한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 3, 535-563, September 2012

# 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과

반은섭[1] · 신재홍[2]

본 연구는 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 양상을 분석하여 유추적 사고의 필요성을 확인하고, 시각적 표상을 통한 유추의 효과를 경험적으로 검증하기 위하여 실시되었다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 충청북도 청주시에 소재한 일반계 고등학교인 C고등학교 3학년 학생 80명을 연구 대상자로 선정하였다. 이들은 유추 상황에 따라 설정된 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건과 비 유추조건인 단순조건에 각각 20명씩 배정되었으며, 1차 실험과 2차 실험에서 각 조건에 따라 서로 다른 학습 자극을 받은 후에 복소수 수열과 관련된 동일한 문제를 풀었다. SPSS 12.0을 이용한 $\chi^2$ 분석을 토대로 유추 조건에 따른 문제 해결률을 비교하여 분석한 결과, 수학적 문제 해결 과정에서 유추적 사고가 이루어지지 않을 경우에 이미 알고 있는 바탕 지식의 사용이 제한될 수 있으며, 시각적 표상을 통하여 바탕 개념과 표적 개념을 대응시켜 보는 것이 유추 전이에 효과적이라는 것을 확인할 수 있었다. 이와 같은 결과는 문제 해결 과정에서 유추적 사고의 필요성을 함의하고 있으며, 시각적 표상을 통하여 바탕 개념과 표적 개념의 관계적 유사성을 인식하는 것이 수학적 문제 해결과 밀접하게 관련되어 있다는 주장을 지지하는 경험적인 근거가 된다.

주요 용어: 유추, 수학적 문제 해결, 시각적 표상, 복소수 수열.

## Ⅰ. 서론

유추가 인간의 인지 과정에 있어서 의미 있는 역할을 한다는 것은 오래전부터 알려져 왔으며(Piaget, 1950), 1980년대 이후로 진행되어온 인지심리학의 연구를 통해서 유추가 새로운 개념을 이해하고, 지식을 확장하며, 문제를 해결하기 위한 보편적이고 중요한 사고의 도구가 된다는 것이 검증되었다(예, Gick & Holyoak, 1980; Holyoak & Thagard, 1995; Novick, 1995; Novick & Holyoak, 1991; Reed, 1987).

인지심리학에서 이루어진 유추 연구의 도구가 대수 문장제(algebraic word problem)인 경우가 많았으며(예, Novick, 1995; Novick & Holyoak, 1991; Reed, 1987; Reed, Dempster &

본 논문은 제 1저자의 석사학위 논문의 일부 내용을 바탕으로 하고 있음.

1) 한국교원대학교 대학원 (hymnes@naver.com)
2) 한국교원대학교 (jhshin@knue.ac.kr)

Ettinger, 1985), 수학이 다루는 주제들 중 많은 부분이 유추와 관련되어 있기 때문에(Polya, 2002, 2003) 유추에 대한 관심은 수학교육학 연구에서도 반영되어 수학 문제 해결에 있어서 유추 전이(analogical transfer)에 영향을 미치는 변인들을 조사하는 연구들이 보고되고 있다(예, 이종희, 김선희, 2002; 이종희, 김진화, 김선희, 2003; Bassok, 2001; Bassok & Holyoak, 1989; English, 1998; Reed, 1987; Reed et al., 1985; Richland, Holyoak & Stigler, 2004).

유추에 의한 수학 문제해결을 다룬 기존의 연구는 인지심리학의 유추 연구에서 사용된 대수 문장제를 수정・보완하여 활용하였으며(예, 박현정, 이종희, 2007; 이종희 외, 2003; Novick & Holyoak, 1991; Reed, 1987; Reed et al., 1985), 표적 문제의 해결을 위한 바탕 문제의 학습 조건이 상대적으로 강조되고 있다(예, 이종희, 김선희, 2002; 이종희 외, 2003). 또한 수학교육학 분야에서 유추적 사고를 다룬 연구가 매우 부족한 상황이라고 한 이경화(2009)의 의견을 통하여 유추를 다루고 있는 수학교육학 분야의 선행 연구가 다소 제한적이라는 것을 확인할 수 있다. 본 연구에서는 이와 같은 선행 연구의 제한점을 보완하여 유추에 의한 문제 해결을 설명할 수 있는 방안을 다음과 같이 모색해 보았다.

먼저, 본 연구의 검사 도구는 대수 문장제가 아닌 시각적 표상으로 해석이 가능한 유추 문제로 구성되어 있다. 수학 문제 해결 상황은 언어로 된 현실 상황과 비교하여 상대적으로 바탕 지식이 적기 때문에 유추 전이가 쉽게 일어나지 않으며(Dunbar, 2001), 수학 문제는 그림이나 그래프를 이용하여 해석이 가능한 경우가 많이 있기 때문에(우정호, 2004), 수학교육에서의 유추에 관한 연구는 인지심리학에서의 연구와는 별도의 접근이 필요할 것이다.

또한, 바탕 문제와 표적 문제를 인과적으로만 생각하여 일방적으로 바탕 문제의 특정한 학습 조건이나 정해진 해법을 통한 표적 문제의 해결을 강조하기보다는 바탕 문제와 표적 문제의 해법을 동시에 추측하고 구성할 수 있는 상황을 제시하여 표적 문제를 해결하는 과정에서 바탕 지식과 표적 지식의 상호 작용을 충분히 고려했다.

새로운 표적 문제를 해결하기 위해서 문제를 푸는 사람이 자발적으로 바탕 지식과의 관련성을 생각하여 문제의 해법에 관한 도식을 추측하고 구성해야 한다는 관점에서 볼 때, 본 연구는 바탕과 표적의 관계를 지속적으로 생각해 보면서 문제의 해법과 관련된 사전 지식을 인식하는 과정을 다루게 된다는 점에서 유추에 의한 문제 해결과 관련된 변인이나 유추 전이 효과를 다룬 기존의 연구 결과를 보완하여 수학적 문제 해결 효과를 분석할 수 있을 것이다.

## Ⅱ. 이론적 배경

### 1. 유추를 통한 문제 해결

유추를 통하여 문제를 해결하기 위해서는 이미 알고 있는 바탕 문제(base problem)와 새로 주어진 표적 문제(target problem)가 필요하다. 유추는 현재의 문제를 해결하기 위해 사전 지식을 이용하는 것이므로 바탕 문제와 표적 문제 사이에는 반드시 공통된 유사성이 존재해야 하며, 표적 문제를 해결하기 위하여 바탕 문제와 표적 문제의 유사성을 인식하고 관계를 대응시켜야 한다(Bassok, 2001; Gentner, 1983; Holyoak & Thagard, 1995; Weisberg, 2009). 이 과정에서 문제를 푸는 사람은 바탕 문제와 표적 문제에서 구조적인 관계의 유사성을 파

악하고 자신이 이미 풀어보았던 바탕 문제의 해결책을 표적 문제에 전이하여 문제를 해결했다고 볼 수 있는데, 이와 같이 유추에 의해 문제가 해결되었을 때, 유추 전이(Analogical transfer)가 이루어졌다고 한다(Novick & Holyoak, 1991; Sternberg, 2005; Weisberg, 2009).

유추 전이를 다룬 인지심리학의 연구들은 유추 전이에 영향을 미치는 변인들을 밝히기 위하여 유추를 이용하여 문제를 해결하는 과정을 여러 단계로 나누어 설명해왔다. 대다수의 연구자들은 문제의 해결을 위하여 표적 문제의 부호화(encoding), 바탕 유사물의 인출(retrieval), 바탕과 표적의 대응(mapping), 전이 및 학습(transfer and learning)의 네 단계가 필요하다는 것에 의견을 같이하고 있으며(Sternberg, 2005; Weisberg, 2009), 유추 전이가 이루어지기 위해서는 바탕 문제와 표적 문제의 유사성의 수준에 따라 바탕 개념과 바탕 문제의 해법에 관한 도식이 인출되어 표적 문제의 요소들과 대응이 되어야 하기 때문에 대부분의 연구들이 인출 및 대응 단계에 관여하는 기제를 밝히기 위한 노력을 하고 있다. 바탕 지식이 선택되고 인출이 되면 바탕 문제와 표적 문제 사이의 유사성을 지각하여 요소들 사이의 대응이 일어나며, 두 문제에서 유사 개념들이 명시적으로 짝지어져, 바탕 문제의 해법을 이용하여 표적 문제를 해결할 수 있게 된다(Gentner, 1983; Holyoak & Thagard, 1995, Weisberg, 2009).

Gentner(1983)는 구조 대응 이론(structure mapping theory)을 통하여 유추 전이에 있어서 바탕과 표적의 요소들이 서로 짝지어지는 대응 단계를 강조하고 있다. 그는 대응 과정에서 바탕과 표적의 가능한 모든 성분들의 관계는 일대일로 연결된 체계가 되어야 한다고 주장하였다. 바탕과 표적의 일대일 대응을 유추 전이의 필수 요소로 생각하고 있는 많은 연구 결과들(예, Gentner & Markman, 1997; Holyoak & Thagard, 1989, 1995)이 Gentner(1983)의 주장을 뒷받침해 주고 있으며, 바탕과 표적의 대칭적인 일대일 대응을 중요시하는 연구들은 명료한 대응이 성공적인 유추 전이를 보장한다는 관점을 취하고 있다.

한편 Novick과 Holyoak(1991)은 바탕과 표적 요소들 간의 대응만으로는 유추 전이가 일어날 수 없다고 제안하였다. 그들은 대응 단계가 유추 전이에 있어서 필요하기는 하나 대응 단계만으로는 충분하지 않고, 표적 문제를 해결하기 위하여 바탕 문제의 해법을 실행하는 적용 과정(adaptation process)이 수반되어야 유추 전이가 일어날 수 있다고 주장하였다. Novick과 Holyoak(1991)은 실험 결과를 바탕으로 유추의 과정에서 대응 단계와 적용 단계는 인지적으로 분리될 수 있을 것이고, 바탕과 표적의 대응만으로 완벽한 유추 전이가 보장되지 않으며, 효과적인 유추 전이를 위해서 적용 과정이 필요하다는 것을 주장할 수 있었다.

English(2004)에 의하면 기본적으로 수학교육학에서의 유추에 관한 연구는 1980년대 이후 인지심리학에서 진행된 문제 해결에 관한 유추 연구의 연장선상에 있다. 유추는 수학교육에서 광범위하게 사용될 수 있는데, 수학적 법칙을 발견하기 위해서는 관찰된 사례의 공통적인 성질에 주목하여 일반적인 법칙을 추측하는 귀납 추론이 필요하며, 유추는 귀납 추론을 위한 중요한 도구가 된다(우정호, 2004; Polya, 2002, 2003).

Lee와 Sriraman(2011)은 OCA(Open Classical Analogy)를 통한 추측(conjecture)이 수학 지식의 구성에 미치는 영향을 알아보았다. 연구의 참가자들은 OCA를 통한 추측에 의하여 새로운 표적 개념이나 성질을 구성하기도 하고, 이미 알고 있는 바탕 개념의 도식을 구성하기도 했다. 이 과정에 의하여 참가자들은 바탕과 표적의 관계적 유사성(relational similarity)을 인식할 수 있게 되었으며, 새로운 문제 해결 방법이나 관점을 스스로 발견할 수 있었다. 연구자의 관점에서 유추 전이가 해석되었던 기존의 많은 연구와 달리 Lee와 Sriraman(2011)의 연구에서는 유추의 대응 단계에서 학생들이 직접 추측하여 바탕과 표적을 구성(construction)하는 활동이 강조되고 있으며 이들의 연구 결과를 Novick과 Holyoak(1991)의

연구와 연장선상에서 해석해보면, OCA는 유추의 적용 단계에서 추측과 구성을 통해 스스로 지식을 만들어가면서 문제를 해결하는 방법을 학생들에게 제시해 주었다고 볼 수 있다.

표적 문제를 해결하는 과정에서 학습자는 표적 문제와 유사한 구조를 가진 바탕 지식을 기억에서 탐색하는 것이 아니라, 추측하고 자발적으로 구성해 나가는 것이라는 관점(Holyoak & Thagard, 1995; Lee & Sriraman, 2011)과 수학 구조의 추상성, 복잡성 등은 유추 과정에서의 대응을 방해하는 요소이며 수학적인 유추는 일상적인 유추와는 다르게 자신의 수학적 지식을 검토하여 구조의 공통성이나 유사성을 찾으려는 의식적인 노력이 요구된다는 이승우와 우정호(2002)의 주장을 참고해보면, 학생들이 직접 바탕 요소와 표적 요소를 추측하고 구성하는 활동을 다루고 있는 Lee와 Sriraman(2011)의 연구는 유추 전이에 대한 후속 연구의 방향에 중요한 시사점을 제공해 주고 있는 것이다.

## 2. 시각적 표상과 수학적 문제 해결

과학자들이 사용하는 유추를 연구한 Holyoak과 Thagard(1995)에 의하면 과학자들은 표적 문제를 해결하기 위해 바탕 지식을 구성하는 과정에서 그림이나 다이어그램과 같은 시각적 표현을 적극적으로 활용한다고 한다. 예를 들면, Kekule은 감긴 뱀의 이미지를 이용해 벤젠의 구조를 생각했으며 Newton, Maxwell, Morgan 등의 물리학자들에 의해 출판된 책은 다이어그램을 이용하여 쉬운 개념으로부터 물리 현상을 설명하고 있었다. 이와 같이 과학자들은 유추 상황에서 시각적 표현을 사용하면서 바탕과 표적을 현실성 있고 견고하게 대응시키기 때문에 효과적인 유추 전이를 기대할 수 있는 것이다.

Diezmann과 English(2001)에 의하면 추상성이 강한 수학 학습 상황에서는 다이어그램의 활용과 같은 시각적 표현이 문제 구조 사이의 대응을 더욱 견고하게 해주기 때문에 바탕 문제의 해결책을 표적 문제로 전이시키는 과정에서의 제한 사항을 극복할 수 있게 해주며, Wilson, Halford, Gray와 Phillips(2001)는 수학교육에서 유추를 활용하기 위해서는 수학적인 개념을 표상할 수 있게 하는 구체적인 자료가 필요하다고 했다.

문제 해결을 위한 Polya(2002)의 ‘발견술(heuristic)’에서는 단지 기하 영역에서 뿐만 아니라 모든 수학 영역에서 문제를 이해하고 해결하기 위해 “그림을 그려볼 것(draw a figure)”을 강조하고 있으며, Polya를 계승하여 Schoenfeld(1985)도 통찰과 직관은 그림으로부터 나온다고 주장하면서 문제 해결을 위하여 문제를 ‘분석’ 하는 단계에서 “가능하다면 그림을 그려라(draw a diagram if at all possible)”라는 권고를 하였다. 또한 Poincaré와 같은 수학자도 문제 해결이나 수학적 발견을 위한 필수적인 요소로서 시각적 표상을 강조하였고, 시각적 표상의 적극적인 활용을 학생들에게 권장하였다(Hadamard, 1945). 이처럼 수학교육학자들이나 수학자들은 시각적 표상이 수학적 추론이나 문제 해결에 중요한 역할을 하기 때문에 시각적 표상을 적극적으로 활용해야 한다는 것에 의견을 같이하고 있으며, 최근까지도 수학교육학자들은 다양한 학습 주제와 상황에 관여하는 시각적 표상의 역할에 대하여 관심을 갖고 대수 영역(예, Ahmad, Tarmizi, & Nawawi, 2010), 해석 및 기하 영역(예, Arcavi, 2003; Carlson & Bloom, 2005; Stylianou, 2002), 확률 및 통계 영역(예, Corter & Zahner, 2007; Wu, 2003; Zahner & Corter, 2010)에 걸쳐 꾸준하게 연구를 진행하고 있다.

유추 문제 해결에 있어서 Lee와 Sriraman(2011)이 제시한 추측을 통한 구성 과정과 Novick과 Holyoak(1991)의 연구에서 확인해 볼 수 있는 적용 과정을 같이 고려해 보면, 시

각적 표상을 통하여 이루어진 잠정적인 대응으로 인하여 문제 해결과 관련된 바탕 지식과 표적 지식의 추측이 수월해지며 문제 해결을 위한 도식에 가장 적합한 해법을 자발적으로 구성하여 바탕 문제의 해법을 표적 문제에 적용할 수 있을 것이라는 예상을 해볼 수 있다. 또한 시각적 표상을 이용한 잠정적인 대응 관계는 지속적으로 수정·보완이 가능하고 이를 통하여 관계적 유사성이 견고해질 수 있기 때문에 결과적으로 유추 전이의 가능성이 높아지게 된다는 가정을 할 수 있을 것이다. 이와 같은 가정은 문제 해결 과정에서 시각적 표상의 역할을 고찰해 볼 수 있는 새로운 연구 과제가 될 수 있을 것이며 본 연구에서는 실험적인 결과를 근거로 하여 수학적 문제 해결에 있어서 시각적 표상을 통한 유추의 효과를 검증해 보고자 한다.

## Ⅲ. 연구 가설

본 연구의 목적은 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 양상을 분석하여 문제 해결에 있어서 유추적 사고의 필요성을 확인하고, 시각적 표상을 통한 유추의 효과를 경험적으로 검증하는 데 있다. 이와 같은 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구 가설을 설정하였다.

연구 가설 1:
유추 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)의 문제 해결률은 높고, 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률은 낮을 것이다.

본 연구에서 설정한 유추 조건은 표적 문제의 해결과 관련된 바탕 개념인 실수 등비수열의 개념을 제시한 세 가지 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)이며, 바탕 개념을 제시하지 않은 단순 조건이 비 유추 조건이다.

유추가 문제를 해결하기 위한 보편적이고 중요한 인지적 도구가 된다는 것이 많은 연구를 통하여 알려져 왔기 때문에(예, Bassok & Holyoak, 1989; English, 1998; Gick & Holyoak, 1980; Novick & Holyoak, 1991; Reed, 1987; Reed et al., 1985; Richland et al., 2004), 문제의 해결과 관련된 바탕 개념을 제시한 유추 조건의 문제 해결률은 높을 것이고, 바탕 개념을 제시하지 않은 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률은 낮을 것으로 예상할 수 있다.

유추 조건에서는 문제 해결과 관련된 바탕 개념이 제시되는 반면에 비 유추 조건에서는 바탕 개념이 제시되지 않기 때문에, 비 유추 조건하에서의 문제 해결 여부는 자발적인 바탕 지식의 인출과 관련될 것이다. 연구 가설 1을 검증하면서 수학적 문제 해결 상황에서 바탕 지식의 인출과 관련된 제한 사항을 실험적으로 확인해 볼 수 있을 것이다.

또한, 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 효과를 비교 분석하기 위해서는 수학적 문제 해결 과정이 유추에 의한 기제로 설명되어야 하는데, 연구 가설 1의 검증을 통하여 본 연구에서 설정한 실험들이 유추로 설명될 수 있는 문제 상황이라는 전제 조건을 만족시키는지 여부를 부가적으로 확인할 수 있다. 단순 조건에서 문제 해결률이 높다면 유추 조건을 설정한 의미가 없기 때문에 연구 가설 1의 검증은 연구 목적을 달성하기 위한 전제 조건이 된다고 할 수 있다.

| |
|---|
| 연구 가설 2:<br>유추 조건 중 표상 대응 조건의 문제 해결률은 높고, 개념 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률은 모두 낮을 것이다. |

Novick과 Holyoak(1991)은 대응 단계가 유추 전이에 있어서 필수적이지만, 바탕과 표적 요소들 간의 개념 대응만으로는 유추 전이가 일어날 수 없으며, 표적 문제의 해결을 위해 바탕 문제의 해법을 실행하는 과정을 의미하는 적용 과정(adaptation process)이 수반될 때 성공적인 유추 전이를 기대할 수 있다고 주장했다. 연구 가설 2는 유추 조건에 따른 문제 해결 효과의 비교 분석을 통하여 시각적 표상을 활용하여 바탕과 표적을 추측하고 대응시키는 조건에서 문제 해결률이 유의미하게 높은지 여부를 확인하고, 유추 전이의 적용 과정을 재해석해 보기 위한 것이다.

OCA를 통한 유추 문제 해결을 다루고 있는 Lee와 Sriraman(2011)의 연구에서는 잠정적인 대응과 추측을 통하여 자발적으로 바탕과 표적을 구성하는 활동이 강조되었다. 또한 Holyoak과 Thagard(1995)는 표적 문제의 해결을 위한 바탕 지식의 선택에 있어서 표적 문제와 동일한 형태를 가진 것을 기억으로부터 탐색하는 것이 아니라 표적 문제의 해법과 관련된 바탕 지식을 직접 구성하는 것이라는 제안을 했는데, 시각적 표상을 이용하여 바탕 문제의 해법과 표적 문제의 해법을 추측하고 잠정적으로 대응시키는 학습 방법에 의하여 두 영역이 공유하고 있는 문제의 해법과 관련된 도식을 직접 구성할 수 있기 때문에 표상 대응 조건에서 문제 해결률이 높을 것이라는 가정을 할 수 있다.

이와 같이 연구 가설 2는 바탕 개념과 표적 개념을 시각적 표상을 통해 대응시킨 표상 대응 조건의 문제 해결률은 높고, 시각적 표상을 통해 대응시키지 않고 개념만 대응시킨 개념 대응 조건과 바탕 개념만 제시한 탐색 조건의 문제 해결률은 모두 낮을 것이라는 가정 하에 설정되었다.

## Ⅳ. 연구 방법 및 절차

### 1. 연구 대상

본 연구를 위하여 고교 평준화 지역인 충청북도 청주시에 위치하고 있는 C고등학교 3학년 자연계열의 남학생 80명을 연구 대상으로 선정하였다. 사전에 모든 연구 대상자들에게 연구의 성격과 의미를 충분히 설명했으며 실험 참가에 대한 동의를 받았다.

바탕 개념이 되는 실수 등비수열에 대한 지식이 없는 학생들은 연구 대상에 포함시킬 수 없으며, 선택 과목을 중심으로 구성되어 학업 성취도에서 차이가 나는 기존의 학급을 그대로 이용하여 실험 집단을 조직할 수 없었으므로 네 개의 학급 학생 147명에 대한 2011년 3월과 4월의 전국 연합 모의고사의 문항 반응 분석과 수학 담당 교사의 추천을 통해 바탕 개념인 실수 등비수열에 관한 내용을 알고 있는 학생 80명을 선정하고 모의고사 수학 점수를 기준으로 서열화하여, 순차적으로 집단에 배정하는 방법으로 네 개의 동일 집단을 구성하였다(1등은 G1, 2등은 G2, 3등은 G3, 4등은 G4, 5등은 G4, 6등은 G3, 7등은 G2, 8등은 G1, 9등은 G1, …, 80등은 G1). 이와 같은 방법으로 80명의 연구 대상자들은 네 개의 집단(G1, G2, G3, G4)에 20명씩 동일하게 배정되었으며, 각 학급에서 20명 내외의 학생들이 실험에

참가하게 되었는데, 이들은 수학 학습에 대한 의욕이 높으며 수학 문제를 비교적 많이 다루어 본 경험이 있는 일반계 고등학교의 자연계열 학생들이라고 할 수 있다.

<표 Ⅳ-1> 실험 집단과 참가자 수

| 실험 집단 | G1 | G2 | G3 | G4 |
|---|---|---|---|---|
| 참가자(명) | 20 | 20 | 20 | 20 |

## 2. 검사 도구

### 1) 검사도구의 개발

문제의 해결을 위한 효과적인 유추 조건을 살펴보기 위하여 연구에 적절한 표적 문제와 이에 대응하는 바탕 문제를 선정하는 것이 무엇보다 중요하다. 그런데 유추를 다룬 수학교육 연구가 매우 부족한 상황이며(이경화, 2009), 유추 전이를 다룬 수학교육 연구에서는 대부분 인지심리학의 연구 도구였던 대수 문장제를 수정·보완하여 사용하고 있기 때문에 본 연구에서는 중등 수학 교육과정을 분석하여 수학적 문제 해결 상황으로 일반화하여 해석할 수 있는 검사 도구를 개발하게 되었다.

본 연구에 적합한 검사 도구가 되기 위해서는 표적 문제에 대한 선행 학습이 이루어지지 않은 내용으로서 해법과 관련된 도식이 기존에 학습한 내용과 관계적으로 유사해야 한다. 또한 바탕 개념과 표적 개념을 시각적 표상을 통하여 표현할 수 있어야 하며, 표적 문제의 해결과 관련하여 바탕 지식으로부터의 유추 이외의 인지 과정을 가능한 통제할 수 있어야 한다. 그리고 바탕 문제의 해법에 관한 지식을 실험 과정에서 의도적으로 학습하지 않은 상태에서 연구 대상자가 표적 문제를 해결하면서 스스로 바탕 문제의 해법과 표적 문제의 해법을 동시에 구성할 수 있어야 한다는 것이 무엇보다 중요하다.

이와 같은 사항들을 고려하여 실수로 된 등비수열(이하 실수 (등비)수열)과 수가 복소수로 확장된 등비수열(이하 복소수 (등비)수열)의 관계에 주목하였고, 등비수열의 수렴, 발산, 진동(수열의 진동은 수의 절댓값이 일정하게 유지되면서 발산하는 경우를 의미함) 개념을 소재로 검사 도구를 개발하였다. 바탕 문제와 표적 문제를 실수 등비수열과 복소수 등비수열의 극한을 판정하는 문제로 구성하였는데, 이는 해법과 관련된 도식이 구조적으로 유사하며, 무엇보다 시각적 표상을 통하여 바탕 개념과 표적 개념을 구성할 수 있다는 점에서 본 연구의 취지에 적합하다고 할 수 있다. 바탕 개념인 실수 등비수열과 표적 개념인 복소수 등비수열의 대응 요소는 <표 Ⅳ-2>와 같으며, 연구 대상자가 문제의 해법과 관련하여 추측하고 구성해야하는 사항들을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 나타낼 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 실수 등비수열과 복소수 등비수열의 대응

| 대응 요소 | 바탕(base) | 표적(target) |
|---|---|---|
| 수열 | 실수 등비수열 $X_n = a^n$ | 복소수 등비수열 $Z_n = (a+bi)^n$ |
| 수의 표현 | 수직선 | 복소평면 |
| 수렴, 발산, 진동 | $a$의 절댓값과 관련됨 | $a+bi$의 절댓값과 관련됨 |


[그림 Ⅳ-1] 문제의 해법과 관련된 바탕과 표적의 대응 요소

바탕 개념이 되는 실수 수열은 수학Ⅰ에 나오는 내용으로 고등학교 2학년 과정에서 다루게 되는데, 표적 개념이 되는 복소수 수열은 현행 고등학교 교육과정에서 다루지 않는다. 이것은 표적 문제의 해법에 관한 선행 학습이 이루어졌을 가능성이 적다는 장점으로 해석할 수 있으며, 실험을 진행하기 위해서 표적 개념인 복소수 등비수열에 대한 학습이 필요하다는 부담이 있지만 고등학교 1학년 과정에서 복소수의 사칙연산에 대한 개념을 다루었기 때문에 복소평면에 대한 개념과 복소수의 절댓값에 대한 이해가 수반되면 바탕 개념을 통하여 복소수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 양상을 판정하는 실험 연구가 가능할 것이라 판단했다.

### 2) 문항의 선정 기준

문항의 선정 기준은 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 문항의 선정 기준

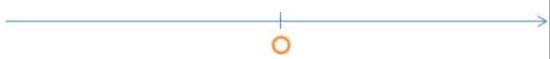
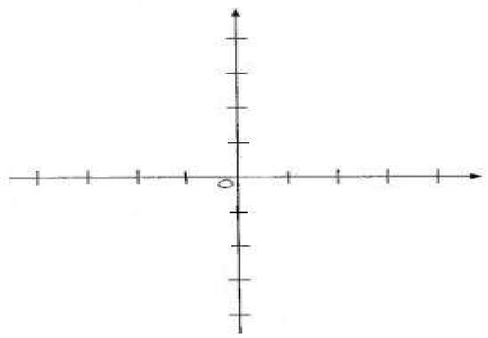
| 문항의 구분 | 문 항 의 내 용 | 평가 요소 |
|---|---|---|
| 1차 실험 | $Z_n=(c+di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 수렴하기 위해서는 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? | 복소수 수열의 수렴, 발산, 진동 조건에 관련된 도식의 형성 여부 |
| | $Z_n=(c+di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 발산하기 위해서는 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? | |
| | $Z_n=(c+di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 진동하기 위해서는 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? | |
| 2차 실험 | 다음 제시되는 복소수 수열의 극한값을 생각해 보고, 수렴하는 수열, 발산하는 수열, 진동하는 수열을 각각 찾아서 모두 적으세요.<br>① $Z_n=(\frac{1}{5}-i)^n$ ② $Z_n=(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)^n$ ③ $Z_n=(1-i)^n$ ④ $Z_n=(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i)^n$<br>⑤ $Z_n=(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}i)^n$ ⑥ $Z_n=(\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{3}}{5}i)^n$ ⑦ $Z_n=(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{5}i)^n$<br>⑧ $Z_n=(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i)^n$ ⑨ $Z_n=(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i)^n$ ⑩ $Z_n=(\frac{7}{9}+\frac{1}{3}i)^n$ | 복소수 수열의 수렴, 발산, 진동 조건에 관련된 도식의 형성 여부 |

## 3. 연구 설계

본 연구의 가설을 검증하기 위해 유추 조건에 따른 문제 해결률의 차이를 분석할 수 있는 실험 연구 방법을 적용하여 1차 실험과 2차 실험을 설정하였다. 각 실험은 정해진 장소에서

연속적으로 이루어지므로 피험자 손실이 발생할 가능성이 없고, 각 집단은 동일집단으로 간주할 수 있으므로 1차 실험, 2차 실험을 위해 선택한 실험 설계는 준-실험설계(quasi-experimental design)의 사후 검사 통제집단 설계(posttest only control group design)이다.

1차 실험 조건으로는 바탕 개념과 표적 개념을 제시하는 방법에 따라 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건, 단순 조건이 설정되었다. 표상 대응 조건은 바탕 개념인 실수 등비수열과 표적 개념인 복소수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 양상을 각각 수직선과 복소평면에 표현해보고, 구성해보면서 대응시키는 조건이다. 검사지에는 0으로 수렴하는 실수 등비수열과 복소수 등비수열에 관련된 내용이 [그림 Ⅳ-2]와 같이 제시되어 있다.

| 실수로 된 등비수열 | 복소수까지 확장된 등비수열 |
|---|---|
| $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$는 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 ______인 등비수열이며 일반항은 ______이다. | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i, -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ,공비가 ______ 인 등비수열이며 일반항은 ____________이다. |
|  |  |

[그림 Ⅳ-2] 표상 대응 조건에서의 실수 등비수열과 복소수 등비수열의 대응

개념 대응 조건에서는 시각적 표상이 없이 수렴, 발산, 진동하는 등비수열의 대응이 이루어지며, 탐색 조건에서는 바탕 개념인 실수 등비수열과 표적 개념인 복소수 등비수열의 명시적인 대응이 이루어지지 않고, 바탕 개념인 수렴, 발산, 진동하는 실수 등비수열만 제시가 된다. 한편 단순 조건에서는 복소수 등비수열 문제와 관련된 바탕 개념인 실수 등비수열에 대한 정보가 제시되지 않고, 다만 몇 가지 복소수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 양상만을 [그림 Ⅳ-3]과 같이 확인할 수 있었다.

$1+i,\ (1+i)^2,\ (1+i)^3,\ (1+i)^4,\ \cdots$은 첫째항이 $1+i$, 공비가 $1+i$인 복소수 등비수열이고-----①

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}i,\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i,\ -\frac{1}{4},\ \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, 공비가 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$인 복소수 등비수열이고---②

$-i,\ -1,\ i,\ 1,\ \cdots$은 첫째항이 $-i$, 공비가 $-i$인 복소수 등비수열이다. -----------------③

위에서 예로든 복소수 등비수열의 일반항은 다음과 같다.

① $a_n=(1+i)^n$ ② $a_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)^n$ ③ $a_n=(-i)^n$

문제1. 위의 ①,②,③중 수렴, 발산, 진동하는 복소수 수열을 찾아보시오
수렴: 발산: 진동:

문제2. 다음 복소수 등비수열의 일반항을 구하고 극한값이 있다면 극한값을 구해보자

| | | |
|---|---|---|
| □ $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i,\ (\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i)^2,\ (\frac{1}{4}-\frac{1}{2}i)^3,\ \cdots$ | 일반항: | 극한값: |
| □ $i,\ -1,\ -i,\ 1,\ i,\ -1,\ \cdots$ | 일반항: | 극한값: |
| □ $2-i,\ (2-i)^2,\ (2-i)^3,\ (2-i)^4,\ \cdots$ | 일반항: | 극한값: |
| □ $(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i),\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)^2,\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)^3,\ \cdots$ | 일반항: | 극한값: |

[그림 Ⅳ-3] 단순 조건에서의 학습 자극

또한 2차 실험에서 참가자들은 연구자의 의도에 따라 표상 대응 조건과 개념 대응 조건하에 있게 되는데, 1차 실험에서 표상 대응 조건의 학습 자극을 받은 집단과 개념 대응 조건의 학습 자극을 받은 집단은 1차 실험에서의 표상 대응 조건의 학습 자극과 동형인 학습 자극을 받으며, 1차 실험에서 탐색 조건의 학습 자극과 단순 조건의 학습 자극을 받은 집단은 1차 실험에서의 개념 대응 조건의 학습 자극과 동형인 학습 자극을 받는다. 1차 실험과 2차 실험에서 각 실험 집단에게 주어진 조건들이 <표 Ⅳ-4>에 정리되어 있다.

<표 Ⅳ-4> 1차 실험과 2차 실험의 실험 조건

| 실험 집단 | G1($n$=20) | G2($n$=20) | G3($n$=20) | G4($n$=20) |
|---|---|---|---|---|
| 1차 실험 조건 | 표상 대응 조건 | 개념 대응 조건 | 탐색 조건 | 단순 조건 |
| 2차 실험 조건 | 표상 대응 조건 | 표상 대응 조건 | 개념 대응 조건 | 개념 대응 조건 |

## 4. 연구 절차

### 1) 1차 실험

본 실험이 실시되기 일주일 전에 복소수 등비수열에 관한 수업(복소평면 소개, 복소수의 절댓값 소개, 복소수 등비수열의 기본 개념을 소개)이 이루어졌다. 복소수 등비수열을 소개하는 과정에서 수열의 수렴, 발산, 진동 조건에 관한 내용은 다루지 않았으며, 일주일 후에 본 실험이 진행된다는 사실을 언급하지 않았다. 한 주 후에 본 실험이 실시되었으며 실험이 실시되기 전에 모든 연구 대상자들에게 실험의 목적이 복소수 수열의 이해에 관한 것이라는 것과 실험이 약 2-30분 정도 소요된다는 것을 밝혔다. 또한 적극적인 실험 참여를 독려하였으며, 시작 신호와 종료 신호를 엄수할 것, 별도의 지시가 있을 때 검사지를 뒤로 넘길 수 있다는 것, 정확한 결과를 위해서 문제를 푼 과정이나 답에 대해 논의하면 안 된다는 주의 사항을 제시했다.

1차 실험의 검사지는 복소수 등비수열 복습 내용, 예비 표적 문제, 학습 자극, 1차 표적 문제로 구성되어 있다. 복소수 등비수열의 복습 내용에는 복소평면, 복소수의 절댓값, 그리고 수렴, 발산, 진동하는 복소수 등비수열에 관한 내용들이 포함되어 있었다. 예비표적 문제는 선행 학습을 통하여 이미 표적 문제의 해답을 알고 있거나, 학습 자극이 있기 전에 자발적으로 유추 전이가 일어난 연구 대상자의 자료를 결과 분석에서 제외시키기 위한 장치이다.

1차 실험에 할당된 시간은 복소수 등비수열에 대한 복습시간 5분, 예비 표적 문제를 푸는 시간 2분, 각 조건에 따른 자극에 따라 학습하는 시간 15분, 표적 문제를 푸는 시간 3분으로 총 소요 시간은 약 25분이었다.

### 2) 2차 실험

실험 절차의 원만한 통제를 위하여 2차 실험은 1차 실험이 종료된 후 쉬는 시간 없이 바로 실시되었다. 연속된 실험은 2차 실험을 고려하여 사전에 검사지 세트를 구성하였기 때문에 자연스럽게 진행될 수 있었다. 2차 실험의 검사지는 학습 자극, 2차 표적 문제로 이루어져 있다. 2차 실험의 조건으로 표상 대응 조건, 개념 대응 조건이 설정되었는데, 각 조건에서는 1차 실험과 동형의 학습 자극이 주어지며, 2차 표적 문제는 1차 표적 문제와 동형 문제이다.

바탕 문제의 수가 문제 해결을 위한 도식의 질과 관련되어 유추 전이의 효과에 영향을 줄 수 있다는 Gick과 Holyoak(1983)의 연구 결과를 참고하여, 1차 실험과 2차 실험의 모든 조건에서 문제의 수와 종류는 동일하게 처리했으며 학습 자극만을 다르게 제시하였다. 2차 실험에 할당된 시간은 각 조건에 따른 자극에 따라 학습하는 시간 15분, 표적 문제를 푸는 시간 3분이었으며, 1차 실험과 2차 실험의 모든 과정이 끝난 후 검사지를 바로 회수하였다.

## 5. 자료의 수집 및 분석

회수한 검사지를 분석하여 문제 해결 여부를 확인하였다. 예비 표적 문제를 해결한 참가자는 없었는데, 이것은 모든 자료가 분석 대상이라는 것을 의미하는 것이다. 실험에 참여한 모든 참가자의 검사지를 분석하여 1차 표적 문제와 2차 표적 문제의 해결 여부를 결정하였다.

1차 실험의 표적 문제에 대해서 복소수 등비수열의 수렴 조건, 발산 조건, 진동 조건을 모두 적은 답만을 정답으로 처리하였다. 단, $c=1, d=0$을 복소수 등비수열 $Z_n=(c+di)^n$의 수렴 조건으로 분류하지 않고, 수렴 조건과 진동 조건을 각각 $c^2+d^2<1$과 $c^2+d^2=1$이라

고 판단한 답도 정답으로 인정했다. 2차 실험의 표적 문제에 대해서는 수렴, 발산, 진동을 기준으로 하여 주어진 열 개의 등비수열을 정확하게 분류한 답만을 정답으로 처리하였다.

본 연구의 가설을 검증하기 위하여 SPSS 12.0을 이용한 양적 분석 방법을 적용하여 유추 조건에 따른 문제 해결률에 유의미한 차이가 있는지 여부를 확인하였다. 검정 방법으로 $\chi^2$ 분석을 사용하였으며, 검정에 사용된 유의 수준은 .05로 설정하였다.

# Ⅴ. 연구 결과

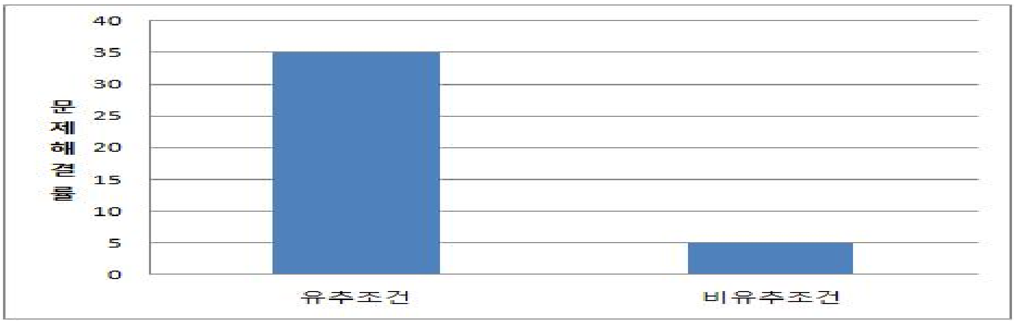
## 1. 연구 가설 1의 검증

연구 가설 1:
유추 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)의 문제 해결률은 높고, 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률은 낮을 것이다.

연구 가설 1을 검증하기 위하여 1차 실험에서의 유추 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)의 문제 해결률과 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률을 비교하였다. 각 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자의 수와 문제 해결률이 <표 Ⅴ-1>에 제시되어 있으며, [그림 Ⅴ-1]은 유추 조건의 문제 해결률과 비 유추 조건의 문제 해결률을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 Ⅴ-1> 유추 조건과 단순 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자 수와 문제 해결률

| 1차 실험<br>조건 | 유추 조건(*n*=60)<br>(표상대응조건, 개념대응조건, 탐색조건) | 비 유추조건(*n*=20)<br>(단순조건) |
|---|---|---|
| 성공 | 21 | 1 |
| 실패 | 39 | 19 |
| 계 | 60 | 20 |
| 해결률(%) | 35 | 5 |




[그림 Ⅴ-1] 유추 조건과 비 유추 조건의 문제 해결률

유추 조건과 비 유추 조건의 문제 해결률을 비교해 본 결과 유추 조건에서 35%의 문제 해결률을 보인 반면, 비 유추 조건의 문제 해결률은 5%였다. 각 조건의 문제 해결률에서 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위해 $\chi^2$ 검정을 실시한 결과, $\chi^2$ 통계량은 6.771, 유의 확률은 .009로서 유의 수준 .05에서 각 조건에 따른 문제 해결률이 유의미한 차이가 있다고 할 수 있다.

이와 같은 결과를 통하여, 유추 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)의 문제 해결률은 높고, 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률은 낮을 것이라는 연구 가설1은 지지되었다.

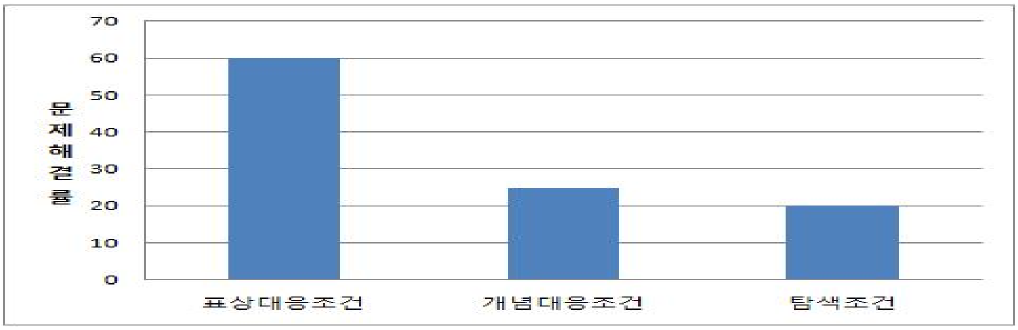
## 2. 연구 가설2의 검증

연구 가설 2:
유추 조건 중 표상 대응 조건의 문제 해결률은 높고, 개념 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률은 모두 낮을 것이다.

연구 가설2를 검증하기 위하여 먼저, 1차 실험의 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건의 문제 해결률을 비교하였다. 각 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자의 수와 문제 해결률이 <표 Ⅴ-2>에 제시되어 있으며, [그림 Ⅴ-2]는 각 조건에서의 문제 해결률을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 Ⅴ-2> 1차 실험의 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자 수와 문제 해결률

| 1차 실험 조건 | 표상대응조건 ($n$=20) | 개념대응조건 ($n$=20) | 탐색 조건 ($n$=20) |
|---|---|---|---|
| 성공 | 12 | 5 | 4 |
| 실패 | 8 | 15 | 16 |
| 계 | 20 | 20 | 20 |
| 해결률(%) | 60 | 25 | 20 |




[그림 Ⅴ-2] 1차 실험 결과 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건의 문제 해결률

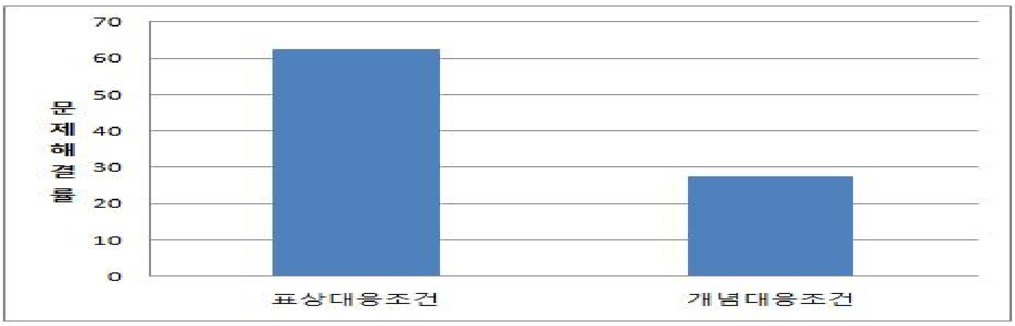
유추 조건별로 문제 해결률을 비교해 본 결과, 표상 대응 조건의 문제 해결률이 60%로 가장 높았고, 개념 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률은 각각 25%, 20%로 낮았다. 유추 조건에 따라 문제 해결률에서 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위하여 표상 대응 조건과 개념 대응 조건, 표상 대응 조건과 탐색 조건에 대한 $\chi^2$ 검정을 각각 실시하였다.

표상 대응 조건과 개념 대응 조건의 문제 해결률에서 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위해 $\chi^2$ 검정을 실시한 결과, $\chi^2$ 통계량은 5.013, 유의 확률은 .025로서 유의 수준 .05에서 각 조건에 따른 문제 해결률이 유의미한 차이가 있다고 할 수 있다. 또한 표상 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률에서 유의미한 차이가 있는지 알아보기 위해 $\chi^2$ 검정을 실시한 결과, $\chi^2$ 통계량은 6.667, 유의 확률은 .010으로서 유의 수준 .05에서 각 조건에 따른 문제 해결률이 유의미한 차이가 있다고 할 수 있다. 한편, 개념 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률은 통계적으로 유의미한 차이가 나지 않았다.

수학적 문제 해결에 있어서 시각적 표상을 통한 유추의 효과는 2차 실험의 표상 대응 조건과 개념 대응 조건의 문제 해결률의 비교를 통해서도 확인되었다. 2차 실험의 표상 대응 조건과 개념 대응 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자의 수와 문제 해결률이 <표 Ⅴ-3>에 제시되어 있으며, [그림 Ⅴ-3]은 2차 실험의 표상 대응 조건, 개념 대응 조건의 문제 해결률을 그래프로 나타낸 것이다. 2차 실험 결과 표상 대응 조건과 개념 대응 조건의 문제 해결률은 각각 62.5%, 27.5%였으며 두 조건의 문제 해결률의 차이가 유의미한지 알아보기 위해 $\chi^2$ 검정을 실시한 결과, $\chi^2$ 통계량은 9.899, 유의 확률은 .002로서 유의 수준 .05에서 각 조건에 따른 문제 해결률이 유의미한 차이가 있다고 할 수 있다.

<표Ⅴ-3> 2차 실험의 표상 대응 조건과 개념 대응 조건에서 유추 전이에 성공한 참가자 수와 문제 해결률

| 2차 실험 조건 | 표상 대응 조건 ($n$=40) | 개념 대응 조건 ($n$=40) |
|---|---|---|
| 성공 | 25 | 11 |
| 실패 | 15 | 29 |
| 계 | 40 | 40 |
| 해결률(%) | 62.5 | 27.5 |




[그림 Ⅴ-3] 2차 실험 결과 표상 대응 조건, 개념 대응 조건의 문제 해결률

이와 같은 결과를 통하여, 유추 조건 중 표상 대응 조건의 문제 해결률은 개념 대응 조건이나 탐색 조건의 문제 해결률보다 높다는 것이 경험적으로 검증되었다.

## Ⅵ. 논의 및 결론

본 연구의 목적은 유추 조건에 따른 수학적 문제 해결 양상을 분석하여 문제 해결에 있어서 유추적 사고의 필요성을 확인하고, 시각적 표상을 통한 유추의 효과를 검증하는 데 있다.

이와 같은 연구 목적을 달성하기 위하여 연구 가설 1과 연구 가설 2가 설정되었으며 연구 가설을 검증하기 위하여 1차 실험과 2차 실험을 통한 양적 분석이 이루어졌다. 연구 가설을 검증하면서 도출된 연구 결과를 중심으로 한 논의 사항은 다음과 같다.

| |
|---|
| 연구 결과 1.<br>문제의 해결과 관련된 바탕 개념을 제시한 유추 조건(표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건)의 문제 해결률은 높았고, 바탕 개념을 제시하지 않은 비 유추 조건(단순 조건)의 문제 해결률은 낮았다. 또한 두 조건의 문제 해결률은 통계적으로 유의미한 차이가 있었다. |

연구 결과 1을 통하여 수학적 문제 해결에 있어서 유추적 사고의 효과를 확인할 수 있다. 실험 집단 G1, G2, G3, G4의 모든 참가자들은 이미 다양한 복소수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 양상을 확인하였으며, 검사지 맨 앞장에서도 수렴, 발산, 진동하는 복소수 등비수열에 관한 복습 내용이 제시되어 있었다. 하지만 예비 표적 문제를 해결한 참가자가 없었으며, 비 유추 조건(단순 조건)에 있던 참가자 중에서도 단 한 명(5%)만이 바탕 지식에 대한 단서를 받지 않고 표적 문제를 해결할 수 있었다. 이와 같이 바탕 지식인 실수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 조건을 알고 있었음에도 비 유추 조건인 단순 조건에서 문제 해결률이 낮았던 것은 문제 해결 상황에서 유추를 이용하지 않을 경우에 이미 알고 있는 바탕 지식의 사용이 제한된다는 것을 의미한다.

이는 수학적 문제 해결에 있어서 전략적인 유추적 사고의 필요성을 시사해주는 것으로 일반적인 표적 문제 해결 상황에서는 바탕 문제의 인출과 관련된 명시적인 단서가 제시되지 않기 때문에 문제를 푸는 과정에서 항상 기존의 지식을 점검해 보는 유추적 사고가 필요할 것이라는 해석이 가능하다. 이러한 관점에서 본 연구의 결과는 수학적 문제 해결에 있어서 유추적 사고의 필요성을 강조한 이경화(2009), 이승우와 우정호(2002), Lee와 Sriraman(2011), 그리고 Polya(2002, 2003)의 주장을 뒷받침해 주는 경험적인 근거가 될 수 있을 것이다.

한편, 우정호(2004)와 Polya(2002, 2003)는 유추를 귀납 추론의 완성을 위한 가장 중요한 도구 중 하나로 제시하고 있는데, 복소수 등비수열의 수렴, 발산, 진동 양상을 직접 확인해 보는 귀납 활동을 했지만 단순 조건하에 있던 참가자들이 낮은 문제 해결률을 보인 실험 결과는 귀납 추론과 관련하여 우정호(2004)와 Polya(2002, 2003)의 주장을 지지하는 실증적인 근거로 해석할 수 있다.

관찰된 사례의 공통 성질에 주목하고 일반적인 법칙을 추측하는 귀납 추론을 통하여 수학

적 지식을 발견하고 문제를 해결하고자 한다면, 반드시 유추적 사고가 수반되어야 한다는 사실은 현장에 있는 교육자나 학습자에게 의미 있는 시사점이 될 것이다.

| |
|---|
| 연구 결과 2.<br>유추 조건 간의 문제 해결률은 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건 순으로 높았다. 표상 대응 조건과 개념 대응 조건의 문제 해결률은 통계적으로 유의미한 차이가 있었으며, 표상 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률에서도 통계적으로 유의미한 차이가 있었다. 그러나, 개념 대응 조건과 탐색 조건의 문제 해결률은 통계적으로 유의미한 차이가 없었다. |

1차 실험에서 바탕 개념과 표적 개념을 함께 제시한 개념 대응 조건과 바탕 개념만을 제시한 탐색 조건의 표적 문제 해결률은 각각 25%와 20%였으며, 통계적으로 유의미한 차이가 없었다. 이와 같은 G2 집단과 G3 집단의 1차 실험 결과만을 놓고 보면, 유추 전이에 있어서 바탕 개념과 표적 개념의 구조적인 일대일 대응을 전제하는 Gentner(1983)의 관점이 지지되지 않는 것으로 해석이 가능하다.

하지만, G2 집단과 G3 집단 내에서의 1차 실험 결과와 2차 실험 결과에 대한 비교는 또 다른 해석을 가능하게 한다. G2 집단은 개념 대응 조건하에서 25%였던 문제 해결률이 표상 대응 조건하에서 65%로 수치상으로 보면 40%가 증가한데 반하여, G3 집단은 탐색 조건하에서 20%였던 문제 해결률이 개념 대응 조건하에서 30%로 10%밖에 수행이 향상되지 않았다. 이와 같은 결과는 유추 전이의 대응 단계에서 바탕 개념과 표적 개념이 단순하게 기계적으로 정렬되어야 하는 것이 아니라 각 요소들이 정렬될 때 유추 전이를 위한 최적의 대응이 필요하다는 Holyoak과 Thagard(1989, 1995)의 연구 결과를 만족시키는 것이며, 유추 전이에 있어서 바탕 개념과 표적 개념의 구조적이고 대칭적인 대응을 전제하는 Gentner(1983)의 관점을 보완해주는 것이다.

또한 바탕 개념과 표적 개념을 대응시키는 과정에서 시각적 표상을 활용하는 것이 효과적이라는 연구 결과는 일반적인 수준에서 개념의 대응만으로 유추 전이가 일어나지 않으며, 바탕 문제에 대한 해법을 표적 문제의 해결책과 공유하는 적용 과정이 필요하다는 Novick과 Holyoak(1991)의 연구 결과와 같은 맥락으로 해석할 수 있다. 본 연구에서 설정한 유추 조건인 표상 대응 조건, 개념 대응 조건, 탐색 조건에 대한 전체적인 실험 결과는 바탕 지식의 인출이나, 바탕과 표적의 개념 대응만으로 성공적인 유추 전이가 보장되지 않으며, 표적 문제의 해결을 위하여 바탕 문제에 대한 해법을 실행하는 적용 과정이 반드시 수반되어야 한다는 Novick과 Holyoak(1991)의 연구 결과를 지지해 주는 또 다른 근거가 되는 것이다.

표상 대응 조건하에 있었던 참가자들은 시각적 표상을 통하여 실수 등비수열과 복소수 등비수열을 잠정적으로 대응시키고, 이를 통하여 표적 문제에 대한 해법을 추측할 수 있었는데, 이러한 절차를 Lee와 Sriraman(2011)이 설정한 OCA를 통한 문제 해결과 Novick과 Holyoak(1991)이 제시하고 있는 적용 과정의 연장선상에서 분석해보면, 바탕과 표적을 대응시키는 과정에서 학생들이 구성할 수 있었던 시각적 표상은 바탕 문제와 표적 문제가 공유하고 있는 해법에 대한 도식을 추측하고 표적 문제의 해결을 위하여 적용하는 과정에 영향을 주었기 때문에 표적 문제의 해결이 가능했을 것이라는 해석을 할 수 있다.

이상의 연구 결과1과 연구 결과2는 수학적 문제 해결 과정에서 유추적 사고의 필요성을 함의하고 있으며, 시각적 표상을 통하여 바탕 개념과 표적 개념의 관계적 유사성을 인식하는 것이 성공적인 수학적 문제 해결과 밀접하게 관련되어 있다는 주장을 지지하는 경험적인 근거가 될 수 있다. 그러므로 본 연구는 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

첫째, 문제 해결 상황에서 이미 알고 있는 바탕 지식의 사용이 제한될 수 있기 때문에, 수학적 문제 해결에 있어서 의도적이고 전략적인 유추적 사고가 필요할 것이다.

둘째, 시각적 표상을 통한 유추는 수학적 문제 해결에 있어서 의미 있는 역할을 하기 때문에, 문제 해결 과정에서 시각적 표상을 구성해 보는 활동을 통하여 바탕 개념과 표적 개념의 관계적 유사성을 인식하고, 표적 문제의 해결을 위하여 바탕 문제의 해법을 적용시키는 노력이 필요할 것이다.

본 연구는 실험적인 근거를 토대로 수학적 문제 해결에 있어서 유추적 사고의 필요성을 확인하였고, 시각적 표상을 통한 유추가 효과적이라는 것을 검증했다는 점에서 의의가 있을 것이다.

## 참고문헌


박현정, 이종희 (2007). 대수 문장제 해결 과정에서 나타나는 의사 분석적 사고와 분석적 사고에 대한 분석, 수학교육학연구, 17(1), 67-90.

우정호 (2004). 학교수학의 교육적 기초(증보판). 서울: 서울대학교 출판부.

이경화 (2009). 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할. 수학교육학연구, 19(3), 355-369.

이승우, 우정호 (2002). 학교 수학에서의 유추와 은유. 수학교육학연구, 12(4), 523-542.

이종희, 김선희 (2002). 인수분해 문제 해결과 유추. 학교수학, 4(4), 581-599.

이종희, 김진화, 김선희 (2003). 중학생을 대상으로 한 대수 문장제 해결에서의 유추적 전이. 수학교육, 42(3), 353-368.

Ahmad, A., Tarmizi, R. A., & Nawawi, M. (2010). Visual representations in mathematical word problem solving among form four students in Malacca, *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8,* 356-361.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215-241.

Bassok, M. (2001). Semantic alignments in mathematical word problems. In D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. N. Kokinov (Eds.), *The analogical mind: Perspectives from cognitive science* (pp. 401-434). Cambridge, MA: MIT Press.

Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 15,* 153-166.

Carlson, M. P., & Bloom, I. (2005). The cyclic nature of problem solving: An emergent multidimensional problem-solving framework. *Educational Studies in Mathematics, 58,* 45-75.

Corter, J. E., & Zahner, D. C. (2007). Use of external visual representations in probability problem solving. *Statistics Education Research Journal, 6*(1), 22-50.

Diezmann, C. M., & English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. In A. A. Cuoco (Ed.), *2001 National Council of Teachers of Mathematics Yearbook: The role of representation in school mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dunbar, K. (2001). The analogical paradox: Why analogy is so easy in naturalistic settings, yet so difficult in the psychology laboratory? In D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. N. Kokinov (Eds.), *The analogical mind: Perspectives from cognitive science* (pp. 313-334). Cambridge, MA: MIT Press.

English, L. D. (1998). Reasoning by analogy in solving comparison problems. *Mathematical Cognition, 4*(2), 125-146.

English, L. D. (Ed.). (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young leaders.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science, 7,* 155-170.

Gentner, D., & Markman, A. B. (1997). Structure mapping in analogy and similarity. *American Psychologist, 52*(1), 45-56.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology, 12,* 306-355.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology, 15,* 1-38.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1989). Analogical mapping by constraint satisfaction. *Cognitive Science, 13,* 295-355.

Holyoak, K. J., & Thagard, P. (1995). Mental leap: Analogy in creative thought. Cambridge, MA: MIT Press.

Lee, K. H., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 123-140.

Novick, L. R. (1995). Some determinants of successful analogical transfer in the solution of algebra word problems. Thinking and Reasoning, 1(1), 5-30.

Novick, L. R., & Holyoak, K. J. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17*(3), 398-415.

Piaget, J. (1950). *The psychology of intelligence.* London: Routledge and Kegan Paul.

Polya, G. (2002). 어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고와 방법-(우정호 역). 서울: 경문사. (원저는 1971년에 출판).

Polya, G. (2003). 수학과 개연 추론 (1권: 수학에서의 귀납과 유추)(이만근, 최영기, 전병기, 홍갑주, 김민정 역). 서울: 교우사. (원저는 1990년에 출판).

Reed, S. K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 13*(1), 124-139.

Reed, S. K., Dempster, A., & Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 11*(1), 106-125.

Richland, L. E., Holyoak, K. J., & Stigler, J. W. (2004). Analogy use in eighth-grade mathematics classroom. *Cognition and Instruction, 22*(1), 37-60.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sternberg, R. J. (2005). 인지심리학(김민식, 손영숙, 안서원 역). 서울: 박학사. (원저는 2003년에 출판).

Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of a visual representation in expert problem solving. *Journal of Mathematical Behavior, 21*(3), 303-317.

Weisberg, R. W. (2009). 창의성: 문제해결, 과학, 발명, 예술에서의 혁신(김미선 역). 서울: 시그마프레스 (원저는 2006년에 출판).

Wilson, W. H., Halford, G. S., Gray, B., & Phillips, S. (2001). The STAR-2 model for mapping hierarchically structured analogs. In D. Gentner, K. J. Holyoak, & B. N. Kokinov (Eds.), *The analogical mind: Perspectives from cognitive science* (pp. 125-157). Cambridge, MA: MIT Press.

Wu, C. L. (2003). *Visual representations and mental models: Thinking about probability.* Unpublished doctoral dissertation, Columbia University. New York, NY.

Zahner, D. C., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(2), 177-204.

# The Effects of Mathematical Problem Solving depending on Analogical Conditions

Ban, Eun Seob[1] · Shin, Jaehong[2]

## Abstract

This study was conducted to confirm the necessity of analogical thinking and to empirically verify the effectiveness of analogical reasoning through the visual representation by analyzing the factors of problem solving depending on analogical conditions. Four conditions (a visual representation mapping condition, a conceptual mapping condition, a retrieval hint condition and no hint condition) were set up for the above purpose and 80 twelfth-grade students from C high-School in Cheong-Ju, Chung-Buk participated in the present study as subjects. They solved the same mathematical problem about sequence of complex numbers in their differed process requirements for analogical transfer.

The problem solving rates for each condition were analyzed by Chi-square analysis using SPSS 12.0 program. The results of this study indicate that retrieval of base knowledge is restricted when participants do not use analogy intentionally in problem solving and the mapping of the base and target concepts through the visual representation would be closely related to successful analogical transfer.

As the results of this study offer, analogical thinking is necessary while solving mathematical problems and it supports empirically the conclusion that recognition of the relational similarity between base and target concepts by the aid of visual representation is closely associated with successful problem solving.

Key Words: Analogical Reasoning, Mathematical Problem Solving, Visual Representation, Sequence of Complex Numbers.

1) Graduate school of Korea National University of Education (hymnes@naver.com)
2) Korea National University of Education (jhshin@knue.ac.kr)

【부록】G2 검사지

# 복소수 수열 검사지 (G2)

| |
|---|
| 여러분이 참여하는 이 수학 실험은 다양한 방식으로 학습한 개념들을 얼마나 잘 기억하고 활용하는지 알아보기 위한 것입니다. 여러분들이 느끼고 고민한 사실들을 상기해 본 후 검사 문항들에 대해 **소신껏 자세하게 기록하여 주시기 바랍니다.**<br>본 검사지의 결과는 연구 목적으로만 활용될 것이며, 개인 정보는 일체 공개되지 않을 것입니다. 여러분들의 적극적인 참여를 부탁드립니다. 감사합니다. |

이전에 배운 내용을 상기해 보면서 다음을 자세히 읽어봅니다.(5분)

■ 복소수의 표현

복소수는 주어진 좌표평면의 순서쌍으로 생각할 수 있다. 예를 들면 5+4i 는 좌표평면의 순서쌍 (5,4)와 대응된다. 모든 복소수를 평면에 표현할 수 있으며, 이러한 평면을 복소평면이라 한다.

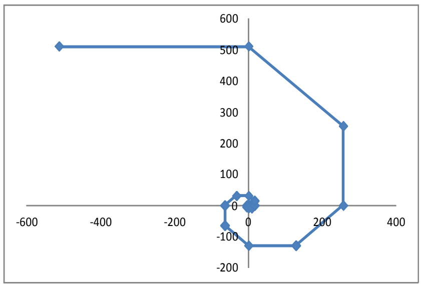
■ 복소수의 절댓값

복소수 a+bi의 절댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$ 이다 예를 들어 $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ 이다. 복소수의 절댓값은 실수이며, 이 값은 원점에서부터의 거리를 의미한다.

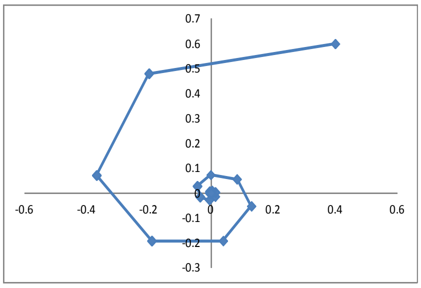
■ 복소수 수열의 수렴, 발산, 진동

이 실험에서 복소수 수열의 수렴은 $0$으로 수렴하는 것을 의미하고, 발산은 복소수의 절댓값이 점점 커지는 것을 의미하며, 수렴도 발산도 아닌 것을 진동이라 하겠다.

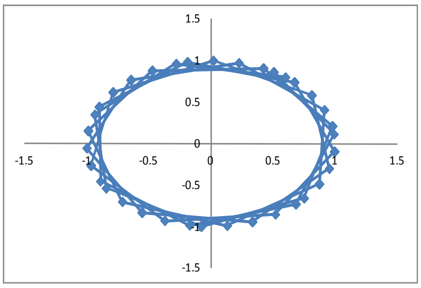
다음은 지난 시간 엑셀을 이용하여 학습한 복소수 등비수열의 몇 가지 예이다.



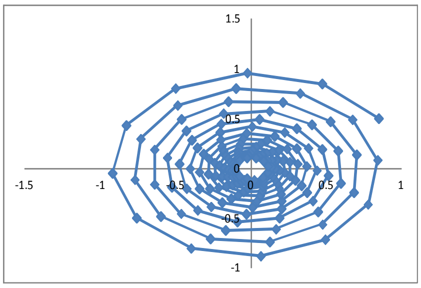

$Z_n=(1+i)^n$ (발산)




$Z_n=(0.4+0.6i)^n$ (수렴)




$Z_n=(0.6+0.8i)^n$ (진동)




$Z_n=(0.85+0.5i)^n$ (수렴)

**별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요**

| |
|---|
| 주의사항1. 별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 앞장, 또는 뒷장으로 넘기지 마세요.<br>주의사항2. 세 문제의 풀이시간은 2분입니다. |

문제1. 앞에서 살펴본 바와 같이 $Z_n = (a+bi)^n$ 꼴의 복소수 수열이 수렴하기 위해서 $a$와 $b$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가?
(답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

문제2. 앞에서 살펴본 바와 같이 $Z_n = (a+bi)^n$ 꼴의 복소수 수열이 발산하기 위해서 $a$와 $b$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가?
(답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

문제3. 앞에서 살펴본 바와 같이 $Z_n = (a+bi)^n$ 꼴의 복소수 수열이 진동하기 위해서 $a$와 $b$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가?
(답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

**별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요**

| |
|---|
| <등비수열> 에 관한 다음 글을 15분 동안 읽게 됩니다. **천천히 정독하시기 바랍니다. 확인한 내용을 잘 기억해야 합니다.** |

**※ 다음 예를 읽어보면서 밑줄을 채우고, *실수로 된 등비수열과 복소수까지 확장된 등비수열을 비교하면서 수열의 극한을 생각해 보세요.***

**■ $0$으로 수렴하는 등비수열의 예 ■**

| 실수 등비수열 | 복소수 등비수열 |
|---|---|
| $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$는 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 __인 등비수열이며 일반항은 ________ 이다. | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,\ \frac{1}{2}i,\ -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i,\ -\frac{1}{4},\ \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ 공비가 ____ 인 등비수열이며 일반항은 ____________ 이다. |

**■ 발산하는 등비수열의 예 ■**

| 실수 등비수열 | 복소수 등비수열 |
|---|---|
| $2, 2^2, 2^3, 2^4, \cdots$은 첫째항이 $2$, 공비가 인 등비수열이고, 일반항은 _____ 이다. | $1+i,\ (1+i)^2,\ (1+i)^3,\ (1+i)^4,\ \cdots$은 첫째항이 $1+i$, 공비가 _____ 인 등비수열이며 일반항은 _________ 이다. |

**■ 진동하는 등비수열의 예 ■**

| 실수 등비수열 | 복소수 등비수열 |
|---|---|
| $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$은 첫째항이$-1$, 공비가 ____인 등비수열이고, 일반항은 ____이다. | $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i,\ (\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)^2,\ (\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i)^3 \cdots$은 첫째항이 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ 공비가 ____ 인 등비수열이고, 일반항은 _________ 이다. |

**■ 등비수열의 극한 ■**

| |
|---|
| 첫째항부터 시작하여 차례로 일정한 수를 곱하여 얻어지는 수열을 **등비수열**이라 하고, 곱해주는 일정한 수를 **공비**라고 한다.<br>위에서 살펴본 실수 등비수열과 복소수 등비수열의 **개념을 비교**하며 **수열의 극한**을 생각해 보세요. |

**<u>별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요</u>**

주의사항1. 세 문제의 풀이시간은 3분입니다.
주의사항2. **문제를 풀기 위해서 앞장의 내용을 다시 한번 생각해보고 수학적으로 유사한 관계를 깨달으려는 노력을 해야 합니다.**

문제1. $Z_n = (c + di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 수렴하기 위해서 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? (답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

문제2. $Z_n = (c + di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 발산하기 위해서 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? (답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

문제3. $Z_n = (c + di)^n$ 꼴의 복소수 수열이 진동하기 위해서 $c$와 $d$가 어떠한 조건을 만족시켜야 하는가? (답을 생각하기까지 고민한 내용을 모두 적어보세요)
→

**별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요**

**※ 방정식의 근을 이용해 정삼각형과 정사각형을 나타낼 수 있습니다. 다음을 확인해 봅시다.**

| |
|---|
| 문제. **복소수까지 생각하여** 다음 방정식의 근을 구한 후, 복소평면에 근을 모두 나타내 보시오. (제한 시간 5분) |

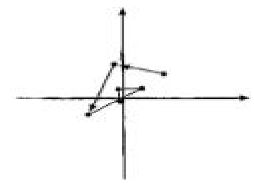
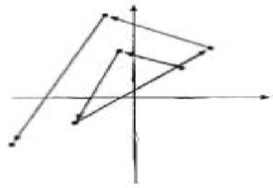
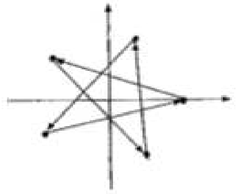
**(1)** $x^3-1=0$

**(2)** $x^4-1=0$

<ins>**별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요**</ins>

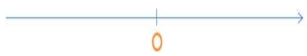
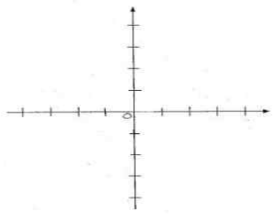
| |
|---|
| 1. 다음의 등비수열에 관한 내용을 **15분간 살펴보겠습니다.** |
| 2. **실수로 된 등비수열과 복소수까지 확장된 등비수열을 그림을 통해 비교해 봅니다.** |

수의 범위를 복소수까지 생각한 복소수 등비수열의 극한은 다음과 같이 세 가지 종류가 있다.

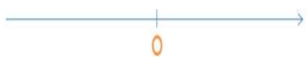
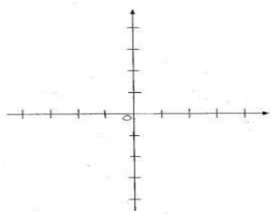
| 0으로 수렴 | 무한대로 발산 | 진동 |
|---|---|---|
|  |  |  |

**※ 다음 예를 읽어보면서 밑줄을 채우고, 실수로 된 등비수열과 복소수까지 확장된 수열을 *<u>수직선과 복소평면에 각각 표현해 보면서 비교</u>*하고, 수열의 극한을 생각해 보세요.**

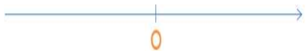
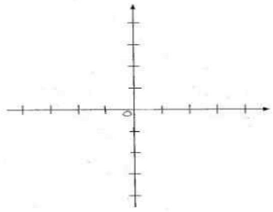
■ $0$으로 **수렴하는 등비수열의 예** ■

| 실수로 된 등비수열 | 복소수까지 확장된 등비수열 |
|---|---|
| $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$는 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 ________인 등비수열이며 일반항은 ____ 이다. | $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i,\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)^2,\ (\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i)^3, \cdots$은 첫째항이 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ 공비가 _____ 인 등비수열이며 일반항은 __________ 이다. |
|  |  |

■ **발산하는 등비수열의 예** ■

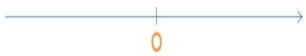
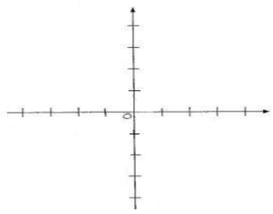
| 실수로 된 등비수열 | 복소수까지 확장된 등비수열 |
|---|---|
| $-2,\ (-2)^2,\ (-2)^3, \cdots$은 첫째항이 $-2$, 공비가 _______인 등비수열이고, 일반항은 이다. | $1-i,\ (1-i)^2,\ (1-i)^3,\ (1-i)^4, \cdots$은 첫째항이 $1-i$, 공비가 _____ 인 등비수열이며 일반항은 _________ 이다. |
|  |  |

■ **진동하는 등비수열의 예** ■

| 실수로 된 등비수열 | 복소수까지 확장된 등비수열 |
|---|---|
| $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$은 첫째항이 $-1$,<br>공비가 ___ 인 등비수열이고,<br>일반항은 ____이다. | $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i,\ (\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i)^2,\ (\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i)^3\cdots$은<br>첫째항이 $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$ 공비가 ____ 인<br>등비수열이고, 일반항은 _________ 이다. |
|  |  |

■ **등비수열의 극한** ■

앞에서 살펴본 실수와 복소수 등비수열의 그림들이 공통적으로 **복소수 등비수열의 극한**과 어떻게 관련될 것인가를 **수직선과 복소평면에서 비교**하며 생각해보세요.

| | |
|---|---|
|  |  |

**<u>별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요</u>**

| |
|---|
| 주의사항1. 별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 앞장, 또는 뒷장으로 넘기지 마세요.<br>주의사항2. 문제의 풀이시간은 3분입니다.<br>주의사항3. **문제를 풀기 위해서 앞장의 내용을 다시 한번 생각해보고 수학적으로 유사한 관계를 깨달으려는 노력을 해야 합니다.** |

<문제> 다음 제시되는 복소수 수열의 극한값을 생각해 보고, 수렴하는 수열, 발산하는 수열, 진동하는 수열을 각각 찾아서 모두 적으세요.

[보기]

① $Z_n=(\frac{1}{5}-i)^n$ ② $Z_n=(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i)^n$ ③ $Z_n=(1-i)^n$ ④ $Z_n=(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}i)^n$

⑤ $Z_n=(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}i)^n$ ⑥ $Z_n=(\frac{\sqrt{2}}{5}-\frac{\sqrt{3}}{5}i)^n$ ⑦ $Z_n=(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{5}i)^n$ ⑧ $Z_n=(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i)^n$

⑨ $Z_n=(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i)^n$ ⑩ $Z_n=(\frac{7}{9}+\frac{1}{3}i)^n$

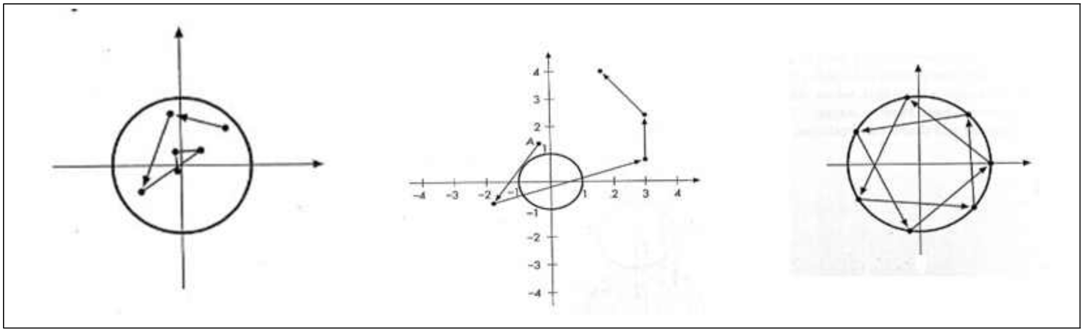
수렴하는 수열:

발산하는 수열:

진동하는 수열:

**별도의 지시가 있을 때까지 검사지를 넘기지 마세요**

실험이 모두 끝났습니다. 여러분들 수고 많았습니다.
본 검사지에 나오는 문제들을 해결하기 위해서는 실수 등비수열과 복소수 등비수열의 극한이 공통적으로 공비와 관련이 있다는 것을 확인하는 것이 핵심이었습니다.
복소수 수열의 수렴, 발산, 진동에 관한 정보는 아래의 그림과 같습니다.



새로운 문제를 해결하기 위해 이미 알고 있는 지식을 이용하는 방법을 유추라고 합니다. 수학뿐만이 아니라 모든 학문의 창조적인 발견에 있어서 유추는 핵심적으로 작용합니다. 유추를 잘 이용하지 못하는 경우도 있습니다. 그 이유는 막상 문제를 해결하기 위해서 내가 알고 있는 지식을 생각할 수 없거나, 생각을 하더라도 적절하게 활용하지 못하기 때문입니다.
새로운 환경에 적응하거나 문제를 해결하기 위해서는 내가 알고 있는 지식을 적절하게 활용하려는 노력이 필요합니다. 이 실험은 새로운 문제(복소수 등비수열)를 해결하는 과정에서 이미 알고 있는 지식(실수 등비수열)을 적절하게 활용하기 위해서는 어떠한 학습 조건이 필요한지 알아보기 위하여 실시되었습니다. 앞으로 새로운 수학 문제가 나오면, 이전에 풀어본 비슷한 구조의 문제와 그 문제에 대한 풀이 방법을 생각하면서 문제 풀이에 접근하시기 바랍니다.