신뢰성응용연구
제12권, 제2호. pp.121-129, 2012

제곱합 접근법에 의한 비선형시스템의 신뢰성제어

류석환

대구대학교 전자전기공학부

A Reliable Control of Nonlinear Systems via a Sum of Squares Approach

Yoo, Seog Hwan

School of Electronic Eng'g, Daegu University

Abstract

This paper deals with a design of reliable state feedback controllers for continuous time polynomial systems with actuator failures. The goal is to find an asymptotically stabilizing controller such that the closed loop system achieves the prescribed decay rate in the actuator failure cases. Based on a sum of squares (SOS) approach, a design method for reliable nonlinear controller is presented. In order to demonstrate our design method, a numerical example is shown.

Keywords : reliable control(신뢰성제어), sum of squares(제곱합),
nonlinear systems(비선형시스템), actuator fault(액츄에이터 고장)

이 논문은 2008년도 대구대학교 학술연구비지원에 의한 논문임
논문접수일 : 2012년 03월 22일　논문수정일 : 2012년 04월 05일　게재확정일 : 2012년 06월 01일

1. 서론

제어시스템을 구성하고 있는 센서나 액츄에이터의 고장에도 불구하고 폐루프 제어시스템이 안정하고 주어진 제어성능을 발휘하도록 설계된 제어시스템을 신뢰성 제어시스템이라 부른다. 특히 안정성이 중요하게 문제가 되는 원자력발전소의 제어시스템, 항공기의 비행 제어시스템, 석유화학 플랜트의 공정제어시스템 등은 신뢰성 제어시스템으로 구성되어져 운영되어야한다. 제어시스템의 신뢰성을 높이는 방법 중에 하나는 시스템을 구성하고 있는 구성요소의 가능한 고장에 대해 견실하게 설계하는 것이다.

신뢰성 제어기를 설계하는 문제는 최근 많은 주목을 받고 있으며 몇 가지의 접근법이 제안되었다. Veillette et al(1992)는 선형시스템에서 Riccati 방정식의 해를 이용하여 액츄에이터나 센서의 가능한 고장에 대해서도 주어진 제어성능을 만족하는 관측기 기반의 출력피드백 제어기의 설계법을 제시하였다. Yao and He(2006)는 이산형 불확실한 선형시스템에서 선형행렬부등식의 해를 이용하여 전상태 피드백 신뢰성제어기 설계법을 제시하였다. 비선형 시스템의 경우 Yang et al(1998)과 Zhang et al(2006)은 Hamilton-Jacobi 부등식의 해를 이용하여 신뢰성제어기 설계법을 제안하였다. 그러나 실제로 Hamilton-Jacobi 부등식은 특수한 경우를 제외하고는 해를 구하기가 어려워 일반적인 비선형 시스템에서 활용하기가 어렵다. Wu와 Zhang(2006)은 비선형시스템을 T-S(Takagi-Sugeno) 퍼지모델로 표현하고 액츄에이터 고장을 가정한 전상태 신뢰성제어기를 제안하였다. T-S 퍼지모델 접근법은 비선형시스템을 전제변수의 값에 따라 여러 개의 선형시스템으로 모델하여 선형시스템 설계기법을 사용하여 제어기를 설계하고 이를 결합하여 효과적으로 비선형시스템의 제어기를 설계하는 방식으로 최근 많은 연구가 진행되고 있다.

최근 비선형시스템을 효과적으로 다루기 위해 다항식 제어시스템에서 제곱합(sum of squares, SOS) 분해기법에 관한 연구가 많이 이루어지고 있다. Tanaka et al(2009)은 퍼지 다항식시스템의 관측기 설계에서 SOS기법을 이용하였다. 대부분의 비선형시스템은 Taylor 급수 전개에 의해 충분히 적은 오차 범위내로 다항식 시스템으로 근사할 수 있다. SOS 분해기법은 다항식 시스템에서 안정성이나 제어성능을 보장하는 제어기를 설계하는 과정에서 발생하는 여러 가지 부등식의 해를 효과적으로 구할 수 있는 장점을 갖고 있다. 본 연구에서는 SOS 분해기법을 사용하여 액츄에이터 고장에 대비한 비선형 시스템의 전상태 피드백 신뢰성제어기를 설계한다.

R^n은 요소가 실수인 n차원 벡터공간, $R^{n\times m}$은 $n\times m$ 실수행렬의 집합이다. $A\in R^{n\times n}$에서 A^T는 A의 전치행렬, A^{-1}는 역행렬을 나타낸다. $R[x]$는 실계수 다항식의 집합, $R[x]^{p\times q}$는 $p\times q$차원의 실계수 다항식 행렬의 집합이고 $\Sigma[x]$는 SOS 다항식의 집합이다.

2. 신뢰성제어기 설계문제

다음의 비선형 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) \\ u(t) &= K(x(t))x(t)\end{aligned} \tag{1}$$

여기에서 $x(t) \in R^n$는 상태변수, $u(t) \in R^m$는 제어입력, $A(x(t)) \in R[x]^{n\times n}$는 시스템 행렬, $B(x(t)) \in R[x]^{n\times m}$는 제어입력 행렬이고 $K(x(t)) \in R[x]^{m\times n}$는 제어기 이득행렬이다.
액츄에이터 고장이 발생한 후의 제어입력을 $u^F(t)$라 정의하면 다음과 같은 액츄에이터 고장 모델을 생각한다.

$$u^F(t) = \alpha u(t) \tag{2}$$

여기에서

$$\alpha = diag(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),\ 0 \leqq \alpha_i^L \leqq \alpha_i \leqq \alpha_i^U \leqq 1, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{3}$$

α_i^L과 α_i^U는 고장모델을 특징 지워주는 파라메터이다. 즉, $\alpha_i^L = \alpha_i^U = 0$는 i번째 액츄에이터가 완전 탈락한 경우이고 $0 < \alpha_i^L < \alpha_i^U < 1$의 경우는 부분고장, $\alpha_i^L = \alpha_i^U = 1$은 i번째 액츄에이터는 고장이 발생하지 않는다고 가정하는 경우이다. 다음의 집합을 생각한다.

$$F_b = \{\beta_L \mid \beta_L = diag(\beta_{L1}, \beta_{L2}, \cdots, \beta_{Lm}), \beta_{Li} = \alpha_i^L \text{ or } \alpha_i^U,\ i = 1, 2, \cdots, m\} \tag{4}$$

여기에서 $L = 1, 2, \cdots, n_\beta$, $n_\beta = 2^{m-l}$이고 $l \leqq m$은 고장이 발생하지 않는다고 가정한 액츄에이터의 수이다. α는 꼭지점이 F_b인 행렬다면체(matrix polytope) 내부의 점이다. 즉 $\alpha \in F_a$이다. 여기에서

$$F_a = \left\{\alpha \mid \alpha = \sum_{L=1}^{n_\beta} \zeta_L \beta_L, \quad \zeta_L \geqq 0,\ \sum_{L=1}^{n_\beta} \zeta_l = 1\right\} \tag{5}$$

고장 발생 후의 제어입력 (2)를 비선형 시스템 (1)에 적용하면 폐루프 시스템은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{x}(t) = (A(x(t)) + B(x(t))\alpha K(x(t)))x(t) \tag{6}$$

정의 1 : 모든 $t \geq 0$에서 시스템 (6)의 상태변수가 $\| x(t) \| \leq ke^{-\gamma t} \| x(0) \|$ 를 만족할 때 시스템 (6)은 감쇄율 γ로 점근 안정하다고 정의한다. 단, $k > 0$, $\gamma > 0$는 상수이다.
이 논문에서는 신뢰성 제어기를 설계하기 위해서 모든 고장 가능한 α와 설계자가 정한 $\gamma > 0$에 대해서 폐루프 시스템 (6)이 감쇄율 γ로 점근 안정한 제어기 이득행렬 $K(x(t))$를 구한다.

3. 신뢰성제어기 설계

이 절에서는 SOS 분해기법을 사용하여 앞 절에서 정의한 설계사양을 충족하는 비선형 시스템의 신뢰성제어기를 설계한다. 이를 위하여 먼저 SOS 분해기법과 관련된 몇 가지 필요한 정의를 기술한다.

정의 2 : $p(x) = \sum_{i=1}^{M} f_i^2(x)$를 만족하는 다항식 $f_i(x), i = 1, \cdots, M$가 존재하면 다항식 $p(x)$ 는 SOS이다. 여기서 $x \in R^n$이다.
정의 2로부터 $p(x)$가 SOS이면 모든 x에 대해서 $p(x) \geq 0$임을 알 수 있다. 그러나 $p(x) \geq 0$일지라도 SOS가 아닐 수도 있다.
정의 3[A. Papachristodoulou와 S. Prajna(2005)] : SOS 다항식 $h_i(x) \in \Sigma[x]$, $(i = 1, \cdots, n)$에 대해 $p(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x) p_i(x)$가 SOS이면 $p_i(x) \geq 0 \, (i = 1, \cdots, n)$인 모든 x에서 $p(x) \geq 0$을 만족한다.
정의 3은 견실제어이론에서 많이 사용되는 S-procedure[S. Boyd et al(1994)]의 다항식으로의 확대조건이다.
정의 4[K. Tanaka et al(2007)] : $L(x) \in R[x]^{N \times N}$, $x \in R^n$라 정의할 때 $v \in R^N$에 대해서 $v^T L(x) v$가 SOS이면 모든 $x \in R^n$에 대해서 $L(x) \geq 0$을 만족한다.
먼저 신뢰성제어기 설계문제의 해를 정리 1에 기술한다.
정리 1 : 다음 (7)과 (8)을 만족하는 대칭 양한정(positive definite) 행렬 $Q \in R^{n \times n}$, $M(x) \in R[x]^{m \times n}$가 존재하면 모든 $x(0) \in R^n$와 가능한 모든 액츄에이터 고장에 대해서 감쇄율 γ로 점근 안정화 시키는 신뢰성제어기가 존재한다. 이때 신뢰성제어기의 이득은 $K(x) = M(x) Q^{-1}$이다.

$$-v^T (A(x)Q + QA(x)^T + B(x)\beta_L M(x) + M(x)^T \beta_L B(x)^T + 2\gamma Q + \epsilon(x) I) v, \text{ 는 SOS이다.} \quad (7)$$

여기에서 $L = 1, 2, \cdots, n_\beta$이고 $v \in R^n$, $\epsilon(x)$은 $x \neq 0$에서 $\epsilon(x) > 0$을 만족하는 다항식이다.

$$\text{아주 작은 } \epsilon_1 > 0 \text{에 대해서 } v^T (Q - \epsilon_1 I) v \text{ 는 SOS 이다.} \quad (8)$$

(증명) 리아푸노프 후보함수를 $V(x)=x^TQ^{-1}x$라 정의하면 (8)로부터 Q는 양한정 행렬이다. 정의 4와 (7)로부터 모든 $L=1,2,\cdots,n_\beta$에서

$$\Phi_L = A(x)Q + QA(x)^T + B(x)\beta_L M(x) + M(x)^T\beta_L B(x)^T + 2\gamma Q < 0 \tag{9}$$

폐루프시스템 (6)에서

$$\begin{aligned}\dot{V}(x)+2\gamma V(x) &= x^TQ^{-T}(QA(x)^T + A(x)Q + M(x)^T\alpha B(x)^T + B(x)\alpha M(x) + 2\gamma Q)Q^{-1}x \\ &= \sum_{L=1}^{n_\beta}\zeta_L x^TQ^{-T}\Phi_L Q^{-1}x < 0\end{aligned} \tag{10}$$

또한 $|x|\to\infty$이면 $V(x)\to\infty$이므로 가능한 모든 α에 대해서 폐루프시스템은 전역적으로 점근 안정하다. (10)으로 부터 $V(t)<e^{-2\gamma t}V(0)$이므로 $|x(t)| \leqq ke^{-\gamma t}|x(0)|$를 만족하는 $k>0$가 존재한다. 증명 끝.

정리 1에서 전역적으로 안정화하는 신뢰성제어기의 존재조건을 나타내었지만 일반적으로 비선형시스템에서 전역적인 해를 얻기 어려울 때가 많다. 전역적인 해를 얻기 어려울 경우 국부적인 해의 존재조건을 다음의 정리 2에서 기술한다. 이를 위해서 먼저 국부적인 영역 을 다음과 같이 정의한다.

$$D_x = \{x\in R^n | x^TP_x x \leqq 1\} \tag{11}$$

$$D_Q = \{x\in R^n | V(x) = x^TQ^{-1}x \leqq 1\} \tag{12}$$

여기에서 $P_x, Q\in R^{n\times n}$는 대칭 양한정 행렬이고, $V(x)$는 리아푸노프 후보함수이다.

정리 2 : (13)-(15)의 S_L, $(L=1,2,\cdots,n_\beta)$, T_1, T_2가 SOS가 되는 $Q\in R^n$, $M(x)\in R[x]^{m\times n}$, $\tau_L(x)\in\Sigma[x], \bar{\tau}(x)\in\Sigma[x]$가 존재하면 $x(0)\in D_Q$일 때 모든 가능한 액츄에이터 고장에 대해 감쇄율 γ로 점근 안정화하는 신뢰성제어기가 존재한다. 이때 신뢰성제어기의 제어이득 $K(x)=M(x)Q^{-1}$이다. 여기에서 $\epsilon(x)$은 $x\neq 0$에서 $\epsilon(x)>0$을 만족하는 다항식이고 $\epsilon_1>0$이다.

$$\begin{aligned}S_L = &-v^T(A(x)Q + QA(x)^T + B(x)\beta_L M(x) + M(x)^T\beta_L B(x)^T + 2\gamma Q + \epsilon(x)I)v \\ &-\tau_L(x)v^Tv(1-x^TP_x x), \quad L=1,2,\cdots,n_\beta, \quad v\in R^n\end{aligned} \tag{13}$$

$$T_1 = x^T(Q-\epsilon_1 I)x - \bar{\tau}(x)(1-x^TP_x x) \tag{14}$$

$$T_2 = x^T(P_x^{-1} - Q)x \tag{15}$$

(증명) T_1이 SOS이므로 리아푸노프 후보함수 $V(x)$는 영역 D_x에서 양이다. T_2가 SOS이므

로 $Q^{-1} \leqq P_x$ 이고 $D_Q \subset D_x$ 이다. $S_L(L=1,2,\cdots,n_\beta)$이 SOS이므로 영역 D_x 에서 다음의 부등식이 성립한다.

$$A(x)Q+QA(x)^T+B(x)\beta_L M(x)+M(x)^T\beta_L B(x)^T+2\gamma Q<0, \quad L=1,2,\cdots,n_\beta \tag{16}$$

따라서 영역 D_x 에서

$$\dot{V}(x)+2\gamma V(x)=x^T Q^{-T}(QA(x)^T+A(x)Q+M(x)^T\alpha B(x)^T+B(x)\alpha M(x)+2\gamma Q)Q^{-1}x<0 \tag{17}$$

이므로 D_Q는 폐루프시스템 (6)의 invariant set이다. 따라서 $x(0)\in D_Q$일 때 폐루프시스템은 설계사양을 충족한다. 이하 증명 끝.

정리2에서 D_x 의 크기는 P_x 의 선정에 의거 결정되지만 D_Q의 크기는 리아푸노프 후보함수에 따라 결정되므로 사전에 크기를 알 수 없다. 따라서 신뢰성 제어기가 안정한 국부적 영역의 크기를 키우기 위해 정리2의 모든 조건을 만족하면서 tr(Q)가 최대가 되는 해를 구한다. 이러한 최적화 문제는 matlab 환경에서 최근 개발된 SOSTOOLS를 사용하여 쉽게 구할 수 있다.

4. 수치 예

다음의 비선형시스템에서 정리2를 사용하여 국부적인 신뢰성제어기를 설계한다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & 0.34 & 0\\ 0.4 & 0 & x_1(t)-4.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix} \tag{18}$$

첫 번째 액츄에이터의 고장에 대해서는 시스템이 견실하여야하고 두 번째 액츄에이터는 고장이 발생 않는다고 가정한다. 이 경우 고장 모델 파라메터는 다음과 같다.

$$\alpha_1^L=0, \quad \alpha_1^U=1, \quad \alpha_2^L=\alpha_2^U=1 \tag{19}$$

따라서 (4)에 의하면

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \beta_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{20}$$

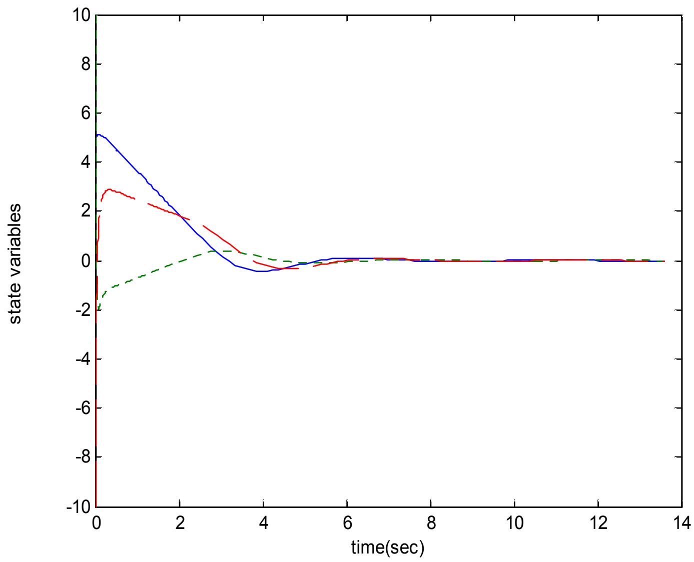
$P_x = 0.0005I$라 선정하고 (13)에서 $\gamma = 0.2$, $\epsilon(x) = 10^{-6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$이라 정의하고 (14)에서 $\epsilon = 10^{-6}$이라 정의한다. (13)-(15)가 SOS가 되는 제약조건하에서 $tr(Q)$를 최대화하는 해를 구하면

$$Q = \begin{bmatrix} 1250.0 & -373.1 & 623.2 \\ -373.1 & 690.9 & 283.2 \\ 623.2 & 283.2 & 1481.0 \end{bmatrix},$$

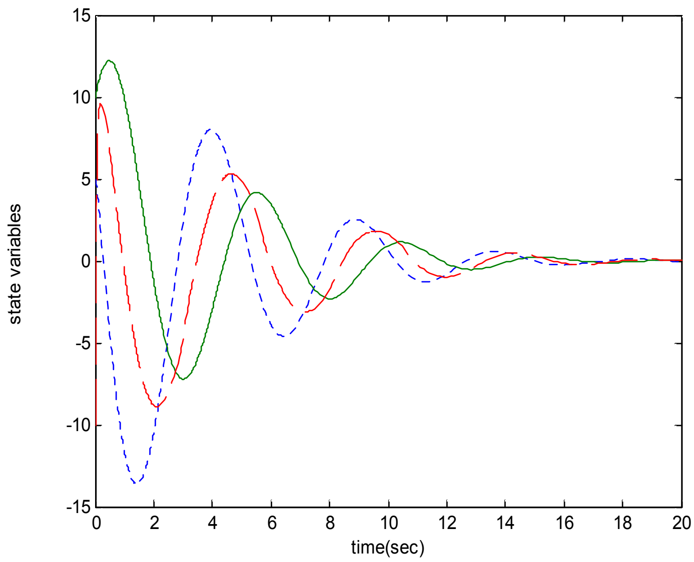
$$K = \begin{bmatrix} -0.813x_1^2 + 0.000479x_1 - 1.11 & 0.650x_1^2 - 0.107x_1 + 2.47 \\ -1.64x_1^2 + 0.000542x_1 - 2.23 & 0.711x_1^2 - 0.117x_1 + 1.38 \\ 0.653x_1^2 - 0.000637x_1 + 0.894 & -0.878x_1^2 - 0.856x_1 + 1.99 \end{bmatrix}^T$$

를 얻는다. 초기값 $x(0) = [5\ 10\ -10]^T$ 이면 $x(0)^T Q^{-1} x(0) = 0.848 \leq 1$이므로 $x(0) \in D_Q$이다. 액츄에이터의 고장이 없는 정상운전의 경우 그림1에서 모든 상태변수가 원점으로 수렴하고 있는 것을 볼 수 있다. <그림 1>에서 $x_1(t)$는 실선으로 $x_2(t)$는 점선으로 $x_3(t)$는 대쉬로 나타내었다.

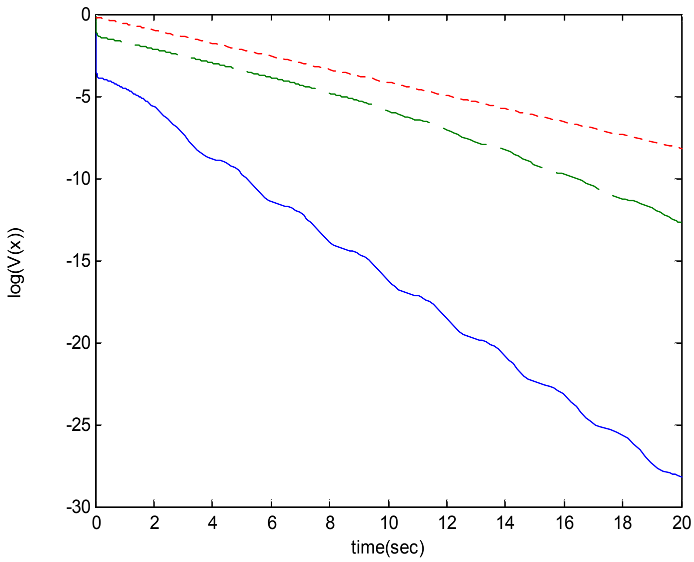
다음 첫 번째 액츄에이터가 고장으로 탈락하고 두 번째 액츄에이터만 정상작동할 때의 경우를 <그림 2>에 나타낸다. 첫 번째 액츄에이터가 고장난 경우에도 <그림 2>에서 보는 바와 같이 모든 상태변수들이 원점으로 수렴하였다. <그림 2>에서 $x_1(t)$는 실선으로 $x_2(t)$는 점선으로 $x_3(t)$는 대쉬로 나타내었다. 감쇄율 γ로 원점에 수렴하는지를 보이기 위해 $\log(V(x(t)))$를 <그림 3>에 나타내었다. 실선은 정상운전의 경우이고 대쉬는 첫 번째 액츄에이터 고장의 경우이고 점선은 $\log(e^{-\gamma t} V(x(0)))$를 나타낸다. <그림 3>에서 보는 것처럼 첫 번째 액츄에이터에 고장이 발생하여도 감쇄율 γ로 원점에 수렴함을 알 수 있다.



<그림 1> 정상운전



<그림 2> 첫 번째 액츄에이터 고장시



<그림 3> log(V(x)) vs. time

5. 결론

다항식 시스템에서 액츄에이터 고장을 가정한 신뢰성 제어기를 SOS 접근법을 사용하여 설계하였다. 액츄에이터 고장모델은 정상운전, 부분 성능저하, 완전고장으로 인한 탈락을 가상

하였다. 전역적으로 감쇄율 γ로 점근 안정화하는 신뢰성제어기와 국부적인 영역에서 감쇄율 γ로 점근 안정화하는 신뢰성제어기의 설계방법을 제시하였다. 제시한 설계법을 수치 예를 통하여 입증하였으며 컴퓨터 모의실험 결과 가정한 액츄에이터 고장에도 불구하고 설계사양을 만족하는 것을 확인하였다.

참고문헌

[1] R. J. Veillette, J. V. Medanic and W. R. Perkins(1992), "Design of Reliable Control Systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.37, No.3, pp. 290-304

[2] B. Yao and X. He(2006), "Guaranteed Cost Reliable Control for Discrete-Time Linear Systems", *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, pp. 1294-1298, June 21-23, Dalian, China

[3] G. H. Yang, J. Lam and J. Wang(1998), "Reliable H_∞ Control for Affine Nonlinear Systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.43, No.8, pp. 1112-1117

[4] L. Zhang, S. Wu, L. Zhang and J. Zhang(2006), "Adaptive Reliable and Robust H_∞ Control for Nonlinear Systems with Parametric Uncertainties and External Disturbances", Control, Automation, Robotics and Vision ICARCV'06 9th International Conference, Dec. 5-8, pp. 1-4

[5] H. Wu and H. Zhang(2006), "Reliable H_∞ Fuzzy Control for Continuous Time Nonlinear Systems with Actuator Failures", *IEEE Trans. on Fuzzy Systems*, Vol.14, No.5, pp. 609-618

[6] A. Papachristodoulou and S. Prajna(2005), "Analysis of Non-polynomial Systems using the Sum of Squares Decomposition", pp. 1-20, *Positive Polynomials in Control*, Springer

[7] K. Tanaka, K. Yamauchi, H. Ohtake and H. O. Wang(2007), "Guaranteed Cost Control of Polynomial Fuzzy Systems via a Sum of Squares Approach", *Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.5954-5959, New Orleans, LA, Dec. 12-14

[8] K. Tanaka, H. Ohtake, M. Wada, H. O. Wang and Y. Chen(2009), "Polynomial Fuzzy Observer Design: A Sum of Squares Approach", *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, pp.7771-7776, Shanghai, P.R.China, Dec. 16-18

[9] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan(1994), "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory", *SIAM studies in applied mathmatics*, Vol.15