한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 3, 395-410, September 2012

수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면 연구[1)]

양성현[2)] · 이환철[3)]

수학 교수학습 관련 자료를 개발하거나 수업을 계획할 때에는 지도 내용 간의 위계나 연계를 고려하여 내용이나 순서를 적절하게 변화시켜 재구성해야 한다. 또한 교사는 학생들이 수학적 개념을 독립적이고 단절적으로 이해하는 것이 아니라 관계적이고 반영적으로 이해할 수 있도록 지도해야 하며 이를 위한 철저한 준비가 필요하다. 이를 위하여 본 연구는 수학적 연결성에 대한 선행연구를 메타적으로 분석하여 외적·내적, 내용적·형식적으로 분류하였으며 수학 외적 연결성과 수학 내적 연결성이 형식적 측면에서 유사성과 비경계성이 존재함을 확인하고 이를 바탕으로 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면의 원리를 정의하고 구체적인 사례를 제시하였다.

주요용어 : 수학 내적 연결성, 수학적 연결성, 계열성, 공유성, 연계성, 조직성, 통합성

Ⅰ. 서론

교육과정에 제시된 내용은 어느 특정 학생들이 학습해야 할 기준이라기보다는 모든 학생들이 학습해서 도달해야 할 기준이므로, 수업에서는 교육과정에 제시된 내용을 모든 학생들이 습득할 수 있도록 한다. 학습 능력, 흥미, 관심, 학습 양식 등과 같은 다양한 학습자의 특성을 고려해야 할 뿐만 아니라 수학 교과가 가지고 있는 위계적이고 누적적인 성격을 감안하여 학년 간 지도 내용의 연계성을 고려하고, 지역의 실정이나 학교의 여건 등을 고려하여 학생 개개인에 알맞은 지도가 이루어질 수 있도록 한다(교육과학기술부, 2008). 그러나 학년별 내용의 배열 순서가 반드시 교수학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로 교수학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 재구성하여 편성 운영할 수 있다(교육과학기술부, 2011). 다시 말해 교수학습 자료를 개발하거나 수업을 계획할 때에는 지도 내용 간의 위계나 연계, 난이도, 학습자의 특성, 학교 여건 등을 고려하여 내용이나 순서를 적절하게 변화시켜 재구성할 것을 요구하고 있다.

수학 교수학습에 대한 위계와 연계의 내용적인 측면은 교육과정 해설서나 교사용 지도서 등을 통하여 포괄적으로 언급되어 있으며 단위 학교는 학교 여건 등을 고려하여 내용적인

---

1) 본 논문은 양성현의 박사학위 논문 일부를 보완 정리한 것입니다.

2) 경희고등학교 (mathematics@korea.com)

3) 한국과학창의재단 (singgri@kofac.re.kr), 교신저자

측면의 지도방식을 결정할 수 있다. 그러나 수업의 형식적인 측면, 다시 말해 어떠한 전략을 사용하여 접근할 것인가에 대해서는 교사 개개인이 상황에 맞도록 재구성해야 한다.

Sfard(2003)는 학습자 중심의 교육과정 원리를 벗어나지 않는 범위에서 학생들로 하여금 구조를 이해시키기 위한 수학적 연결성의 의미를 강조하였다. 또한 이러한 교수학습 상황을 조성하는 것이 교사의 책임이자 의무라고 강조하였다.

이러한 측면에서 수학 교수학습에 있어서 수학적 연결성의 전략에 관한 형식적 측면에 대한 체계적인 연구가 필요하다. 이러한 연구는 수학과 교육과정 개발과 현장 적용에 크게 기여할 수 있다.

NCTM(2000)의 연결성 규준(Connections Standard)에서도 수학적 아이디어 사이의 연결성을 인식하고 활용할 것과 수학적 아이디어가 서로 어떻게 연결되어 있는지 이해하고 각각의 아이디어에 기초하여 일관된 전체를 산출할 것을 강조하고 있다. 이러한 점에서 교사는 학생들이 수학적 개념을 독립적이고 단절적으로 이해하는 것이 아니라 관계적이고 반영적으로 이해할 수 있도록 지도해야 하며 이를 위한 철저한 준비가 필요함을 강조하고 있다.

본 연구는 이러한 필요성에 근거하여 수학적 연결성에 대한 선행연구를 메타적으로 분석하여 외적·내적, 내용적·형식적으로 분류하였다. 이를 통해 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면 즉 수학 내적 연결성에 관해 어떠한 교수 전략을 통해 접근해야 하는지 그 원리를 논하고 그 구체적인 사례를 제시하는 것을 목적으로 한다.

Ⅱ. 수학적 연결성에 관한 분석

1. 수학 내적 연결성의 의미

국립국어원의 표준국어대사전[4]에 의하면 '연결'의 의미를 '사물과 사물 또는 현상과 현상이 서로 이어지거나 관계를 맺음'이라 정의하고 있으며 영어사전(Collins Cobuild Advanced Learner's English Dictionary)[5]에서는 연결성(Connection)을 「a relationship between two things, people, or groups」라 정의하고 있다. Hatfield et al.(2007)는 수학을 실생활이나 다른 학문에 적용하는 것으로 수학을 고립된 개념이나 기술로 생각하기 보다는 통합된 것으로 보는 것으로 수학적 연결성을 정의하였다. NCTM(1989)의 'Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics'는 다음과 같은 네 가지 규준에 대하여 역설한다.

- 문제해결로서의 수학 (Mathematics as Problem solving)
- 의사소통으로서의 수학 (Mathematics as Communication)
- 추론으로서의 수학 (Mathematics as Reasoning)
- 수학적 연결성 (Mathematical Connections)

네 가지 규준 중의 하나인 수학적 연결성을 통하여 수학과 수학을, 수학과 다른 교과과정을, 수학과 우리의 일상생활을 연결하는 것이 학교 수학의 중요한 목표라고 주장하였다.

4) http://stdweb2.korean.go.kr (2012.07.15 검색)
5) http://endic.naver.com (2012.07.15 검색)

수학 교육에 있어서의 변화를 요구하는 다양한 논문(강경애, 남승인, 1996; 이재돈, 2000; Sfard, 2003)에서도 수학은 모든 학생들이 이해하기 쉽게 만들어져야 하고, 이산적인 주제보다는 연계된 교과목으로 제시되어야 하며, 수학이 다른 교과와 학생들의 관심과 경험에 연결되어진 의미 있는 내용으로 학습되어야 함이 폭넓게 의견의 일치를 보고 있다. 또한 NCTM(1989)에서는 각각의 학년에서 네 가지의 공통된 규준 중의 하나로써 학생들이 다양한 수학적 주제의 연결성과 상호작용을 경험할 수 있도록 기회를 제공할 것을 요구하고 있다. 학생들이 어떻게 수학적 주제의 연결성과 상호작용을 경험하느냐에 대해서는 간단하게 요약될 수 있는 문제는 아니다. 그것은 다양한 측면을 지니고 있으며 각 측면은 포괄적으로 논의할만한 가치가 있다. NCTM(1989)은 각각의 규준에서는 학생들이 수학적 연결성을 경험할 수 있는 방법에 대한 묘사가 폭넓게 나타나고 있으며 그러한 결과를 다음과 같이 나타내고 있다.

첫째, 개념적 지식과 절차적 지식을 연결한다.
둘째, 다른 교육과정 안에서 수학을 사용할 수 있다.
셋째, 매일 매일의 일상적인 활동 속에서 수학을 사용할 수 있다.
넷째, 통합된 전체로써 수학을 볼 수 있다.
다섯째, 미술, 음악, 철학, 과학, 경제와 같은 타 교과에서 도출되어지는 문제를 해결하기 위하여 수학적 사고와 모델링을 적용할 수 있다.
여섯째, 수학적 주제들 사이에서 연결성을 사용하고 가치 있게 평가하게 된다.
일곱째, 같은 개념의 동치 표현을 인식하게 된다.

NCTM(2000)에서는 학생들이 서로 다른 영역의 수학 사이의 연결성을 이해할 수 있을 때, 수학을 통합된 전체로 보게 된다고 언급하고 있으며 이미 알고 있는 수학 개념을 토대로 새로운 수학 개념을 구성할 때 학생들은 다양한 수학 영역 사이의 연결성을 더 깊이 인식하게 된다고 하였다. 또한 학생들의 수학에 대한 지식, 다양한 수학적 표현을 사용하는 능력, 기술공학과 소프트웨어를 다루는 능력이 증진됨에 따라, 다른 학문 분야 특히 자연과 과학, 사회과학과의 연결성을 이해하는 것은 수학적 힘의 신장에 도움이 된다고 강조하며 연결성의 유형을 다음과 같이 세 가지로 정리하고 있다.

첫째, 다양한 수학적 개념과 생각 사이의 연결성
둘째, 교과의 긴밀성을 논증하는 다양한 영역들 안에서의 또는 영역들 사이의 연결성
셋째, 수학과 타교과와의 연결성

이러한 각각의 연결성은 학생의 이해를 형성하고 모든 수준에서 수학을 가르치는데 포함된다(Dossey et al., 2002). 본 연구는 NCTM(2000)에서 논한 연결성 중 첫째와 둘째 다시 말해, 수학 내적 연결성에 초점을 맞추고자 한다. 수학적 개념들 사이의 내적 연결성을 고려하여 수업을 진행함으로써 학생들의 개념과 생각 사이의 연결성을 구축하여 수학적 개념에 대한 다면적 이해를 높이고 나아가 스스로 확장할 수 있는 능력을 키워주기 위함이다.

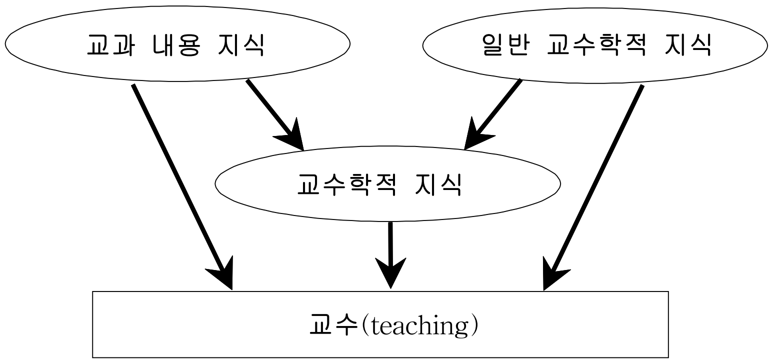
학생들은 수학적 개념들 사이의 같은 개념의 동치 표현의 인식을 다양한 측면으로 이해를 함으로써 수학적 개념들 사이의 연결성을 구축하여 통합된 전체로서 개념을 인식할 수 있다. 이를 통하여 학생들은 수학적 개념을 관계적(Skemp, 2001)이고 다면적으로 이해할 수

있다. 강경애, 남승인(1996)은 만약 학생들이 이해되지 않은 상태에서 규칙이나 절차들을 학습한다면 결과적으로 기억에 의존하게 되며 기억된 내용을 잊어버릴 수 있다는 망각에 대한 공포증으로 인해 수학 학습에 대한 두려움을 느끼게 될 것이라고 하였다. 또한 NCTM(2000)은 학생들이 해결할 문제 상황의 대부분은 그 해결 방안이나 절차가 매우 복잡하므로 개별적인 규칙이 있는 독립된 수많은 낱개의 지식만으로는 문제 해결에 적절하게 대처하고 적용하는 데 어려움이 따를 것이라 언급하며 연결성을 유지할 수 있는 방안으로 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 강조하였다.

이상으로부터 수학적 연결성 중 내적 연결성은 수학적 개념 사이의 연결성이라 정의할 수 있으며, 수학을 통합된 전체로서 바라보며 개념적 지식과 절차적 지식의 연결, 같은 개념의 동치 표현, 수학 내용 사이의 연결 등을 인식하도록 형식적 측면에서 접근해야 함을 확인할 수 있다.

2. 수학적 연결성에 관한 메타적 분석

유능한 교사는 교과내용을 학생들이 이해할 수 있는 형태로 변환시켜 수업을 진행한다. 그러기 위해 교사는 구체적인 교과내용 맥락에 맞추어 교수 지식을 변경함으로써 고유의 PCK[6]를 개발하게 된다(최승현, 2007). PCK에는 이를 뒷받침하는 다양한 교사 전문 지식 영역들이 있으며 PCK를 뒷받침하는 교사 전문 지식의 영역들은 교과별로 다소 다를 수 있지만 일반적으로 교과 내용 지식(subject matter knowledge), 교수 방법에 대한 지식(pedagogical knowledge), 학생에 대한 지식(context knowledge) 등이 공통으로 포함된다(최승현, 2007; 조성민, 노선숙, 2007). Leinhardt & Smith(1985)는 교사 지식의 두 가지 핵심적인 영역을 수업 구조 지식(lesson structure knowledge)과 교과 지식(subject matter knowledge)으로 구분하였다. Marks(1990)는 교과 내용 지식(subject matter knowledge)과 일반 교수학적 지식(general pedagogical knowledge)을 통합한 교수학적 지식(pedagogical content knowledge)을 세 번째 지식으로 선정하여, 이들 사이의 관계를 [그림 Ⅱ-1]과 같이 설명하였다(조성민, 노선숙, 2007 재인용).



[그림 Ⅱ-1] 교수에 영향을 미치는 주요 지식(Marks, 1990)

6) Pedagogical Content Knowledge(Shulman, 1986; 최승현, 2007)

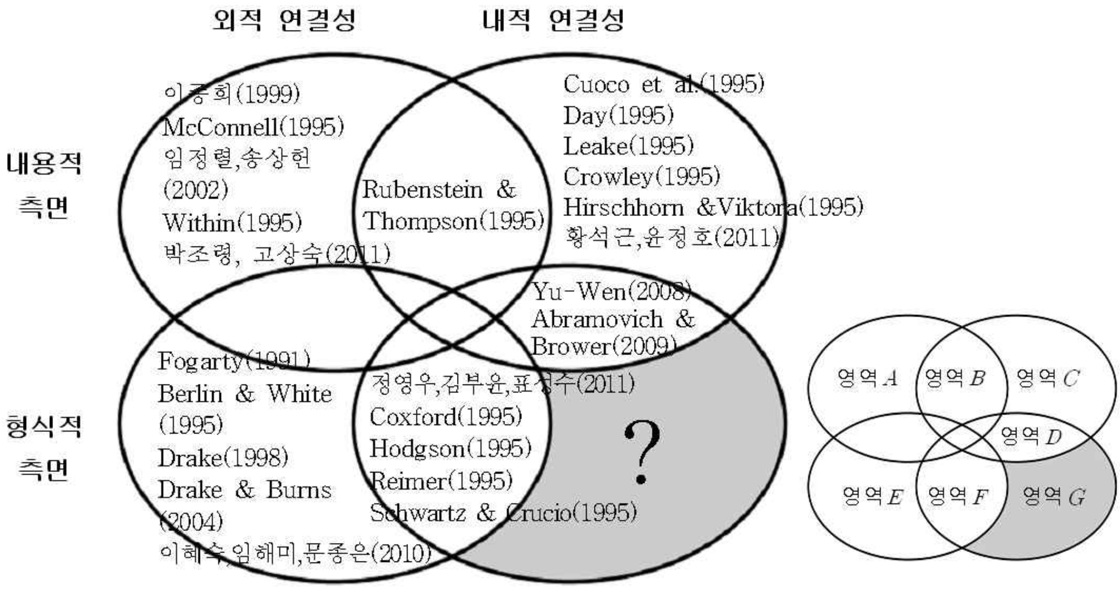
교사 지식에 관한 선행연구에서 알 수 있듯이 교수에 있어서 근간이 되는 두 지식은 교과 내용 지식(subject matter knowledge)과 교수 방법에 대한 지식(pedagogical knowledge)이다. 다시 말해, 내용적인 측면에서 '무엇을 가르치느냐?'와 형식적인 측면에서 '어떻게 가르치느냐?'로 나누어 생각해 볼 수 있다.

앞서 살펴보았듯이 수학적 연결성은 내적 연결성과 외적 연결성으로 분류할 수 있으며, 수학의 교수 전략적인 측면에서 다음과 같이 내용적 측면과 형식적 측면으로 분류할 수 있다.

- 내용적 측면: 어떠한 주제를 다루어야 하는가?
- 형식적 측면: 어떠한 방법(전략)으로 다루어져야 하는가?

본 연구는 수학적 내적 연결성에 관한 형식적 측면의 원리를 찾고 그 구체적인 사례를 제시하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 수학적 연결성에 관한 연구를 메타적으로 분석하여, 수학 외적 연결성과 내적 연결성에 관한 연구와 수학적 연결성에 관한 내용적 측면과 형식적 측면의 연구로 분류하였다. 그 분류 결과를 정리하면 [그림 Ⅱ-2]와 같다. 이 때 내용적 측면에서 외적·내적 연결성을 모두 다루는 경우와 같이 두 가지 이상의 영역을 모두 다루고 있는 것은 [그림 Ⅱ-2]와 같이 교집합의 영역으로 분류를 하였다.

외적 연결성에 관한 내용적 측면의 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역A)는 수학과 미술과의 수학 외적 연결성에 관한 연구(이종희, 1999), 현실 세계와 연관된 프로젝트를 통하여 수학을 학습하는 방법에 관한 연구(McConnell, 1995), 수학화를 위한 신문 활용 방안에 관한 연구(임정렬, 송상헌, 2002), 문학과 수학의 연결성에 관한 연구(Whitin, 1995), 수학과 화학의 통합 교육에 관한 연구(박조령, 고상숙, 2011)를 비롯한 많은 연구가 있다.



[그림 Ⅱ-2] 수학적 연결성에 관한 선행연구의 분류

수학 내적 연결성에 관한 내용적 측면의 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역C)로는 기하학과 다른 수학분야와의 내적 연결성에 관한 연구(Cuoco et al., 1995), 수와 기하학의 연결성에 관한 연구(Leake, 1995), 함수에 대한 수학적 연결성의 연구(Day, 1995), 변환을 이용한 수학적 연결성에 대한 연구(Crowley, 1995; Hirschhorn & Viktora, 1995), 연속확률분포의 지도방안 연구(황석근, 윤정호, 2011)를 비롯한 많은 연구가 있다. Rubenstein & Thompson(1995)은 변환이 수학 내·외적 연결성에 미치는 영향에 관한 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역B)에서 다음과 같이 언급하였다.

> 변환은 도안과 구성과 같은 수학적 적용을 지지하며 합동과 닮음에 대한 조건, 좌표와 종합적인 기하학, 다양한 변화에 영향을 받는 측정을 포함하는 수학 내에서 많은 사고를 통합한다. 이러한 다양한 주제에 대한 통일을 관찰하는 것은 학생들의 학습을 단순화한다. (중략) 변환과 같은 자연스러운 교수학적 포괄성을 두드러지게 함으로써 다수의 비연결적인 개념들을 최소화할 때 우리는 학생들에게 보다 많은 도움을 줄 수 있을 것이다.

외적 연결성에 관한 형식적 측면의 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역E)는 교육과정의 통합에 관한 연구(Fogarty, 1991; Drake, 1998; Drake & Burns, 2004; Berlin & White, 1995)와 더불어 상당한 연구의 진척을 보여 왔다. 그 중에서도 과학과 수학의 통합에 대한 연구(이혜숙 외, 2010)는 광범위하게 진행되어졌다. Drake(1998)가 주장한 통합교육과정의 필요성을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 통합교육과정은 교과들 속에 포함된 중복된 내용들과 중복된 기능들을 줄임으로써 학생들이 배워야 할 필수적 교육내용들을 배울 시간을 확보해 준다. 둘째, 통합교육과정은 교과들을 생활과 관련시킴으로써 실제적인 문제해결 능력을 길러 준다. 셋째, 인간의 뇌가 정보들을 유형화하거나 관련지어 학습을 한다면 교과와 교과 또는 교과와 생활을 관련지우는 통합교육과정이 효과적이다.

Fogarty(1991, 김재복, 2007 재인용)는 통합의 유형을 [그림 Ⅱ-3]과 같이 학문 내에서 통합된 모형, 여러 학문에 걸쳐서 통합된 모형, 학습자 내부와 학습자들 간의 연계를 통해 통합된 모형으로 구분하였다.

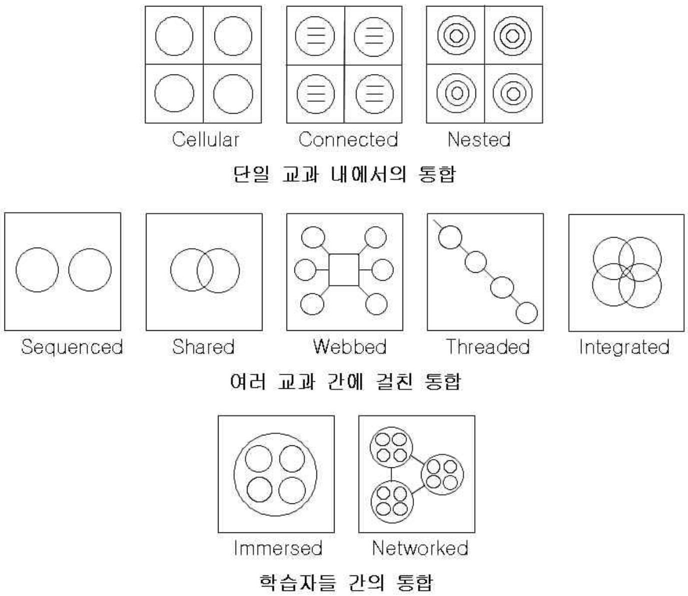
Fogarty(1991)의 모형 중에서 수학 외적 연결성과 관련이 있는 전략은 여러 교과 간에 걸친 통합의 전략으로 볼 수 있다. Berlin & White(1995)의 수학과 과학의 통합에 대한 수학 외적 연결성에 관한 연구에서도 Fogarty(1991)의 이 다섯 가지 전략을 통합의 원리로 인용하며 각각에 대하여 다음과 같이 설명하였다.

> 계열성(Sequenced) : 학습에 대한 주제나 단원은 서로서로 일치시키기 위하여 재배열되고 나열된다. 유사한 개념은 독립된 교과를 유지하면서 협력적으로 가르쳐 진다.
>
> 공유성(Shared) : 공유된 계획과 교수는 요소를 조작함으로써 생각과 개념이 부분적으로 겹쳐지는 일이 발생하는 두 개의 교과에서 발생한다.
>
> 연계성(Webbed) : 풍부한 주제가 교육과정 내용과 교과에 의하여 복잡하게 연결되

어 있으므로 교과에서는 적당한 개념과 원리와 생각을 추출하기 위하여 연계된 주제를 사용한다.

조직성(Threaded) : 초교과적 접근은 다양한 교과를 통하여 생각하는 능력, 사회적인 능력, 다면적 지능, 테크놀로지, 학습 능력을 엮는 것이다.

통합성(Integrated) : 간학문적 접근은 진정한 통합된 모델에서 일정 정도의 팀티칭과 함께 주제와 개념을 부분적으로 겹치기 위하여 교과를 조화하는 것이다.



[그림 Ⅱ-3] 교육과정의 통합 방법

내적 연결성에 관한 내용적 측면과 형식적인 측면을 포괄적으로 언급한 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역D)로는 컴퓨터(Graphing Calculator 3.5)를 활용한 수학적 연결성에 관한 연구(Abramovich & Brouwer, 2009), GeoGebra를 활용한 기하학과 대수학의 연결성에 관한 연구(Yu-Wen, 2008) 등이 있다. 여기서 짚고 넘어가야할 점은 외적 연결성에 대해서는 맥락적인 연구(Fogarty, 1991; Drake, 1998; Drake & Burns, 2004; Berlin & White, 1995), 즉 외적 연결성이 갖추어야할 성격과 전략에 대한 연구는 상당수 이루어졌지만 내적 연결성에 대한 성격과 전략에 대한 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역G)는 찾아볼 수 없었다.

수학적 연결성에 대한 형식적 측면의 연구([그림 Ⅱ-2]의 영역F)로는 수학적 연결성의 역할에 관한 Coxford(1995)의 연구, 문제해결의 도구로써의 연결성에 대한 특징을 포괄적으로 언급한 Hodgson(1995)의 연구, 수학사를 활용한 연결성에 관한 Reimer(1995)의 연구, 초등학교에서 활동에 기반한 연결성 학습에 관한 연구(Schwartz & Crucio, 1995), 수 체계의 지도에 관한 연구(정영우 외, 2011) 등이 있다. 수학적 연결성에 대한 특징과 성격에 관한 형식적 측면에 관한 연구를 살펴보면 위에 언급한 연구에서 볼 수 있듯이 내적·외적 연결성의 경계를 설정하여 연구되어지지 않았다.

Ⅲ. 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면

[그림 Ⅱ-2]의 영역 G에 해당하는 연구를 찾아볼 수 없으며 수학적 연결성에 관한 형식적 측면의 연구가 내적·외적 연결성을 구분하여 연구가 이루어지지 않았다는 점에서 적어도 형식적 측면에 있어서는 수학 내적·외적 연결성이 유사성과 비경계성을 가진다고 판단할 수 있다. 본 연구에서는 형식적 측면에 있어서의 수학 내적·외적 연결성의 유사성과 비경계성에 근거하여 Berlin & White(1995)의 연구 즉, 수학 외적 연결성에 관한 형식적 측면 연구에서 밝힌 다섯 가지 원리를 분석하여, 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면의 입장에서 다음과 같이 정의하였다. 또한 각각의 원리에 대한 구체적인 사례를 함께 제시하였다.

첫째, 계열성(Sequenced)은 단원들이 서로 연관되기 위해 재배치되고 계열화되는 것을 의미한다. 개별적인 단원 영역들은 그대로 유지되고 유사한 개념들이 계획적으로 가르쳐지는 것을 의미한다. 예를 들어, 교사가 타원에서 기울기 m이 주어진 접선의 방정식 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$을 설명하는 경우에 원에서의 접선의 방정식 $y=mx\pm m\sqrt{r^2+1}$을 일반화와 특수화의 사고를 이용하여 설명하고 학생이 두 개의 개념을 연결하게 된다면 이는 계열성의 좋은 예라 할 수 있다.

둘째, 공유성(Shared)은 두 개의 단원에서 계획된 교수가 중복되는 개념과 아이디어들이 조직 요소로 등장하는 것을 의미한다. 교사가 과학 시간에 배운 직렬연결의 평균값을 산술평균으로 병렬연결의 평균값을 조화평균과 연결시켜 수업을 하고 학생들이 이들의 관계를 이해한다면 이것은 외적 연결성에서의 공유성에 해당할 것이다. 내적 연결성에서는 산술평균과 등차중항을 기하평균과 등비중항의 관계를 연결하여 이해한다면 이것은 수학 내적 연결성에서 공유성에 해당한다.

셋째, 연계성(Webbed)은 다양한 단원의 학습 내용들이 하나의 개념을 중심으로 재구성됨으로써 전체를 관망할 수 있는 광범위한 시야를 갖게 되는 것을 의미한다. 대표적인 개념은 함수라 할 수 있다. 함수적 관계는 수학적 연결성을 생성하기 위한 비옥한 대지를 제공한다. 수학에서 사고를 통합함으로써 함수의 연결성은 학생들로 하여금 여러 가지의 수학적 개념과 절차를 연결할 수 있도록 도와준다. 함수적 관계는 또한 다른 교과 영역들 사이의 연결성을 제공하며 현실세계의 현상을 관찰하기 위한 시각을 제공한다(Day, 1995). 예를 들어, 행렬을 함수의 개념과 연계하여 지도하면 대칭변환과 회전변환을 비롯한 일차변환에 대한 함수적 개념에 보다 쉽게 접근할 수 있으며 함수의 합성이 교환법칙이 성립하지 않음을 이용하여 행렬의 곱셈이 교환법칙이 성립하지 않음을 연계하여 설명할 수 있다.

넷째, 조직성(Threaded)은 하나의 개념이나 문제 상황에 대하여 다양한 접근 방식으로 이해를 함으로써 문제 상황을 조직적으로 이해하고 전이가 촉진되도록 하는 것을 의미한다. 예를 들어, 아래와 같은 이원이차연립방정식을 생각해 보자.

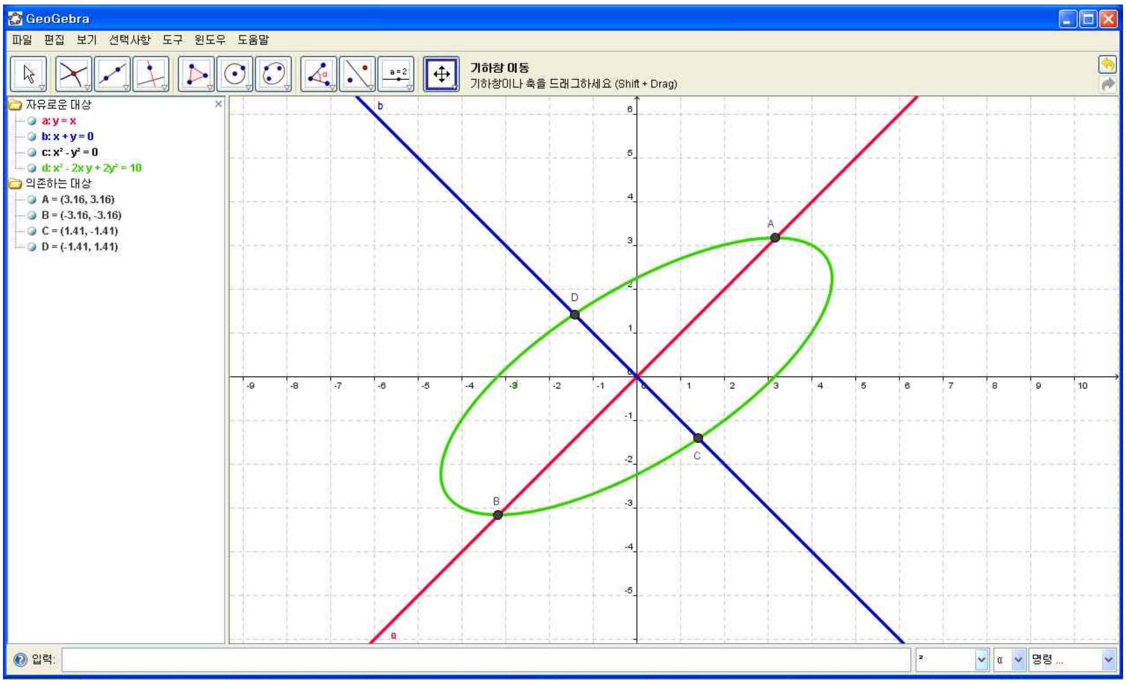
$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$$

대부분의 고등학교 1학년 학생들은 다음과 같이 <표 Ⅲ-1> 좌측의 셀과 같이 단순한 대수적 접근을 시도하여 해를 구하고 그것에서 마무리하는 경향이 있다. 여기서 학생들은 <표

Ⅲ-1> 우측의 집합론적 의미까지도 이해할 수 있으며 [그림 Ⅲ-1]과 같이 구한 해의 기하적·시각적 의미도 해석할 수 있다.

<표 Ⅲ-1> 연립방정식의 대수적 풀이와 집합론적 이해

대수적 풀이	집합론적 이해
$\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2-2xy+2y^2=10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 식①을 인수분해하면 $x=-y$ 또는 $x=y$이므로 각각의 ②식에 대입하여 정리하면 (i) $x=-y$ ⋯⋯③일 때 $x^2+2x^2+2x^2=10$ $5x^2=10$ $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ ⋯⋯⑤ (ii) $x=y$ ⋯⋯④일 때 $x^2-2x^2+2x^2=10$ $x^2=10$ $\begin{cases} x=\sqrt{10} \\ y=\sqrt{10} \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-\sqrt{10} \\ y=-\sqrt{10} \end{cases}$ ⋯⋯⑥	식①을 만족하는 집합의 해를 A라 하고 식②를 만족하는 집합의 해를 B라 하면 위 연립방정식의 해는 식①과 식②의 교집합 $A\cap B$를 구하는 것이다. 여기서 집합 A는 식③을 만족하는 집합 C과 식④을 만족하는 집합 D의 합집합으로 표현 가능하다. 즉, $A=C\cup D$ 따라서, 드모르간의 법칙에 의하여 $A\cap B=(C\cup D)\cap B$ $=(C\cap B)\cup(D\cap B)$ 그러므로 ⑤와 ⑥이 모두 연립방정식의 해가 된다.



[그림 Ⅲ-1] 이원이차연립방정식의 기하적·시각적 이해[1)]

교사가 문제 풀이를 위하여 여러 가지 방법(해석적, 대수적, 기하적)으로 접근하고, 다양한 활동을 통하여 정답을 이끌어 내며 과거의 경험을 살려 수학을 학습하는 방법으로 지도하는 것은 학생들로 하여금 수학에 대한 자신감을 가지게 할 수 있다(이재돈, 2000). 수학 내적 연결성에 대한 이러한 형식적 측면 중 표상과 가장 밀접한 관련이 있는 전략은 조직성이라 할 수 있다. 수학적 개념이나 문제 상황에 대한 다양한 접근 방식으로의 이해 즉, 다양한 표상을 통한 접근 방식은 수학적 개념에 대한 이해와 전이를 촉진하게 된다.

Dofour-Janvier et al.(1987)는 학습자가 동일한 개념에 대한 다양한 표상에 관심을 가짐에 따라 다양한 물질로부터 공통적인 성질을 파악할 수 있을 것이며 개념을 구성하는데 성공할 것이라 언급하였으며 학습자는 하나의 표상으로부터 또 하나의 표상으로 나아갈 수 있다고 주장하였다. 이는 다양한 표상으로부터 연결고리를 찾아 개념에 대한 새로운 표상을 구성하는 것을 의미하며 구성된 표상은 또 다른 표상의 재료가 될 수 있음을 말하고 있다.

다섯째, 통합성(Integrated)은 외적 연결성에서는 간학문적 접근을 의미하고 있다. 이것을 내적 연결성에는 하나의 수학적 개념에 대하여 두 개 이상의 단원에서 개념을 재해석할 수 있다는 것을 의미한다. 예를 들어, '미적분과 통계 기본' 또는 '적분과 통계'에서 이항정리 ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$을 배운 학생이 고등학교 1학년 '수학'에서 배운 원소의 개수가 n개인 집합의 부분집합의 개수가 2^n개임과 연결하는 학생은 찾아보기 어렵다. 이러한 수학적 개념의 통합적 이해는 수학 내적 연결성 측면에서 볼 때 다면적 이해의 가장 중요한 부분 중 하나라 할 수 있다. 수학적 의미는 수학적 개념들 사이에 존재하는 관계를 말하며 이러한 관계는 수학적인 개념이나 내용의 일부분만을 강조하거나 연습함으로써 얻어지는 것이 아니고 개념과 개념을 연결하는 학습, 전체를 들여다보는 학습을 통하여 얻어진다고 할 수 있다. 이러한 관계를 습득하는 이해를 Dreyfus(1991)의 관점에서 해석해보면 수학적 내적 연결성에 기반하여 생성된 다중 연결 표상(multi-linked representation)이 동반된 이해라 할 수 있다. Dreyfus(1991)는 같은 개념에 대한 여러 가지 정신적 표상들이 서로 보완되어 결국에 그 개념에 대한 하나의 표상으로 통합될 수 있을 것이라 하였으며 이러한 과정의 결과로써 사람들은 여러 가지 표상들을 동시에 이용할 수 있는 상태인 다중 연결 표상을 가지게 되어 적절한 순간에 문제나 상황이 요구하는 바대로 표상들 사이를 효과적으로 번역할 수 있게 된다고 주장하였다.

내적 연결성에 관한 이러한 원리들은 유리수와 무리수, 홀수와 짝수같이 완벽한 경계를 가지고 나누어지지는 않을 것이며 다양한 수학적 사고의 경계와 같이 특정한 문제 상황에서 개별적으로 작용하는 것이 아니라 중복적이고 복합적으로 작용하게 된다.

Ⅳ. 요약 및 제언

수학과 교육과정 개선 방안 연구(신성균 외, 2005), 고등학교 교육과정 해설(교육과학기술부, 2008), 수학과 교육과정(교육과학기술부, 2011)에서 공통적으로 언급하고 있는 내용의 하나는 '교육 내용의 적정화'이다. 신성균 외(2005)은 내용 요소의 학년 간 연계성이 떨어지고, 내용 영역 구분 방식에 따라 관련 내용이 강제적으로 분리되어 기술됨으로써 학습 연계성이 고려되지 못하는 문제점이 발생하고 있다고 지적하며 학생의 인지 발달 수준을 고려하고,

관련 내용 학습의 효율성과 학생들의 이해 제고를 위해 학습량 및 내용의 난이도를 조정하고 학습 내용 사이의 연계성을 강화하는 것이 필요하다고 강조하였다. 교육과학기술부(2008, 2011)는 개정 교육과정에서는 학년 간, 학교급 간, 교과 간의 연계성을 강화하고 연관된 내용은 밀접하게 관련지어 학습할 수 있도록 함으로써 학습 효과를 높일 수 있게 하였다고 논하고 있다. 이러한 수학과 교육과정 관련 연구들은 대부분 수학 내적 연결성에 관한 내용적 측면에 관한 연구라 할 수 있으며 공통적으로 수업의 형식적인 측면, 다시 말해 어떠한 전략을 사용하여 접근할 것인가에 대해서는 교사 개개인이 상황에 맞도록 재구성할 것을 요구하고 있다.

<표 Ⅳ-1> 수학 내적 연결성의 형식적 측면

구분	정의	교수학습 적용 사례
계열성	교과의 단원들이 서로 연관되기 위해 재배치되고 계열화된다. 개별적인 단원 영역들은 그대로 유지되고 유사한 개념들이 계획적으로 가르쳐진다.	타원에서 기울기 m이 주어진 접선의 방정식 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$을 설명하는 경우에 있어, 원에서 이 접선의 방정식 $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$을 일반화와 특수화의 사고를 이용하여 설명할 수 있다.
공유성	두 개의 단원에서 계획된 교수가 교육되고, 이 때 중복되는 개념과 아이디어들이 조직요소로 등장한다.	산술평균과 기하평균은 절대부등식의 개념과 수열에서의 등차중항과 등비중항의 개념에 중복되는 개념과 아이디어들이 존재하여 서로의 조직요소로 작용할 수 있다.
연계성	다양한 단원의 학습 내용들이 하나의 개념을 중심으로 재구성됨으로써 전체를 관망할 수 있는 광범위한 시야를 제공한다.	행렬을 함수의 개념과 연계하여 지도하면 대칭변환과 회전변환을 비롯한 일차변환에 대한 함수적 개념에 보다 쉽게 접근할 수 있으며 함수의 합성이 교환법칙이 성립하지 않음을 이용하여 행렬의 곱셈이 교환법칙이 성립하지 않음을 연계하여 설명할 수 있다.
조직성	하나의 문제 상황(개념)에 대하여 초단원적 다양한 접근방식으로 이해를 함으로써 문제 상황을 조직적으로 이해하고 전이가 촉진되도록 한다.	$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ x^2-2xy+2y^2=10 \end{cases}$ 위의 연립방정식을 대수적·집합론적·기하적으로 이해를 함으로써 주어진 문제 상황을 다양한 방법으로 해석할 수 있게끔 한다.
통합성	수학적 개념에 대하여 두 개 이상의 단원에서 개념을 재해석할 수 있다는 것을 의미한다.	‘적분과 통계’ 또는 ‘미적분과 통계 기본’에서 이항정리 ${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$을 배운 학생이 고등학교 1학년 ‘수학’에서 배운 원소의 개수가 n개인 부분집합의 개수가 2^n개임과 연결한다.

본 연구는 수학적 연결성에 대한 선행연구를 메타적으로 분석하여 내적·외적, 내용적·형식적으로 분류하였으며, 그 결과 형식적 측면에 있어서는 수학 내적·외적 연결성이 유사성과 비경계성을 가진다는 성질을 확인하였다. 이로부터 수학 내적 연결성에 대한 형식적 측면으로서 <표 Ⅳ-1>과 같이 계열성, 공유성, 연계성, 조직성, 통합성의 다섯 가지 원리와 구체적인 사례를 제시하였다.

수학과 교육과정과 관련된 기초 연구는 지속적이고 체계적으로 이루어져야 한다. 어느 학년에서 어떤 수준까지 어떤 방식으로 지도되어야 하는지에 대해 지속적이고도 체계적인 연구가 필요하다(신성균 외, 2005). 본 연구는 수학 내적 연결성에 관한 형식적 측면을 연구하여 다섯 가지 원리와 그 사례를 제시하였다. 그러나 각각의 원리에 대해 한두 가지의 사례를 언급하는 것은 수학과 교육과정이 가진 의미에 비해 미약하다. 후속 연구를 통해 각각의 형식적 측면의 원리에 대한 다양한 사례와 체계적인 연구가 필요하다.

한 중등교사가 5년 또는 10년 또는 그 이상의 기간 동안 중학교에서 근무를 한 후 고등학교로 발령을 받아 학생들을 가르친다고 생각해 보자. 그 반대의 상황일 수도 있다. 또는 상당기간을 휴직한 후 복직한 교사를 생각해 보자. 이 상황에서 이 사람들이 가장 먼저 도움을 받을 수 있는 곳은 자신의 과거 경험일 것이다. 이마저 존재치 않는 사람이라면 동료교사 또는 지도서나 해설서의 도움을 받게 될 것이다. 그러나 지도서나 해설서는 각 단원의 연결성에 대하여 포괄적으로 논하고 있으나 세부적인 내용교수방법에 있어서의 연결성과 구체적 지도 방법에 관련해서는 내용이 미흡한 실정이다. 초임교사라면 더욱 심각한 상황에 맞닥뜨리게 된다.

교사용 지도서에는 각 단원별 이론적 배경, 학습목표, 지도상 유의점 등이 수록되어 있다. 여기에 각 단원별로 수학 내적 연결성의 형식적 측면(계열성, 공유성, 연계성, 조직성, 통합성)과 관련된 내용을 일부 수록한다면 이를 통하여 교사는 자연스럽게 학생들과 수학적 연결성이 고려된 수업을 만들어 갈 수 있을 것이다. 또한, 계열성, 공유성, 통합성은 교과서의 단원 마지막 심화과정(예: 생각하기, 연결하기, 추론해 보기)에서 충분히 다루어질 수도 있다. 이러한 연구를 통해 학교 수학의 변화와 수학과 교육과정의 체계화에 보다 기여할 것으로 기대한다.

참고문헌

강경애, 남승인 (1996). 수학 교육의 변화에 대하여. 대구교육대학교 과학교육연구소, 19, 39-61.

교육과학기술부(2008). 고등학교 교육과정 해설 수학. 한국보훈복지의료공단 신생인쇄조합.

교육과학기술부(2011). 고등학교 교육과정. 교육과학기술부 고시 제 2011-361 호.

김재복 (2007). 통합교육과정, 114-115. 교육과학사.

박조령, 고상숙 (2011). 수학과 화학 통합교육의 실행을 위한 교수·학습의 실제. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(3), 497-524.

신성균, 고정화, 권점례, 박선화, 이대현, 이봉주, 최승현 (2005). 수학과 교육과정 개선 방안 연구. 한국교육과정평가원.

이재돈 (2000). 과거에 대한 반성과 새로운 2000년대 수학교육의 전망. 한국수학교육학회지

시리즈 E <수학교육 논문집>, 10, 441-457.

이종희 (1999). 수학적 연결성에 대한 연구(수학과 미술과의 연결). 교과교육학연구, 3(2), 147-160. 이화여자대학교 교과교육연구소.

이혜숙, 임해미, 문종은 (2010). 수학과학통합교육의 설계 및 실행에 대한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 49(2), 175-198.

임정렬, 송상헌 (2002). 초등학교 수학 교실에서의 수학화를 위한 신문 활용 방안에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 4(2), 261-281.

정영우, 김부윤, 표성수 (2011). 수학적 연결성을 고려한 수 체계 지도에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 25(2), 473-495.

조성민, 노선숙 (2007). 활동 및 과제의 분석을 통한 고등학교 수학교사의 교수학적 지식에 대한 연구. 한국교원교육연구, 24(2), 385-418. 한국교원교육학회.

최승현 (2007). 교육과정 개정에 따른 수학과 내용교수지식(PCK) 연구. 한국교육과정평가원.

황석근, 윤정호 (2011). 수학적 연결성을 고려한 연속확률분포단원의 지도방안 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 13(3), 423-446.

Abramovich, S., Brouwer, P. (2009). Evolving Polygons Revisited: Inequalities and Computer Graphing. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching 28(4), pp. 345-358.

Berlin, D. F. & White, A. L. (1995). Connecting School Science and Mathematics. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 22-33. 1995 Yearbook.

Coxford, A. F. (1995). The Case for Connections. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 3-13. 1995 Yearbook.

Crowley, M. A. (1995). Transformation: Making Connections in High School Mathematics. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 79-91. 1995 Yearbook.

Cuoco, A. A., Goldenberg, E. P., Mark, J. (1995). Connecting Geometry with th Rest of Mathematics. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 183-197. 1995 Yearbook.

Day, R. P. (1995). Using Functions to Make Mathematical Connections. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 54-64. 1995 Yearbook.

Dossey, John A., Sharon McCrone, Frank R. Giordano, Maurice D. Weir (2002), Mathematics Method and Modeling for Today's Mathematics Classroom, p. 81. Wadsworth Group.

Drake, S. M. (1998). 교육과정 통합의 기초(박영무, 허영식, 유제순 공역). 교육과학사.

Drake, S. M., Burns, R. C. (2004). 통합 교육과정(박영무, 강현석, 김인숙, 허영식 공역). 원미사.

Dreyfus, T. (1991), Advanced mathematical thinking process. In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking, pp. 25-41. Kluwer Academic Publishers.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., Belanger, M. (1987). Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. In C. Janvier (Ed.), Problems of

Representation in the Teaching and Learning of Mathematics, pp. 109−122. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fogarty, R. (1991). The Mindful School: How to Integrate the Curricula. Palatine, Ill.: Skylight Publishing.

Hatfield, M. M., Nancy Tanner Edwards, Gary G. Bitter, Jean Morrow (2007). Mathematics methods for elementary and middle school teachers. John Wiley & Sons Inc.

Hirschhorn, D. B. & Viktora, S. S. (1995). Using Transformations to Foster Connections. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 92-103. 1995 Yearbook.

Hodgson T. R. (1995). Connections as Problem-Solving Tools. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 13-21. 1995 Yearbook.

Leake, L. (1995). Connecting Number and Geometry. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 45-53. 1995 Yearbook.

Leinhardt, G. & Smith, D. A. (1985). Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. Journal of Education Psychology, 77(3), 247-271.

McConnell, J. W. (1995). Forging Links with Projects in Mathematics. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 198-209. 1995 Yearbook.

National Council of Teacher of Mathematics (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM

National Council of Teacher of Mathematics (2000). Principle and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM

Reimer, L. (1995). Connecting Mathematics with Its History: A Powerful, Practical Linkage. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 92-103. 1995 Yearbook.

Rubenstein, R. N., Thompson, D. R. (1995). Making Connections with Transformations in Grades K-8. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 65-78. 1995 Yearbook.

Schwartz, S. L., Curcio, F. R. (1995). Learning Mathematics in Meaningful Contexts: An Action-Based Approach in the Primary Grades. In: House, P. A., Coxford, A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 116-123. 1995 Yearbook.

Sfard, A. (2003). Balancing the Unbalanceable: The NCTM Standards in Light of Theories of Learning Mathemaics. In J. Kilpatrick, W. G. Martan & D. Schifter(Eds.), A Research Companion to Principle and Standards for School Mathematics, Reston, VA: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching, Educational Researcher 15 (2), pp. 4-14.

Skemp, R. R. (2001). 수학학습 심리학(황우형 역). 사이언스북스.

Whitin, D. J. (1995). Connecting Literature and Mathematics. In: House, P. A., Coxford,

A. F. (Eds.), Connecting Mathematics Across the Curriculum, pp. 134-142. 1995 Yearbook.

Yu-Wen Allison Lu (2008). Linking Geometry and Algebra: A Multiple-case study of Upper-Secondary mathematics teachers' conceptions and practices of GeoGebra in England and Taiwan, University of Cambridge.

A Study on the Tactical Aspect of Mathematical Internal Connections

Yang, Seong Hyun[7] · Lee, Hwan Chul[8]

Abstract

When planning lessons and developing materials about mathematical teaching and learning, we should condignly change and reconstruct contents and orders in light of ranks and connections between subject materials. Moreover teachers should teach mathematical concepts so that students might understand then not only independently and disjunctively but also relationally and reflectively. For this, teachers have to prepare thoroughly.

By analyzing advanced research for mathematical connections, this study categorizes them according to two conditions: internal-external and content-formality. Through this, tactical aspect similarity and indistinguishability between mathematical external connections and mathematical internal connections have been identified. Based upon this fact, this study proposed the principles and the examples of tactical aspect on mathematical Internal Connetions.

Key Words : Mathematical Internal Connections, Mathematical Connections, Sequenced, Shared, Webbed, Threaded, Integrated

7) Kyunghee High School (mathematics@korea.com)

8) Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity (singgri@kofac.re.kr)