : $\triangle DEF$는 $\triangle ABC$의 중점을 연결하여 만든 삼각형이니까 두 삼각형은 닮음비가 1:2인 닮은 삼각형으로 두 삼각형의 넓이의 비는 1:4로 일정해요.

위의 인터뷰 내용 중 학생 A와의 대화에서 보듯이 GSP를 활용한 시각화 자료를 통하여 학생 A는 중점 연결 정리를 이용하여 직관적으로 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 닮은 삼각형이라는 것을 인식하였으며 측정 메뉴를 통해 얻은 결과로 대응하는 두 변의 길이의 비가 2:1이고 넓이의 비가 4:1로 일정함을 확인할 수 있었다. 또한 GSP의 드래그 기능을 이용하여 삼각형이 어떠한 모양으로 변하더라도 두 삼각형의 넓이의 비는 항상 일정하다는 사실을 귀납적으로 확인할 수 있었다.

$\triangle ABC$와 $\triangle DEF$에서 각 변의 길이가 변할 때 두 삼각형의 넓이의 비가 어떻게 변하는지 알아보기 위하여 선분 l 위의 한 점 C에 애니메이션 기능을 주어 점 C가 선분 l 상에서 좌우로 움직일 때 각 삼각형의 넓이의 비가 어떻게 변하는지 관찰하게 하였다(그림 Ⅳ-3).



[그림 Ⅳ-3] $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 변화

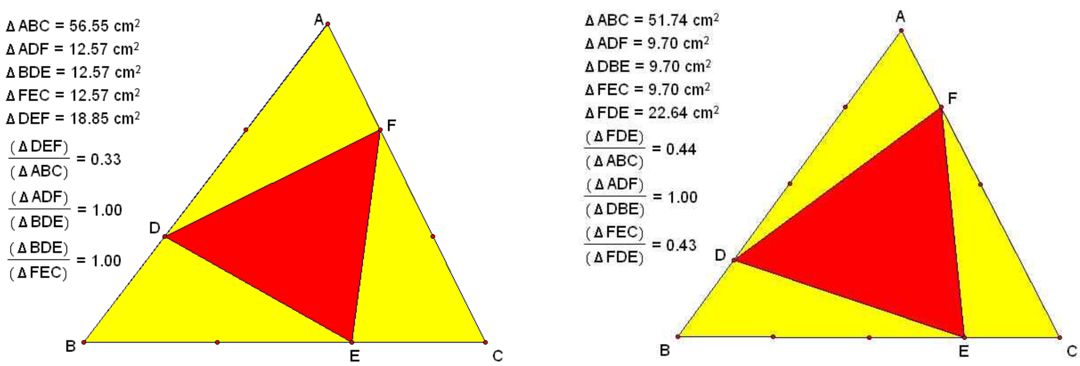
다음은 관찰 결과에 대한 학생 B와의 인터뷰 내용이다.

연구자 : $\triangle ABC$의 한 꼭짓점 C가 선분 l 상에서 좌우로 움직여 $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 길이가 변할 때 일 때 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 길이의 비는 어떻게 되나요?
학생 B : 두 삼각형의 넓이의 비가 같아요.

연구자 : 이 사실을 통해 우리는 무엇을 알 수 있나요?
학생 B : $\triangle ABC$의 각 변의 길이가 변하더라도 $\triangle ABC$와 이 삼각형을 1:1로 내분한 삼각형 $\triangle DEF$의 넓이의 비는 항상 일정하게 4:1로 나타남을 알 수 있어요.

학생 B는 GSP를 이용한 시각화를 이용하여 $\triangle ABC$의 각 변의 길이가 변하더라도 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 값은 항상 일정함을 확인할 수 있었고, 이를 통하여 내분삼각형의 넓이의 비에 대한 원리와 개념을 쉽게 이해할 수 있었다. 이처럼 GSP를 이용한 시각화는 수학 영재학생들에게 기하학적 원리와 개념을 이해하고 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 도움을 준다는 것을 확인할 수 있었다.

다음은 GSP를 활용한 시각화와 측정 기능이 학생들에게 기하학적 원리와 개념을 쉽게 이해할 수 있게 하고 일반화하는데 도움을 주는 또 다른 사례이다. $\triangle ABC$의 각 변을 1:1, 2:1, 3:1, 3:2, 4:1, 5:1 5:2로 내분한 점을 연결하여 만든 내분삼각형 $\triangle DEF$를 작도하게 한 후 [그림 Ⅳ-4]와 같이 측정 메뉴를 이용하여 각 삼각형들의 넓이와 각 삼각형들의 넓이의 비를 구하게 하였다. 그 다음 $\triangle ABC$의 모양이 변할 때 측정값의 비가 어떻게 변하는지 관찰하게 하였다. 그 결과, GSP를 활용한 시각화와 측정 기능은 수학 영재학생들에게 다양한 사례를 검증하여 일반화하는데 귀납적으로 생각하고 추론하는 능력과 분석적이고 연역적으로 생각하고 추론하는 능력에 도움을 준다는 사실을 확인할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-4] $\triangle ABC$의 각 변을 2:1과 3:1로 내분한 삼각형의 넓이의 비

다음은 관찰 결과에 대한 학생 A와의 인터뷰 내용이다.

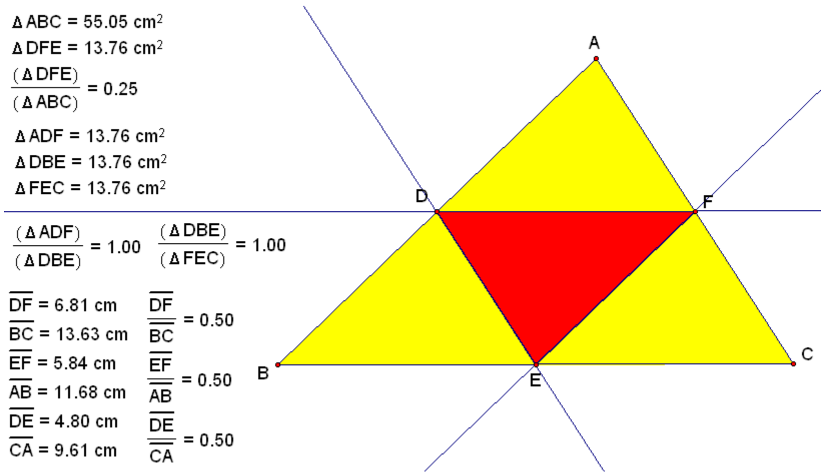
연구자 : $\triangle ABC$의 각 변의 길이가 변할 때 $\triangle ADF$, $\triangle BDE$와 $\triangle CEF$의 넓이는 어떻게 되나요?
학생 A : 세 변의 길이를 변화시키더라도 세 삼각형의 넓이가 모두 같아요.
연구자 : 이 사실을 통해 우리는 무엇을 알 수 있나요?
학생 A : $\triangle ADF$ 넓이의 3배한 것에다 $\triangle DEF$의 넓이를 더하면 $\triangle ABC$의 넓이와 같다는 것을 알 수 있어요.
연구자 : $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비를 구할 때 이러한 사실을 어떻게 적용할 수 있나요?
학생 A : 넓이의 비를 구할 때 세 삼각형의 넓이를 모두 구할게 아니라 $\triangle ADF$의 넓이를 구한 다음에 이 값에 3배만 해 줘도 되요.

김홍원 외(1996)는 수학 영재성의 구성요소인 수학적 사고능력에 귀납적·연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력과 일반화 능력이 포함된다고 하였고, 황동주(2006)는 수학영재들은 추론능력과 같은 수학적 정신능력을 지닌다고 하였는데 학생 A에게서 수학영재성의 특징인 귀납적으로 생각하고 추론하는 능력과 분석적이고 연역적으로 생각하고 추론하는 능력 등이 발현되는 것을 관찰할 수 있었다.

(2) GSP를 활용한 교수·학습은 수학 영재학생들에게 능동적인 탐구활동을 조장하고 수학적인 개념의 확장이나 사고의 확산에 긍정적인 역할을 한다.

수학에서 개념의 확장이나 사고의 확산은 수학 영재학생에게 중요하다. GSP를 활용한 학습은 영재 학생들에게 능동적인 탐구 활동을 조장하고 수학적인 개념이나 사고의 확장 측면에서 긍정적인 역할을 한다는 것을 관찰할 수 있었다.

학생 A는 두 삼각형의 넓이의 비를 탐구하면서 각 변을 1:1로 내분하는 점이 각 변의 중점임을 인식하고 각각의 변의 중점을 이으면 그 선분은 밑변과 평행하고 그 길이 비는 2:1이 된다는 중점연결정리를 적용하여 두 삼각형의 넓이의 비가 4:1임을 재확인하였다([그림 Ⅳ-5]). 수학적 창의성은 수학적 문제를 창의적으로 해결하는 능력으로 유창성, 융통성, 독창성, 정교성의 능력들이 포함된다고 하였다(김홍원 외, 1996; 신희영 외, 2007; 이강섭·심상길, 2007). 학생 A의 GSP를 통한 탐구 활동에서 창의성의 구성요소 중 다양한 각도에서 현상을 파악할 수 있는 능력 즉, 기존의 고정된 사고방식에서 벗어나 다양한 해결책을 찾아내는 능력인 융통성을 발견할 수 있었다.



[그림 Ⅳ-5] 학생 A의 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이와 각 변의 길이의 비에 대한 산출물

이와 같이 GSP를 활용한 학습은 영재 학생들에게 능동적인 탐구 활동을 조장하고 수학적인 개념이나 사고의 확장 측면에서 긍정적인 역할을 한다는 것을 확인할 수 있었고, 수학적

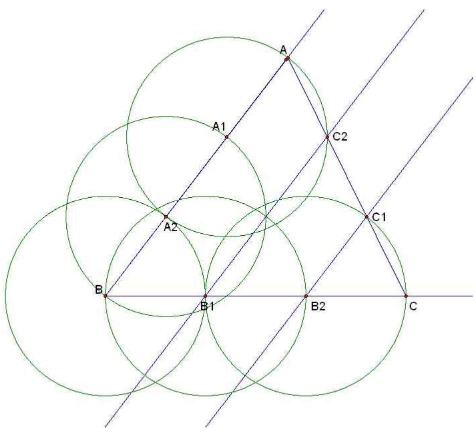
창의성을 계발하는데 도움을 주는 것을 확인할 수 있었다.

(3) GSP를 활용한 수학영재 교수 · 학습은 수업에 소극적인 태도를 보인 학생에게 수업에 적극적으로 참여하도록 함으로써 수학에 대한 흥미와 태도, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 수학적 과제 집착력을 발현하게 한다.

학생 D는 GSP를 활용한 수학영재 교수 · 학습을 하기 전 몇 차례 수업시간에 나타난 행동에서 수업에 능동적이고 적극적인 참여를 하지 못하고 수동적이고 소극적인 수업 활동 모습을 보였고, 수업 중 질문의 답변 등에서 자신의 답에 대한 확신이 없어 자신감이 결여된 모습을 보인 학생이었다. 그러나 GSP를 활용한 교수 · 학습 과정에서 활동 모습을 관찰한 결과 학생 D는 GSP를 사용하여 탐구하는 과정에서 수업에 능동적이고 적극적으로 참여하는 모습을 보였고, 다른 학생과 GSP의 탐구 활동에 관한 내용으로 의사소통을 하는 것을 목격할 수 있었다.

다음은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 $\triangle ABC$를 각 변을 2:1로 내분하는 점을 연결하여 $\triangle DEF$를 작도하기 위하여 $\triangle ABC$의 각 변을 3등분하는 점을 작도하는 과정에서 학생 C와 학생 D의 대화 내용이다.

학생 C : D야, $\overline{AB}$ 하고 $\overline{BC}$는 원을 이용하여 작도했는데 $\overline{AC}$는 작도하는게 쉽지 않네. 너는 작도했냐?
학생 D : 응, 나는 작도했는데.
학생 C : 그래? 너는 어떻게 작도했냐?
학생 D : 조금 전에 $\overline{BC}$의 삼등분 점 B_1과 B_2를 그렸지?
학생 C : 응.
학생 D : 이 점들을 지나면서 $\overline{AB}$에 평행인 직선을 그릴 수 있지?
학생 C : 응.
학생 D : 이 평행선들과 $\overline{AC}$하고 만나는 점들이 $\overline{AC}$의 삼등분 점이야.
학생 C : 아, 그렇게 그리구나. D야, 고마워.



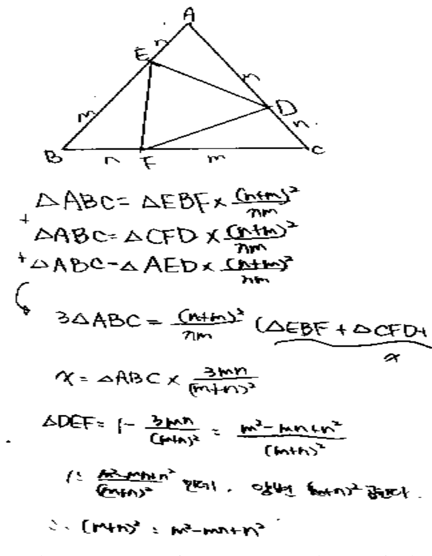
[그림 Ⅳ-6] $\triangle ABC$의 각 변의 삼등분 점의 작도

위의 대화에서 보는 바와 같이 학생 D는 수업에 능동적이고 적극적으로 참여하면서 탐구 내용에 대하여 다른 학생과 수학적으로 의사소통하는 모습을 볼 수 있었다. 수학 영재성의 구성요소에 수학에 대한 흥미와 태도, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 일정 시간동안 끈기 있게 수학 문제에 몰두하는 능력인 수학적 과제 집착력(김부윤・이지성, 2006; 김홍원 외, 1996; 황동주, 2005; 황동주, 2006)과 의사소통능력(황동주, 2005; 황동주, 2006)이 포함된다. 학생 D의 탐구 학습을 관찰하는 과정에서 이와 같은 특징을 관찰할 수 있었다. 따라서 GSP를 활용한 수학영재 교수・학습은 수업에 소극적인 태도를 보인 학생에게 수업에 적극적으로 참여하도록 함으로써 수학에 대한 흥미와 태도, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 수학적 과제 집착력을 발현하게 하는 것을 확인할 수 있었다.

2. GSP를 활용한 시각화가 학생들의 대수화 과정과 논리적 전개 과정에 어떠한 도움을 주는가?

(1) GSP를 활용한 도형과 기호의 시각화는 수학 영재학생들이 수학적 사실을 기호로 표현하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다.

학생들은 GSP를 이용하여 $\triangle ABC$와 이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 일반화를 탐구하는 과정에서 $\triangle ABC$와 $\triangle ABC$의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점과 이 내분점들을 연결하여 $\triangle DEF$를 작도하고, GSP의 측정 및 계산 메뉴를 이용하여 작도한 도형에서 각 변의 길이, $\triangle ABC$, $\triangle ADF$, $\triangle BDE$, $\triangle CEF$와 $\triangle DEF$의 넓이, $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비 등을 구하였다. 이렇게 측정된 값은 [그림 Ⅳ-3]과 [그림 Ⅳ-4]에서 보는 바와 같이 각 변의 길이, 삼각형의 넓이, 두 삼각형의 넓이의 비 등이 컴퓨터 화면상에 기호화되고 대수화되어 나타난다.

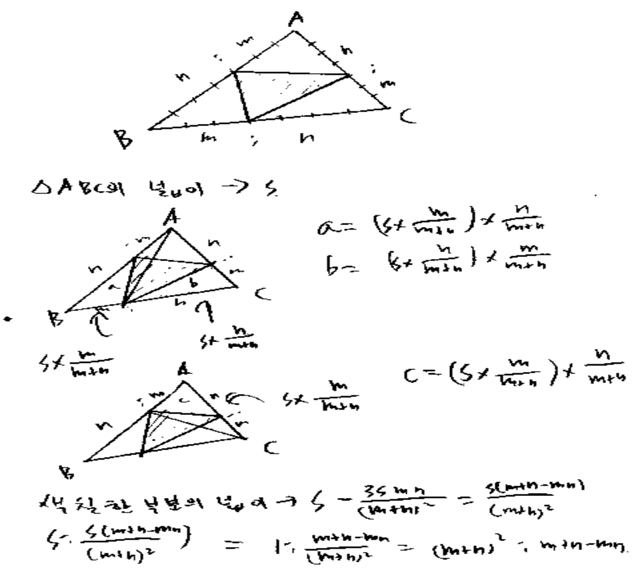


[그림 Ⅳ-7] 학생 A의 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 일반화에 대한 산출

학생들은 탐구했던 수학적 사실들을 일반화하기 위하여 컴퓨터 화면상에 나타난 도형과 기호를 자주 들여다보았고 컴퓨터 화면상에 나타난 기호를 이용하여 이를 표현함으로써 자연스럽게 기호가 눈에 익고 기호의 사용이 친숙해져서 도형의 성질 등을 기호화하거나 대수화하는데 GSP가 도움을 주었다. [그림 Ⅳ-7]은 학생 A가 두 삼각형의 넓이의 비를 일반화하기 위하여 GSP를 이용하여 작도한 도형을 활동지에 옮겨 그리고, GSP에 의해 수량화되고 기호화되어 나타난 자료를 이용하여 두 삼각형의 넓이의 비를 수학화하는 과정을 보여주고 있다. Weaver와 Brawley(1959)는 수학적 능력의 구성요소로 수량적 자료를 추상적, 상징적으로 처리하는 능력으로 보았는데 학생 B에게서 GSP에 의해 수량화되고 기호화되어 나타난 자료를 이용하여 대수화하여 추상적 기호로 상징적으로 처리하는 수학적 능력을 관찰할 수 있었다. 이와 같이 GSP에 의한 각각의 사례에 대한 도형과 기호의 시각화는 영재학생들이 수학적 사실을 기호로 표현하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다.

(2) GSP로 시각화한 내용은 영재학생들의 정보의 조직화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적・연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력, 일반화와 같은 수학적 능력의 계발에 도움을 주고, 증명학습에 도움을 준다.

학생들은 GSP를 이용하여 $\triangle ABC$와 이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분한 점을 연결하여 만든 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 일반화를 탐구하기 위하여 GSP를 이용하여 [그림 Ⅳ-3], [그림 Ⅳ-4] 등과 같이 $\triangle ABC$의 각 변을 1:1, 2:1, 3:1, 3:2, 4:1, 5:1 5:2로 내분한 점을 연결하여 만든 내분삼각형 $\triangle DEF$를 작도하고, GSP로 시각화된 도형을 이용하여 각 변의 길이나 넓이 등을 기호화하고 대수화하여 두 삼각형의 넓이의 비를 일반화하였다. 이 과정에서 학생들은 GSP를 사용하여 각 변의 길이 및 넓이 등을 측정하여 $\triangle ABC$ 각각의 변의 길이가 변하더라도 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비는 항상 일정하다는 사실과 세 삼각형 $\triangle ADF$, $\triangle BDE$와 $\triangle CEF$의 넓이는 항상 같다는 사실을 이용하여 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비를 일반화하였다.



[그림 Ⅳ-8] 학생 B의 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 일반화에 대한 산출물

개별적으로 집중 촬영한 비디오 녹화 화면과 학생 활동지를 살펴보면 학생들은 $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$의 넓이의 비의 일반화 과정에서 컴퓨터 화면에 나타난 도형을 참고하기 위하여 조작하거나 컴퓨터 모니터에 나타난 도형을 활동지에 옮겨 그린 후 $\triangle ABC$의 각 변을 $m:n$으로 내분점을 연결하여 만든 $\triangle DEF$의 넓이의 비를 일반화하는 것을 관찰할 수 있었다([그림 Ⅳ-8]).

수학 영재성의 구성요소로 김홍원 외(1996)는 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화/시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적・연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력, 일반화 및 적용 능력 등과 같은 수학적 사고능력을 제시하였다. 학생 A의 경우, GSP를 이용하여 삼각형들을 작도하고, 작도한 삼각형들의 넓이의 비를 측정하고, 측정된 값을 분석하여 각 삼각형의 넓이를 기호화하고 대수화하였고, 이렇게 대수화한 자료를 종합적으로 활용하여 두 삼각형의 넓이의 비를 일반화하였다([그림 Ⅳ-7]). 학생 A의 일반화 과정에서 김홍원 외(1996)가 제시한 정보의 조직화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적・연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력 그리고 수학적 일반화와 같은 수학 영재성의 구성요소가 나타남을 관찰할 수 있었다. 이를 통하여, 수학 영재학생들의 GSP를 활용한 탐구 학습은 수학 영재학생들의 증명 학습에 어느 정도 긍정적인 역할을 함을 확인할 수 있었다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 내분삼각형 넓이의 일반화에 대한 탐구 과정에서 GSP가 학생들의 기하학적 원리와 개념의 이해를 어떻게 돕고, 일반화 과정에서 시각화한 내용을 어떻게 논리적으로 전개하는가에 대하여 탐구하였다. 이를 위하여 M대학교 과학영재교육원 중등수학 심화과정에 있는 학생 4명을 연구 참여자로 선정하여, 학생들이 삼각형의 각 변을 $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 만든 삼각형의 넓이와 기존의 삼각형의 넓이 사이의 규칙성을 탐구하고 이를 일반화하는 과정에서 수집된 디지털 오디오 녹취물, 학생 활동을 촬영한 비디오 녹화자료와 학생활동지를 서로 연계하여 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, GSP를 활용한 도형의 작도는 학생들이 손으로 직접 도형을 작도할 때 보다 훨씬 더 신속하고 정확하게 도형을 제시해 줄뿐만 아니라 GSP의 끌기(dragging) 기능은 도형을 다양한 각도에서 접근할 수 있게 하고, 측정 및 계산 기능은 대상에 대한 다양한 양을 측정할 수 있고 측정한 내용은 대상이 바뀔 때마다 자동적으로 바뀌게 되어 사고의 방향을 좀 더 창조적으로 유도할 수 있다. 이와 같은 GSP의 시각화 기능과 측정 기능은 수학 영재학생들에게 직관적으로 도형의 성질을 쉽게 인식할 수 있게 함으로써 기하학적 원리와 개념을 직관적으로 이해하고 다양한 사례를 검증하는데 도움을 준다. 또한, GSP를 활용한 수학 교육은 학생들에게 GSP로 시각화한 그래프를 통하여 변수들간의 관계를 발견하고 그 관계를 수치화하고 그래프를 분석하고 대수화하는데 도움을 줌으로써 수학 영재학생들의 귀납적 사고 능력과 일반화 및 적용 능력과 같은 수학적 능력과 시각화한 자료를 분석하는 과정에서 정보의 조직화와 분석적이고 연역적으로 추론하고 일반화하는 수학적 능력을 발현하는데 도움을 준다.

둘째, 수학 영재 교수・학습에서 GSP의 활용은 학생들에게 능동적인 자세로 테크놀로지를 활용하여 창조적 사고영역을 구축하게 함으로써 앉아서 주어지는 수학을 습득하는 방식

이 아니라 학습자의 사고 영역에 따라 스스로 확장해 가면서 살아 숨 쉬는 수학을 추구할 수 있게 한다. GSP를 활용한 수학 교수 · 학습은 수학 학생들의 자기주도적인 탐구식 학습을 가능하게 하고 학생들의 수업에 대한 흥미와 적극적인 참여를 조장하게 하여 수업에 소극적인 태도를 보인 학생에게 수업에 적극적으로 참여하도록 유도하고, 수업에 집중하지 못하고 주의가 산만한 학생에게 호기심을 자극하여 수업에 집중하게 함으로써 수학에 대한 흥미와 태도, 자신의 능력에 대한 믿음, 자기 신뢰감 등과 관련된 수학적 과제 집착력을 발현하게 하는 것을 확인할 수 있게 한다.

셋째, GSP를 활용한 도형과 기호의 시각화는 수학 영재학생들이 수학적 사실을 기호로 표현하고 대수화하는데 긍정적인 역할을 한다. 또한, GSP로 시각화한 내용은 영재학생들의 정보의 조직화 능력, 수학적 추상화 능력, 귀납적 · 연역적 사고 능력과 같은 수학적 추론 능력, 일반화와 같은 수학적 능력의 계발에 도움을 주고, 증명학습에 도움을 준다.

본 연구를 바탕으로 다음과 같은 사항을 제언하고자 한다.

본 연구는 주어진 삼각형을 $m:n$으로 내분하여 만든 삼각형들의 넓이의 비의 일반화 과정에서 GSP가 영재학생들의 영재성의 발현에 어떻게 도움을 주는지 관찰하기 위하여 사례연구를 수행하였다. 그러나 삼각형 이외의 사각형이나 다각형의 일반화 과정으로 확장하였을 때에도 이와 같은 결과가 나오는지에 대한 연구가 필요하다. 그리고 GSP 이외의 다른 테크놀로지를 활용하였을 때도 이와 같은 결과가 나오는지에 대하여 연구할 필요가 있다.

참고문헌

김부윤 · 이지성 (2006). 수학에서의 창의적 태도의 측정도구 개발과 그 적용. 한국수학교육학회지시리즈 A:수학교육, 45(1), 25-34.

김홍원 · 김명숙 · 송상헌 (1996). 수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ)-기초연구편-. 연구보고 CR 96-26. 한국교육개발원.

나귀수 (1998). 증명의 본질과 지도 실제의 분석: 중학교 기하단원을 중심으로. 박사학위논문, 서울대학교.

류희찬 · 조완영 (1999). 증명의 필요성 이해와 탐구형 기하 소프트웨어의 활용. 대한수학교육학회논문집, 9(2), 419-483.

신동선 · 류희찬 (1999). 수학교육과 컴퓨터. 서울: 경문사.

신유경 · 강윤수 · 정인철 (2008). GSP가 증명학습에 미치는 영향: 사례연구. 한국학교수학회논문집, 11(1), 55-68.

신희영 · 고은성 · 이경화 (2007). 수학영재교육에서의 관찰평가와 창의력 평가. 학교수학 9(2), 241-257.

이강섭 · 심상길 (2007). 교구를 활용한 활동에서 창의성 평가를 위한 학생들의 반응 유형 분석. 수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(1), 227-237.

이금주 (2007). Van Hiele 이론에 기초한 교과서 분석과 효과적인 기하 학습에 관한 연구. 교육대학원 석사학위 논문, 중앙대학교.

이헌수 · 박종률 · 정인철 (2009). 테크놀로지를 활용한 사인함수의 덧셈정리 증명 -수학영재아를 중심으로 한 사례연구-. 한국수학교육학회지시리즈 A:수학교육, 48(4), 387-398.

한동숭・조지연 (2003). GSP를 활용한 기하교육 연구 사례. 한국학교수학회논문집, 6(1), 87-100.

한혜숙・신현성 (2008). 증명학습에 대한 학생들의 성향과 GSP를 활용한 증명학습. 한국학교수학회논문집, 11(2), 299-314.

홍진곤・강은주 (2009). 사고구술법을 이용한 수학 영재의 사고 특성 연구. 대한수학교육학회지 수학교육학연구 19(4), 545-562.

황동주 (2006). 수학 영재를 이한 행동 검사도구 개발. 한국학교수학회논문집, 9(3), 405-424.

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2012). 수학교육학신론. 문음사.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, Educational Studies in Mathematics 24, 359-387.

Edwards. L. D. (1997). Exploring the territory before proof: Students generalizations in a computer microworld for transformation geometry. International journal of Computers for Mathematical Learning, 2(3), 187-215.

Galindo, E. (1998). Assessing justification and proof in geometry classes taught using dynamic software. The Mathematics Teacher, 91(1), 76-81.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in school children. Chicago: The university of Chicago Press.

Marrades, R. & Gutie'rrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, Educational Studies in Mathematics 44, 87-125.

NCTM (1987). Curriculum and evaluation standards. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM (1991). Professional standard for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, V A: NCTM.

Patton, M. Q. (2002). Qualitative research & evaluation methods. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, Inc.

Scher, D. (1996). Folded paper, dynamic geometry and proof: A three-tier approach to the conics. The Mathematics Teacher, 89(3), 188-193.

Schoenfeld, A. H. (1988). Mathematics, Technology and higher order thinking, In Nickerson, R. S. & Zodhiates, P. P.(ed), Lawrence, Erlbaum Associates Publisher.

Simon, M., & Blum, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. Journal of Mathematics Behavior, 15, 3- 31.

Weaver, J. F., & Brawley, C. F. (1959). Enriching the elementary school mathematics program for capable children. Journal of Education, 142(1), 1-40.

The Generalization of the Area of Internal Triangles for the GSP Use of Mathematically Gifted Students

Lee, Heon Soo[3] · Lee, Kwangho[4]

Abstract

This study investigates how the GSP helps gifted and talented students understand geometric principles and concepts during the inquiry process in the generalization of the internal triangle, and how the students logically proceeded to visualize the content during the process of generalization. Four mathematically gifted students were chosen for the study. They investigated the pattern between the area of the original triangle and the area of the internal triangle with the ratio of each sides on $m:n$ respectively. Digital audio, video and written data were collected and analyzed. From the analysis the researcher found four results. First, the visualization used the GSP helps the students to understand the geometric principles and concepts intuitively. Second, the GSP helps the students to develop their inductive reasoning skills by proving the various cases. Third, the lessons used GSP increases interest in apathetic students and improves their mathematical communication and self-efficiency.

Key Words : Mathematics Education for the Gifted, Mathematics Education Using GSP, Internal Triangle, Ratio of Areas

3) Dept. of Mathematics Education, Mokpo National University (leehs@mokpo.ac.kr)
4) Dept. of Elementary Education, Korean National University of Education (paransol@knue.ac.kr)