한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제3호 (2012년 8월), 53–75

복소수 개념의 발달과 교육적 함의

Development of the concept of complex number and it's educational implications

이동환 Dong Hwan Lee

본 논문은 복소수 개념이 정당화되는 과정에서 실수와 허수 사이의 관계가 어떻게 변화했는지를 살펴보았다. 허수가 처음 등장한 16세기에 수학자들은 현재와 동일하게 허수를 계산할 수 있었지만 허수를 수학적 대상으로 인정하기까지는 200여년의 시간이 필요했다. 수학이 발달하면서 나타나는 새로운 문제 상황이 실수와 허수의 조화를 요구하였고, 그 결과 복소수의 개념이 점차 명확해졌다. 복소수 개념 발달의 역사는 실수와 허수의 대립이 해소되어 실수와 허수를 복소수로 포괄할 수 있는 관점을 찾아가는 과정이었다. 실수와 허수가 어떤 점에서 대립을 하였고, 수학자들은 이러한 대립에 어떻게 대처하였는가에 분석의 초점을 두고, 실수와 허수의 관계를 정립하는 과정에서 나타난 새로운 사고방식이나 관점을 확인하고 그 영향을 살펴본다. 그리고 이러한 분석결과가 보여주는 교육적 함의를 기술하였다.

When imaginary numbers were first encountered in the 16th century, mathematicians were able to calculate the imaginary numbers the same as they are today. However, it required 200 years to mathematically acknowledge the existence of imaginary numbers. The new mathematical situation that arose with a development in mathematics required a harmony of real numbers and imaginary numbers. As a result, the concept of complex number became clear. A history behind the development of complex numbers involved a process of determining a comprehensive perspective that ties real numbers and imaginary numbers in a single category, complex numbers. This came after a resolution of conflict between real numbers and imaginary numbers. This study identified the new perspective and way of mathematical thinking emerging from resolving the conflicts. Also educational implications of the analysis were discussed.

Keywords: 복소수(Complex Number), 허수(Imaginary Number), 역사-발생적 분석 (Historico-genetic Analysis)

MSC: 01A99 ZDM: A30
제출일: 2012년 7월 3일 수정일: 2012년 7월 9일 게재확정일: 2012년 8월 16일

1 서론

MacLane[14, p.307]은 극히 간단한 대수적 도구($i^2 = -1$)인 i가 기하학 해석학 등의 여러 분야의 개념들을 통합하는 역할을 한다는 사실에 놀라워했다. 복소수는 대수, 해석, 기하, 수론 등의 수학 내의 다양한 영역에서 문제를 해결하는 적절한 환경을 제공하고 있다(Kleiner[11], p.588). Stillwell([19], p.305)은 복소수라는 하나의 대상에 그렇게 풍부한 대수적, 기하학적 구조가 동시에 존재한다는 점을 가리켜 기적이라고 표현하였다. 이렇게 기적이라 할 만큼 풍부한 구조를 지닌 복소수이지만, 복소수 개념이 정당성을 인정받기까지 오랜 시간 동안 논란이 있었고, 그 과정에서 복소수 개념은 물론 수학에 대한 새로운 관점이 등장했고 수많은 수학적 개념과 분야들이 탄생하였다. 따라서 복소수 개념의 발달에 대한 역사-발생적 분석은 새로운 수학적 대상이 논란을 극복하여 정당화되는 과정을 극적으로 보여줄 수 있고, 이는 수학이 발전하는 과정에 대한 이해와 통찰을 제공할 수 있다.

수학개념에 대한 역사-발생적 분석은 수학개념의 변화를 보여준다. 그러한 변화를 일으킨 합당한 원인이 있을 것이며, 이는 발달과정에서 분명해지고 검증된다는 것이 역사-발생적 분석의 가정이다. 역사-발생적 분석은 변화의 원인과 지향점을 밝힘으로서 수학개념의 발달과정을 이해하는 과정이다. 따라서 학생의 수학개념 획득과정에 관심을 둔 수학교육은 이러한 역사-발생적 분석이 밝힌 수학개념의 발달과정에서 많은 시사점을 얻을 수 있다.

복소수 개념의 발달 과정은 허수의 등장으로 인해 시작되었다. 앞으로 살펴보겠지만, 허수가 처음 등장한 16세기에 이미 수학자들은 현재와 동일하게 허수를 계산할 수 있었다. 그러나 허수를 수학적 대상으로 인정하기까지 200여년의 시간이 필요했다. 이러한 사실은 허수의 역사-발생을 분석하는 일은 계산과정의 변화를 보는 것이 아니라 수학자들이 허수를 어떠한 관점에서 보았는가를 분석하는 일이 되어야 함을 의미한다. 따라서 복소수 개념의 발전은 실수와 허수의 관계를 정립해가는 과정으로 볼 수 있다. 둘 사이의 관계를 정립하는 과정에서 수학자들은 대수에 대한 관점을 바꾸어나갔으며, 대수와 기하의 조화를 고려하게 되었다. 복소수 개념의 역사-발생적 분석의 기준은 복소수 개념이 정당화되는 과정에서 실수와 허수 사이의 관계가 어떻게 변화했는지를 살펴보는 데 있다. 이 논문에서는 실수와 허수가 어떤 점에서 대립을 하였고, 수학자들은 이러한 대립에 어떻게 대처하였는가에 분석의 초점을 두고, 실수와 허수의 관계를 정립하는 과정에서 나타난 새로운 사고방식이나 관점을 확인하고 그 영향을 살펴본다. 그리고 이러한 분석결과가 보여주는 교육적 함의를 기술한다.

2 복소수 개념의 역사-발생적 분석

복소수 개념의 발달 과정을 살펴보면, 수학자들이 복소수 개념을 수용하는 결정적 계기가 존재하여 점진적으로 복소수의 정당화가 이루어졌다. 따라서 이러한 결정적 계기를 고려하여, 복소수 등장의 배경, 복소수의 유용성 인식, 복소수의 의미 확보, 타 분야에서 복소수의 응용 순서에 따라 복소수 개념의 역사-발생적 분석을 실시하였다.

2.1 대수적 문제해결 방법의 타당성 확보를 위한 복소수의 등장

학교수학에서는 $x^2+1=0$과 같은 특수한 이차방정식을 풀기 위해 복소수가 필요하다는 점을 이용하여 복소수를 도입한다. 그러나 모든 이차방정식이 근을 가질 필요는 없었다. 예컨대, 이차방정식을 이용하여 원과 직선의 교점을 구할 수 있는데, 이 때 원과 직선이 항상 만나는 것은 아니며 따라서 이 경우 이차방정식의 근이 없는 것이 훨씬 자연스럽다. 이차방정식 근의 공식에서 $b^2-4ac<0$인 경우, 우리는 그 결과를 무시하고 해당 이차방정식은 풀 수 없다고 말하면 그만인 것이다. 실제로 수학자들이 음수의 제곱근을 무시할 수 없었던 것은 이차방정식 풀이에서가 아니라 삼차방정식의 풀이에서였다.

기존의 실수에 대한 절차를 적절한 응용범위를 넘어서는 경우에 대해서도 그대로 적용해 본 수학자의 과감한 유추로부터 허수가 등장하였다. 대수학 특유의 알고리즘과 기호조작이 이러한 유추를 가능하게 했다. 복소수를 최초로 언급한 수학자는 3차, 4차 방정식의 일반적인 해법을 제시한 Cardano였다.

> 10을 두 부분으로 쪼개서, 그 곱이 30 또는 40이 되도록 해야 한다면, 이 문제는 불가능함이 명백하다. 그렇지만 다음과 같이 해결할 수 있다. 10을 두 개의 같은 부분으로 쪼개서, 각각이 5가 되도록 해라. 제곱을 하면 25가 된다. 곱이 40이 되도록 만들고 싶으면, 25에서 40을 빼라. 그러면 -15가 남는다. 이것의 제곱근을 5에 더하고 빼라. 그러면 곱이 40이 되는 수들이 나온다. 즉, $5+\sqrt{-15}$과 $5-\sqrt{-15}$가 그 수들이다(Cardano[4], p.219).

그는 제곱해서 -15가 되는 수가 있다면, 그 수를 5에서 더하고 뺀 두 수의 곱이 40이 될 수 있다고 주장한다. 물론 그는 이러한 음수의 제곱근을 "쓸모도 없고, 궤변적인 수"라고 즉시 거부했지만, 그가 보여준 계산 절차는 실근을 가지는 이차방정식의 두 근을 구하는 과정과 정확히 일치한다. 이렇게 '불가능한 수'에 대해 기존의 대수적 절차를 적용해보는 시도는 그 뒤로 점점 늘어나게 되었다.

삼차방정식을 푸는 일반적인 공식을 최초로 발견한 수학자는 이탈리아의 Cardano(1501–76)였다. Cardano는 놀라운 치환을 통해 삼차방정식을 이차방정식 문제로 환원하여 일반적인 해법을 얻었다. $x^3+6x-4=0$을 예로 들어 간단하게 그 과정을 설명하겠다.

$x^3=-6x+4$에서 $x=u+v$로 치환하여 좌변을 정리하면 $u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$이다. 우변 역시 치환하면, $-6(u+v)+x$이다. 이제 좌, 우변을 정리하면 다음과 같은 식이 된다. $3uv(u+v)+u^3+v^3=-6(u+v)+x$. 이 식이 성립하기 위해선 $3w=-6$, $u^3+v^3=4$를 만족해야 한다. $v=-2/u$를 두 번째 식에 대입하면, $u^3-\frac{8}{u^3}=4$이다. 이 식의 양변에 u^3을 곱하면, $(u^3)^2-8=4u^3$ 즉, $(u^3)^2-4u^3-8=0$이라는 u^3에 관한 이차방정식 형태가 된다. 이제 이차방정식의 근의 공식을 적용하면, $u^3=\frac{4\pm\sqrt{4^2+4\times8}}{2}=2\pm2\sqrt{3}$이다. u,v는 서로 교환가능 하므로, $u^3=2+2\sqrt{3}$라고 하면, $v^3=2-2\sqrt{3}$이다. 따라서 삼차방정식의 근 $x=u+v=\sqrt[3]{2+2\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-2\sqrt{3}}$이다.

$x=u+v$라는 놀라운 치환으로부터 삼차방정식 $x^3=px+q$을 푸는 Cardano 공식

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

을 구할 수 있다.

이차방정식의 근의 공식에서 근호 안의 값이 음수가 되면 즉, $b^2-4ac<0$이면 해가 존재하지 않듯이, 이 삼차방정식의 근의 공식도 그러한 판별식이 존재할 것인가? 삼차방정식 $x^3=15x+4$를 근의 공식으로 풀어보면 이에 대한 답을 얻을 수 있다. $p/3=5$, $q/2=2$를 대입하여 근의 공식으로 풀어보면 그 근 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{4-125}}$에는 음수의 제곱근 $\sqrt{-121}$이 나타난다. 이차방정식처럼 이 삼차방정식도 허근을 가지는 것인가? 그렇지 않다. 명백히 $x=4$라는 실근이 존재한다. Cardano는 이러한 경우를 언급하지 않았지만, 서로 다른 세 실근을 가지는 삼차방정식[1)]의 근의 공식에 음수의 제곱근이 등장하는 역설적인 상황을 계속해서 무시할 수는 없었다.

이탈리아의 수학자 Bombelli는 이 방정식을 1572년 출간된 자신의 Algebra에서 다루었다. Cardano의 공식에 확신을 가진 Bombelli는 분명히 실근이 있지만 Cardano의 공식으로는 허수 성분을 가진 답이 나오는 모순을 더 이상 피할 수 없었다. 그래서 그는 $x=4$라는 명백한 실근과 근의 공식으로 구한 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$이 서로 동일한 값이라는 것을 보이려고 했다. 그는 $(2+\sqrt{-1})^3=2+11\sqrt{-1}$, $(2-\sqrt{-1})^3=2-11\sqrt{-1}$임을 계산했고 이로부터 $x=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$라는 결과를 얻었다. Cardano의 근의 공식이 옳다는 것을 보인 것이다.

> 이것을 많은 사람들이 '과감한 생각(wild thought)' 이라고 비판한다. 나 역시 오래 동안 동일한 견해를 가지고 있었다. 전체 상황이 진실이 아니라 궤변에

1) $x^3=15x+4$은 서로 다른 세 실근 4, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$을 가진다. 게다가 Cardano의 공식에서 음수의 제곱근이 나오는 조건인 $(q/2)^2-(p/3)^2<0$을 만족하는 삼차방정식 $x^3=px+q$은 항상 서로 다른 세 실근을 가진다.(Nahin, 2004, 26). 또한, 삼차방정식에 대한 모든 근의 공식은 근호 안의 값이 음수가 되는 경우가 반드시 존재한다는 것이 증명되었다(Waerden 1949, 180).

> 의존하는 것처럼 보였다. 그러나 나는 아주 긴 시간 동안 생각한 뒤에 드디어 이것이 옳다는 것을 증명했다(Kleiner[11], p.584).

Bombelli가 $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} = 2+\sqrt{-1}$라고 과감히 추측하고 $\sqrt{-1}$과 $-\sqrt{-1}$을 더하면 서로 사라진다고 생각한 것은 놀라운 진전이었다. 그러나 Bombelli가 내딛은 가장 중요한 발걸음은 $\sqrt{-1}$도 대수의 일반적인 규칙을 따르는 대상이라고 '과감하게' 가정했다는 점이다. Bombelli는 3차방정식의 근의 공식이라는 대수적 문제해결 방법의 타당성을 일반화하기 위해 의심스러운 $\sqrt{-1}$에 계산규칙을 적용한 것이다. Bombelli는 세제곱근 근호 안의 두 수식 $2+\sqrt{-121}$과 $2-\sqrt{-121}$이 단지 부호만 다르고, 따라서 이들의 세제곱근도 부호만 다를 것이라는 '대담한 생각' 을 바탕으로 $2+11\sqrt{-1}$이 $(a+b\sqrt{-1})^3$의 결과일 것이라고 예상하고 a, b값을 구하려고 했다. 그는 $(m+n)^3 = m^3+n^3+3mn(m+n)$라는 전개식에 $m = a$, $n = b\sqrt{-1}$을 대입하였다. 다시 말해, Bombelli는 $(\sqrt{-1})^2 = 1$이라 가정하고 분배법칙, 교환법칙 등과 같은 실수에서 성립하는 대수규칙을 그대로 적용하여 $(a+b\sqrt{-1})^3$을 계산함으로서 $a = 2, b = 1$을 찾아내었고 $(2-\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1}$임을 주장하였다.

우리는 복소수를 실제적으로 사용하는 기술자 Bombelli를 만난 것이다. Bombelli의 복소수 연산규칙을 자세하게 설명하였는데, 이는 현재 학교수학의 계산방식과 동일하다. Bombelli는 실수의 계산규칙을 $\sqrt{-1}$의 계산에 그대로 적용했고, 이것이 유용한 결과를 가져옴으로서 $\sqrt{-1}$의 계산에 확신을 가지고 그 계산규칙을 자세하게 서술하였다. Bombelli는 허수가 무엇인가에 대해서는 개의치 않았고, 허수도 실수처럼 계산할 수 있다는 점에 주목하여 허수와 실수 모두를 계산하는 방법을 소개하였다. Bombelli에게 실수와 허수는 모두 계산할 수 있다는 점에서 차이가 없었다. 그러나 허수는 결코 실수가 아닌데 실수처럼 계산하는 것은 타당하지 않다는 의심이 계속 제기되었다. 허수는 실수가 될 수 없다는 점이 분명했고 따라서 허수는 불가능한 수, 허구에 불과하다는 생각이 수학자들을 계속해서 괴롭히고 있었다.

Bombeli의 '형식적' 조작은 '개념적 수준' 에서 수 이론의 변화를 촉발했다(Glas[9], p.369). 양수와 음수 모두 제곱하면 양수가 되기 때문에, $\sqrt{-1}$은 측정가능하고 셀 수 있는 양이라는 16세기 일상적인 의미의 수에 속할 수 없었다. 그러나 그것은 기존의 사칙연산을 만족시켰고, 3차방정식 문제 해결에 꼭 필요한 복소수 수식과 관계를 만들어내었기 때문에, 실수의 계산 규칙에 따라 다룰 수 있는 대상으로 간주되었다.

2.2 법칙을 간결하게 만드는 복소수의 유용성 인식

17세기 이후 수학자들은 복소수에 대한 계산 경험을 쌓아가면서, -1의 제곱근을 사용하면 고차 다항식을 일차식으로 인수분해 할 수 있다는 통찰을 얻게 되었다(Laugwitz[13], p.66). 수학자들은 이차방정식의 풀이를 허용하는 복소수가 임의의 차수의 방정식의 풀이

도 가능하게 한다는 확신을 품게 되었다(Bourbaki[3], p.161). 복소수 연산에 대한 이해가 깊어지면서 대수학의 기본정리[2)]를 수용하는 길이 점차 열리고 있었다.

정리1은 Girard(1595–1632)가 비록 허술한 형태지만 최초로 언급하였다. Girard는 방정식의 구조를 연구하면서 근과 계수의 관계를 설명하였다.

> 모든 대수방정식은 최고차항의 지수만큼의 근을 가진다. 단, 불완전방정식은 예외이다. 방정식의 최고차항의 계수가 1이고 교대순서를 따를 때, 근들의 첫 번째 묶음은(first faction) 첫 번째 항(mingling)의 계수와 같다. 근들의 두 번째 묶음은 두 번째 항의 계수와 같다. 이런 식으로 하여 마지막 묶음은 상수항(closure)과 같다.[3)](Tignol[21], p.35)

Girard는 불완전방정식이 항상 차수만큼의 근을 가지는 것은 아니라고 지적하였는데, 왜 그러한 제한을 두었는지는 알 수가 없다. 완전방정식도 불가능한 근을 가지는 경우가 있으므로, 불가능한 근을 고려하여 그러한 제한을 두었다고는 볼 수 없다. 그러나 Girard는 근과 계수의 관계는 불가능한 근이 있더라도 성립한다고 주장했다. 완전방정식과 불완전방정식 모두의 경우에 근과 계수의 관계는 성립한다고 보았다.

> 이러한 불가능한 근의 용도를 말할 수 있다. 나는 세 가지를 말하겠다. 일반적인 규칙의 확신을 위하여, 그 밖의 다른 근은 없기 때문에, 그리고 그것의 유용성 때문이다.(Tignol[21], p.26)

Girard는 불가능한 근의 유용성을 다음과 같이 설명했다. 만약 $x^4 = 4x - 3$을 만족하는 x에 대하여 $(x+1)^2 + 2$의 (양수)값을 찾는다면, 방정식 $x^4 = 4x - 3$의 근이 $1, 1, -1-\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}$이므로 $(x+1)^2 + 2 = 6, 6, 0, 0$이고 따라서 6이 유일한 값이다. 그런데 우리는 불가능한 근 없이는 결코 이 결과를 확신할 수 없다.

Girard의 정리가 현대의 대수학의 기본정리만큼 분명한 것은 아니다. 그는 다항식의 '불가능한' 근이 존재한다고 주장했지만 그 증명은 본질적으로 불가능했고, 심지어 그것을 증명이 필요한 정리로 생각했는지도 의심스럽다. Girard는 다른 수처럼 불가능한 근에 대한 연산도 가능하다고 암묵적으로 가정한 것을 제외하고는, 불가능한 근과 관련하여 어떠한 언급도 하지 않았다. 불가능한 근이 복소수체보다 큰 수체계에 속할 가능성도 허용하고

---

2) 정리 1. 복소수계수 n차 다항식은 n개의 복소수 근을 가진다.
위 정리와 동치인 정리로서 실수 다항식과 관련하여 말하면, 다음과 같다.
정리2. 모든 실수계수 다항식은 1차 또는 2차 실수계수 다항식의 곱으로 인수분해 된다.

3) Girard는 방정식이 적어도 하나의 항이 없을 때(즉, 계수 중 하나가 0일 때), 그 방정식을 불완전하다고 불렀다. 그리고 각 항들을 minglings라 하고, 마지막 상수항을 closure라고 하였다. 근들의 첫 번째 묶음은 모든 근의 합이고, 두 번째 묶음은 근을 두 개씩 곱한 것들의 합이고, 세 번째 것은 세 개씩 곱한 것들의 합이고 마지막 것은 근을 모두 곱한 것이다. 방정식의 홀수차항이 등식의 왼쪽에 짝수차항의 반대쪽에 있을 때, 그 방정식은 교대순서를 따른다고 한다.(Tignol[21], p.35).

있었다. 실제로 Girard 이후 수학자들은 n차 방정식이 n개의 근을 가진다는 것은 자명한 것으로 받아들였으며, 그러한 불가능한 근의 형태가 $a + b\sqrt{-1}$라는 것을 증명하는 것이 문제라고 생각했다.

방정식 이론전개에서 Descartes[6]의 통찰의 대부분은 '모든 다항식은 1차식으로 인수분해 될 수 있다.'는 가정에 기초하고 있다. 당시의 수학자들은 대수학의 기본정리를 암묵적으로 당연하게 받아들일 뿐, 증명을 시도하지 않았다. Descartes역시 마찬가지였다. Descartes는 대수학의 기본정리를 엄밀하게 증명하는 대신 간단한 예를 통해 비형식적으로 설명할 뿐이었다.

> 모든 방정식은 미지수의 차수만큼 근을 가질 수 있다. 예를 들어, $x = 2$와 $x = 3$을 생각해보자. 두 방정식 $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$을 곱하면 $x^2 - 5x + 6 = 0$이다. 이 방정식의 근 x는 2와 3이다. 만약 이 방정식에 $x - 4 = 0$을 곱한다면, 우리는 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$이라는 또 다른 방정식을 얻는다. 이것은 x에 대한 3차식이고 x는 3개의 근 2, 3, 4를 가진다.
>
> 그러나 근 가운데 몇 개는 거짓근(즉, 없는 것보다 작다)일 수 있다. 만약 x가 5의 부족을 뜻한다면, $x+5 = 0$을 말하는 것인데, 여기에 $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$를 곱하면 4개의 근을 가지는 방정식 $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$이 된다. 이 방정식은 3개의 참근 2, 3, 4와 하나의 거짓근 5(-5를 뜻한다)를 가진다.
>
> 지금까지의 논의로부터, 몇 개의 근을 가지는 방정식은 항상 미지수 빼기 참근 또는 미지수 더하기 거짓근으로(예컨대 $x+\alpha$, $x-\alpha$) 나눌 수 있음이 분명하다. 이러한 방식으로 방정식의 차수를 줄일 수 있다.
>
> 그러나 $x - \alpha$로 그 방정식을 나눌 수 없다면, 그 방정식은 α를 근으로 가지지 않는다. 따라서 위 방정식 $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$은 $x - 2$, $x - 3$, $x - 4$, $x + 5$로만 나누어지고 다른 일차식으로는 나누어지지 않는다. 따라서 그 방정식은 오직 2, 3, 4, -5만을 근으로 가진다. (Descartes[6], p.159)

Descartes는 방정식의 풀이를 인수분해로 설명한다. 인수분해를 통해, 우리는 방정식의 근을 구할 뿐만 아니라 근을 구하지 않고도 방정식의 계수로부터 근에 대한 유용한 정보를 얻을 수 있다. Descartes는 후자에 주목하고 방정식의 조작에 따른 근의 변화를 연구하였다. Descartes는 방정식을 조작하기 위해 근을 사용하였다. 방정식 연구의 목적이 근을 찾는데만 있지 않았음을 보여준다. 방정식 자체를 연구 대상으로 삼았다고 볼 수 있다. 방정식 자체를 연구하는 방정식이론을 본격적으로 전개하였다.

> 우리는 참근과 거짓근의 개수를 판단할 수 있다. 방정식의 각 항의 계수들의 부호가 $+$에서 $-$ 또는 $-$에서 $+$로 바뀌는 횟수가 참근의 개수와 같고, 두 개의

> $+$부호나 두 개의 $-$부호가 연속되는 횟수는 거짓근의 개수와 같다. 예를 들어, $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$은 3개의 참근과 1개의 거짓근을 가진다. (Descartes[6], p.160)
>
> 방정식의 근이 미정인 상태에서 각각의 근을 원하는 만큼 키우거나 줄이기 원한다면, 우리는 미지수를 새롭게 치환하면 된다. $x^4+4x^3-19x^2-106x-120 = 0$의 모든 근을 3만큼 증가시키려면 $y-3 = x$로 치환하면 된다. 이렇게 치환하면 $y^3-8y^2-y+8 = 0$이 된다. 이 방정식의 근은 5 대신 8이다. 이러한 방식으로 우리는 근을 키우거나 줄일 수 있다.
>
> 방정식의 근을 구하지 않고도 그 근을 바꿀 수 있는 이러한 방법은 두 가지 유용한 결과를 알려준다.
>
> 첫째, 우리는 언제나 방정식의 두 번째 항의 계수를 없앨 수 있다.[4)]
>
> 예를 들어, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$의 세 근의 합이 9이므로, 각각의 근에서 3을 빼면 새로운 세 근의 합은 0이 된다. 따라서 $y + 3 = x$로 치환해서 정리한 y에 관한 3차방정식의 이차항의 계수는 0이다.
>
> 둘째, 거짓근의 절대값 만큼 근을 키움으로서 우리는 방정식이 모두 참근을 가지도록 만들 수 있다. (Descartes[6], p.164–167)

Descartes의 이러한 방법들은, 모든 방정식을 일차식으로 인수분해 할 수 있다는 대수학의 기본정리에 근거한다. 그러나 $x^2 - 2x + 3 = 0$은 분명히 더 이상 인수분해가 불가능하다. 그러나 놀랍게도 실근을 가지지 않는 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$의 경우도 $y + 1 = x$로 치환하면 $y^2 + 2 = 0$라는 일차항이 없는 이차방정식으로 바뀔 수 있다. 실근이 있는 방정식처럼 두 근의 합을 2로 보고, 두 근에서 1씩 빼서 치환하니까 예상대로 일차항이 사라진 것이다. 실근이 존재하는 경우와 동일한 현상이 발생한 것이다. 다소 힘들겠지만 $x^2 - 2x + 3 = 0$도 인수분해가 가능하다고 상상하는 순간, Descartes의 방법은 모든 방정식에서 그 위력을 발휘하게 된다. 따라서 Descartes는 인정했다.

> 참근이나 거짓근이 항상 실수인 것은 아니다. 때때로 이들은 허근이다. 즉, 우리는 모든 방정식에 대해 앞서 필자가 부여한 만큼의 근의 개수를 가진다고 상상할 수 있지만, 그러한 근에 대응하는 명확한 양이 항상 존재하는 것은 아니다. 따라서 우리가 방정식 $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$이 3개의 근을 가진다고 상상할 수 있지만, 이 방정식은 실근 2 하나만을 가진다. 다른 2개의 근은 아무리 더하고 빼거나 곱하더라도 여전히 허근으로 남는다.(Descartes[6], p.175)

4) 삼차, 사차 방정식의 근의 공식을 얻기 위해선, 두 번째 항을 제거하는 것이 필요하다. 따라서 두 번째 항을 제거할 수 있는 치환법이 존재한다는 사실은 매우 중요하다.

허근에 대응하는 양은 존재하지 않고 따라서 허근은 방정식의 해결에는 도움이 되지 않지만, Descartes는 오로지 근을 찾는 실용적인 방정식연구의 수준을 넘어서 일반적인 방정식이론을 세우는 것이 목표였기 때문에 허근을 상상할 필요가 있었다. 치환에 의한 방정식의 조작을 설명하기 위해 Descartes는 새로운 근을 상상한 것이다. 물론 허근은 그 이상을 허락했다. Descartes는 인수분해 가능성과 그에 따른 근과 계수의 관계라는 유용한 규칙을 일반화하기 위해 허근을 상상하고 도입한 것이다(Bos[2], p.385). Descartes[6]는 방법론적인 중요성을 가지는 대수의 법칙들이 복소수 없이는 서술될 수 없음을 지적하면서 복소수의 사용을 정당화하였다. 예를 들어, 방정식은 그 차수만큼의 해를 갖는다는 법칙과 근과 계수의 관계 등이 이에 해당한다. 복소수를 인정해야만 비로소 그 법칙들이 완벽하게 일반적인 타당성을 가질 수 있었다. 특히, 복소수를 활용하여 방정식의 본성에 대해 보다 완벽한 지식을 얻을 수 있다(Euler[8]). 복소수를 도입하고 수용한 근거는 그것이 방법론적으로 필수불가결 했기 때문이다. 게다가 복소수의 사칙연산은 기존의 통상적인 산술규칙과 모순되지 않았기 때문에, 비록 그 의미는 몰랐지만 연산에는 큰 어려움이 없었다. 실수해를 갖지 않는 방정식에 단지 상징적인 해를 제공하려고 복소수를 도입한 것이 아니었다. 대수의 문제해결능력뿐만 아니라 대수이론 전체의 통합과 일관성을 강화하기 위해 복소수를 도입한 것이었다.(Glas[9], p.370)

> 대수학이 복소수를 수용한 의의(significance)는 복소수가 기본정리에 대한 일반적인 진술을 허용한다는 사실에 있다. 실수로만 한정한다면, 우리는 단지 n 차 방정식은 n 개의 근을 갖거나 그 이하거나 전혀 갖지 못할 수도 있다고 말할 뿐이다.(klein[12], p.104)

Bombelli가 허수의 계산규칙을 명료히 제시하면서, 실수와 허수 모두 동일한 계산규칙을 따른다는 관점에서 두 수의 관계를 설정했다면, 이제는 허수가 실수에서 성립하는 성질과 법칙 등을 완성하는 데 꼭 필요한 존재로 인정받기 시작했다. 실수의 계산규칙을 보고 자란 허수가 이제는 실수를 보완하고 이해하는데 꼭 필요한 존재가 되었다. 실수와 허수를 별개의 대상으로 보거나 대립의 대상으로 보는 것이 아니라 서로 밀접한 관련을 이루고 있다는 관점이 점차 확산되어 나갔다. 따라서 기존의 실수가 지배하던 영역으로 허수의 침투가 점점 활발해지기 시작했다.

자연수에 관한 문제를 해결하는데 복소수를 사용하기 시작했다. 1760년대 Euler와 Lagrange는 정수론 문제 해결을 위해 $a + b\sqrt{c},\ a, b, c \in Z$꼴의 수식을 사용하였다. 특히 Euler는 페르마의 마지막 정리를 증명하기 위해 $a + b\sqrt{-3}$를 사용하였다. 여기서 가장 결정적인 단계는 이러한 수식을 정수로 취급해야 한다는 것이었다. 정수로 취급한다는 것은 무엇인가? 정수에는 소수와 합성수가 있으며, 모든 합성수는 소수의 곱으로 유일하게 인수분해 된다. Euler는 정수의 성질을 연구하기 위해서는 정수 개념의 확장이 필요하다

는 아이디어를 제시하였다. 그 후 이러한 아이디어의 발전은 19세기 대수적 수 이론으로 이어졌다(Bashmakova & Smirnova p. 129-130). Euler[8]는 Algebra에서 간단한 증명-페르마의 문제- 몇 가지를 제시하였다. 페르마가 디오판투스의 책에서 정리한 문제였다. 자연수 중에서, 제곱수보다 2만큼 큰 세제곱수는 27뿐이다. 페르마는 엄밀하게 증명하였다고 하였으나 그 증명을 제시하지는 않았다. 즉, $x^2 + 2 = y^3$ 를 만족하는 자연수 해는 $x = 5$, $y = 3$ 뿐임을 증명하는 문제이다. Euler는 자연수 문제를 해결하는데 허수 $\sqrt{-2}$의 아이디어를 사용하여서 엄밀하지는 않지만 뛰어난 증명을 제시하였다.

Euler는 방정식의 좌변을 인수분해 하였다.

$(x + \sqrt{-2})(x - \sqrt{-2}) = y^3$

여기서 Euler는 우변이 y^3, 세제곱 꼴 이므로, 좌변의 $x + \sqrt{-2}$, $x - \sqrt{-2}$ 각각도 세제곱식이 되어야 한다고 과감하게 가정했다.

이러한 과감한 가정이 이 증명의 핵심으로, 바로 산술의 기본정리에 해당되는데, Euler는 그 가정을 증명하지는 않았다. 아마도 그는 정수의 소인수분해를 염두에 두고 증명을 진행했을 것이다. 예를 들어, 6의 세제곱은 $6^3 = 2^3 \times 3^3$ 으로 소인수분해 되고, 여기서 소인수들은 반드시 세제곱 꼴임을 알 수 있다. Euler가 도입한 복소수 꼴의 정수도 실제 정수와 같은 그러한 성질을 만족한다는 것은 1832년 Gauss가 $a + b\sqrt{-1}(a, b$는 정수$)$라는 가우스 정수 개념을 도입하면서 명확히 밝힌 것이다. 실제로 Euler의 증명에서 등장하는 $a + b\sqrt{-2}$는 유일인수분해정역(UFD)이므로 아래의 증명을 계속 진행할 수 있다.

그러면, 정수 a, b에 대하여 $x + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$ 가 성립해야 한다.

정리하면 $x + \sqrt{-2} = a^3 - 6ab^2 + (3a^2b - 2b^3)\sqrt{-2}$

허수부분이 같아야 하므로, $1 = 3a^2b - 2b^3 = b(3a^2 - 2b^2)$

따라서 $a = -1, b = 1$ 그러면 자연수 $x = 5$ 이고, $5 + \sqrt{-2} = (-1 + \sqrt{-2})^3$ 이다. 마찬가지로 $5 - \sqrt{-2} = (-1 - \sqrt{-2})^3$ 임을 알 수 있다.

유일인수분해정역 $a + b\sqrt{-2}$ 집합에서 $-1 \pm \sqrt{-2}$는 소수이므로, 27은 다음과 같이 유일하게 소인수분해 된다.

$27 = (5 + \sqrt{-2})(5 - \sqrt{-2}) = (-1 + \sqrt{-2})^3(-1 - \sqrt{-2})^3$[5)]

그러므로 $x^2 + 2 = y^3$ 를 만족하는 자연수 해는 $x = 5, y = 3$ 뿐임을 알 수 있다.

5) $3 = (-1 + \sqrt{-2})^3(-1 - \sqrt{-2})^3$ 이므로 $27 = 3^3$ 은 소인수분해가 아니다.

음수의 제곱근인 복소수가 정수론 문제해결에 사용되었다.[6] 복소수가 응용될 수 있었던 것은 $a+bi$ 꼴(가우스 정수, a, b는 정수)의 집합의 원소들의 소인수분해가 유일하다는 가정 때문이었다. Gauss는 정수론 문제해결에서 복소수가 유용함을 인식하고, 가우스 정수에서 보통의 정수와 비슷한 성질을 밝혀내었다. 그것이 바로 나눗셈 알고리즘과 소수의 성질이다 (Birkhoff & Mac Lane[1], p.440) 정수의 특성으로 알려져 있던 나눗셈 알고리즘과 소수를 새로운 영역인 가우스 정수에서도 발견한 것이다. 정확히 말하면, 그 동안 단지 정수의 부속된 성질이었던 나눗셈 알고리즘 및 소수가 복소수를 계기로 이제 독립된 대상이 되었다. 복소수의 사용은 산술의 기본정리를 밝히는 계기가 된 것이다. 이러한 성질을 바탕으로 한 산술의 기본정리는 정수 이외의 가우스 정수에서도 명확히 드러났고, 이러한 성질을 만족하는 영역을 정수와 비슷하게 취급할 수 있게 되었다. 실제로 유일인수분해정역(UFD)은 중요한 대수적 개념이며, 가우스정수와 다항식환 등 그 예가 많다. 복소수는 정수론 문제해결에 결정적 역할을 함으로서 정수의 기본개념을 명확히 드러내고 그 결과 정수의 기본개념을 일반화하고 확장시키는데 결정적 역할을 하였다. 이는 복소수가 정수의 기본개념(정역, 나눗셈 알고리즘, 소수)을 보존하면서 그 외연을 확장시키는 계기가 되었기 때문이다.

(가우스 정수와 같은) 유리수의 유한 대수적 확장을 사용하여 정수에 대한 질문을 탐구하는 것은, 19세기 정수론에서 볼 수 있는 가장 중요한 경향이다.

> 우리는 Gauss, Jacobi, M. Kummer의 복소수를 생각할 수밖에 없다. 이들의 성질이 정수 성질의 일반화이기 때문이 아니라, 정수의 특정 성질들이 복소수를 참조해야만 설명될 수 있기 때문이다. (Smith[20], p.46)

이처럼 허수는 기존의 영역을 설명하는 탁월한 능력을 발휘하고 있었다. 수학자들은 기존 영역과 허수의 관계를 더 이상 무시할 수 없었다. 실수가 지배하는 대수와 정수론의 기본정리를 허수 없이는 기술하고 설명할 수 없다는 점이 점점 명확해졌다. 이제 수학자들은 대수와 정수론의 연구대상이 수가 아니라 다른 데 있다는 점에 눈뜨기 시작했다. 대수와 정수론의 기본구조를 파악하는 데 허수가 중요한 역할을 했으며, 바로 그러한 기본구조의 관점에서 실수와 허수는 서로 다른 대상이 아니었다. 방정식의 풀이가 대수적 연산에 의해 해결된다면, 그러한 대수적 연산의 법칙을 만족하는 실수, 허수 모두 정당한 연구대상이 될 수 있다. 수학자들은 대수가 결국 이러한 법칙과 구조를 연구하는 것이므로 대수적 구조의

6) 정수론 문제에서 복소수가 사용되는 또 다른 예로 '두 제곱수의 합을 서로 곱하면 다시 두 제곱수의 합이 된다.' 즉, $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=u^2+v^2$ 의 증명은 다음과 같다.
$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(a+bi)(a-bi)(c+di)(c-di)$
$=[(a+bi)(c+di)][(a-bi)(c-di)]$
$=(u+vi)(u-vi)$
$=u^2+v^2.(u=ac-bd, v=ad+bc)$

관점에서 실수와 허수는 다르지 않다는 것을 인식하기 시작했다. 음수의 제곱이 항상 양수라는 사실과 허수의 제곱이 음수라는 사실 모두 동일한 연산법칙의 결과일 뿐이다.

정수를 정수답게 하는 것은 그 대상에 있는 것이 아니라 그 대상들이 이루는 관계 즉, 정역의 구조를 가지면서 나눗셈 알고리즘이 가능하고 소인수분해가 유일하다는 그 관계에 있다. 따라서 가우스정수도 비록 그 형태는 정수와 다르지만, 정수를 정수답게 하는 그 관계를 만족하기 때문에 정수처럼 볼 수 있고, 정수의 성질을 밝히는 데 정당하게 사용될 수 있는 것이다.

2.3 연산규칙에 의해 드러나는 복소수의 의미

허수는 실수의 계산규칙을 만족하였고, 대수를 비롯하여 기존의 수학이론에서 성립하는 여러 법칙들이 허수를 도입하여 일반성을 얻게 되었다. 그러나 여전히 수학자들은 허수의 사용에 신중하였다. 수학자들이 가장 주목한 질문은 다음과 같다. 허수가 실수가 아니라면 도대체 그 정체가 무엇인가? 그 정체도 모르는데, 실수에서 성립하는 연산을 허수에 그대로 적용하는 것이 말이 되는가? 전자에 대답하여 후자의 질문을 해소하려는 시도가 복소수의 기하적 해석이다. 후자의 질문에 답하여 전자의 질문을 해소하는 방식은 '형식불역의 원리'에 따른 대수의 형식성을 강조하는 것이다. 두 방식 모두 대수에 대한 관점의 변화를 요구하지만 후자의 경우가 더욱 근본적인 변화를 요구한다고 볼 수 있다.

John Warren은 '대수의 연산이 수의 정의나 원리보다 훨씬 포괄적(comprehensive)' 이라고 지적했다(Nagel[18]). 즉, 수가 연산을 제한하는 것이 아니라는 것이다. 비록 허수가 어떤 측면에서 보면 불가능한 존재를 기호화 한 것이지만, 모든 측면에서 그렇지는 않다. 그리고 이러한 점에서 허수는 분수와 유사하다. Warren은 다음과 같이 주장하였다. "우리가 문제의 본성상 분수 형태의 답을 인정하지 않는 문제를 푼다고 하자. 그런데 이 문제를 해결하면서 오직 분수 해만을 가지는 방정식을 얻게 되었다. 그 문제는 불가능성을 포함하는 것이다." '불가능성' 이 이제 상대적인 용어로서 분명하게 인식되었기 때문에, 이러한 대답은 사고에 있어서 큰 진전이었다. 가능이나 불가능 모두 연산의 내적 속성이 아니라 단지 인간이 연산의 대상에 부여해놓은 제약에 의한 결과가 된 것이다. 그러한 제약을 걷어내고 연산 대상이 취할 수 있는 범위를 넓혀놓으면 불가능이 가능으로 바뀐다. Warren은 자신의 과제가 실수와 허수 모두에 적용할 수 있는 그러한 '수 정의와 원리' 를 발견하는 것이라고 생각했다. 그리고 그는 대수가 산술적인 수를 연구대상으로 삼을 필요가 없다는 점을 인식하고 그 대상을 기하로 넓혔다. 대수의 관심이 수에서 연산으로 전환되었음을 알 수 있다. 그러나 그는 여전히 대수가 체계-외적인 어떤 특수한 대상을 참조해야 한다는 점에서 벗어나지 못했다. 대수는 형식적 성질, 즉 기호체계의 구조에서 드러나는 성질을 다룬다는 점을 간과하였다(Nagel[18]).

‘허수 양’ 을 지시하는 문자들은, 정의에 따라, ‘실제 양’ 을 지시하는 기호가 하는 방식과 똑같이 결합될 수 있다. 따라서 기호 $\sqrt{-1}$ 이 양을 표현하지 않고, 이에 대한 덧셈과 곱셈의 연산이 산술적 연산이 아니지만, 그 연산은 충분히 합리적 추론에 해당한다고 볼 수 있다.

Woodhouse는 허수의 계산은 량에 대한 일상적인 기호와 마찬가지로 정당할 뿐만 아니라, 그러한 계산은 허수에 어떠한 기하학적 해석을 부여하는 것과 아무런 관계도 없다고 주장하였다(Nagel[18]). 허수에 대한 대수적 연산의 성질을 정의하는 형식적 조건을 만족한다면, 대수적 계산에서, 기하학적 표현과 공식이 꼭 필요한 것은 아니다. 대수가 보편적 언어이기 때문에, 연구 대상에 속하는 조건을 표현하는 데 적합할 뿐이다. 알맞은 수식이 획득된다면, 그러한 추론이나 연역이 실행되는 데 아무런 의심을 할 필요가 없다. 따라서 $\sin x$ 와 같은 수식이, 기하학에서 빌려온 것인데, 대수나 해석학에서 등장할 때, 이들 수식은 대수 체계 내에서 x 의 특정한 대수적 기능을 나타내는 것일 뿐이다. 그러한 기하학적 수식이 그에 대응하는 해석적 함수보다 좀 더 편리하기 때문에, 그러한 수식이 사용되는 것이다.

이러한 아이디어는 Peacock의 저서에서 명확하게 ‘형식불역의 원리’ 로 드러났다. Peacock는 자신의 관점을 여러 단계로 발전 시켰다. 산술과 대수는, 비록 후자가 전자에 기초한다고 알려져 있지만(사실 이것도 거짓이지만), 두 개의 별개의 과학이다. 산술이 기호대수(symbolic algebra)[7]에 논리적 바탕을 제공하지 않지만, 후자의 원리(연산 법칙)를 제안하는 발견술적 가치를 지닌다. 어떤 점에서 보면, 기호대수의 연산이 임의로 가정된 것처럼 보이지만, 다른 점에서 보면 그렇지 않다. 적용가능 범위의 제한을 제외하면, 산술 연산은 대수 연산과 똑같은 형식적 조합 규칙을 따르고 있다. 그러나 Peacock는 산술에서 이러한 규칙이 정수와 비의 정의로부터의 필연적인 귀결이라고 보았다. 그러나 $+, -, \times, \div$ 기호가 더 이상 정수에 제한되지 않을 때, 이러한 규칙은 “가정이 된다. 이들은 서로 독립이고, 연산을 정의하고 해석하는 역할을 한다.” 산술 대수에서 a, b 등이 정수와 분수를 표현하지만, 기호대수라는 새로운 과학에서 이러한 기호는 정수나 분수를 표현할 필요가 없고, 일반적으로 그렇게 해석될 수도 없다. 연산의 형식적 규칙, 기호의 조합의 규칙만이 기호대수에서 타당하다. 우리가 그에 합당한 해석체계를 발견할 수 있느냐 없느냐는 중요한 문제가 아니다(Nagel[18]).

De Morgan은 대수 발달의 단계를 구분하였는데, 대수의 발달에서 첫 번째 단계는 산술이다. 산술은 수와 사칙연산 기호만이 등장한다. 그 다음 단계는 보편적 산술(universal arithmetic)이다. 수 대신에 문자가 등장하고, 연산은 그 기호의 값에 관계없이 수행된다. a 와 b를 임의의 수라고 하면, $a-b$가 불가능한 경우가 존재한다. 따라서 보편적 산술에서는

7) 기호의 의미를 고려하지 않고, 기호의 조합 규칙에 따라 연산을 수행하고 그 연산 결과에 대해서도 의미나 해석을 고려하지 않은 대수를 말한다. 다음 문단의 의미대수와 구분되는 용어이다.

항상 그 연산이 가능한 조건을 명시해야 한다. 세 번째 단계는 단일대수(single algebra)이다. 이는 음수를 염두에 둔 명칭으로서, 여기에 등장하는 기호는 방향을 가진 양을 뜻한다. 단일대수에서 음수는 더 이상 불가능한 양이 아니다. 음수는 반대방향의 선분을 표시하는 것으로 해석될 수 있다. 그러나 이차방정식의 풀이에서 등장하는 $a+b\sqrt{-1}$과 같은 수식은 단일대수에서 여전히 다룰 수 없다. 복소수를 해석할 수 있는 네 번째 단계를 드모르간은 이중대수(double algebra)로 보았다. 이중대수에서 복소수는 평면 위의 선분을 표현한다. 그 기호가 직선의 두 가지 특성, 즉 길이와 방향을 포함하기 때문에 이중이라는 수식어를 쓴 것이다. 이중대수는 드모르간이 앞서 제시한 기호대수의 모든 규칙을 만족했으며, 모든 기호의 조합에 의미를 부여할 수 있었다. 그래서 그는 이중대수를 대수의 완전한 형태라고 생각했다. 복소수가 더 이상 기호대수의 대상이 아니라 의미대수의 대상이 된 것이다. 의미대수(meaningful algebra)는 이미 기호의 의미가 규정되어 있어서 모든 대수적 연산의 의미가 확립된 대수를 뜻한다.

> 이중대수는 직선의 기호가 그것의 길이와 방향을 표현해야 하듯이, 서로 독립된 별개의 두 성질을 가진 대상을 다룬다는 것을 뜻한다. 그 보다 더 간단한 이름을 찾을 수 없었다. 여전히 불가능한 양(또는 양이 아닌 양)을 추론의 대상으로 삼는 기법에 당혹해하는 사람이, 다소 놀라운 형용사를 대수에 붙임으로써, 그 기법이 과학이 되고 불가능한 것이 가능해진다는 것을 인식한다면, 그들은 적어도 그러한 용어를 반대하지는 않을 것이다(De Morgan[16], p. ⅳ).

그렇다면 그가 자신의 저서에서 왜 처음부터 직선을 대상으로 하는 이중대수를 설명하지 않았을까? 본래 수학교육에 관심이 많았던 드모르간은 이중대수라는 대수의 완성된 모습을 학생에게 설명하는 과정을 고민한 결과, 그 과정은 단계를 반드시 거쳐야 하고 이 때 기호대수가 산술대수와 의미대수를 연결하는 데 꼭 필요하다고 판단했기 때문이다. 드모르간은 대수가 단지 일반화된 산술이라고는 생각하지 않았다. 따라서 그는 보편적 산술로부터 어떻게 의미대수를 얻게 되는가를 설명해야 하는 문제에 봉착하게 되었다. 그의 의견에 따르면, 기호적 접근이 결정적이다. 수학자는 보편적 산술에서 시작하여, 의미를 배제하고, 보편적 산술의 형식이나 법칙들을 모은다. 마지막으로, 가장 기본적인 대수법칙을 목표로 하면서 그러한 형식들을 일반화하고 비로소 의미대수, 곧 대수의 요소에 주목하게 된다. De Morgan[16, p.16]은 "의미대수로의 첫 단계는 일반과학(허수가 설명되지 않고 해석되지도 않은 대수)의 원리로부터 규칙을 분리해내는 것이다. 또는 연산이 수행되는 기호의 설명으로부터 연산의 법칙을 분리해내는 것이다"라고 말했다.

De Morgan[16]은 이 과정을 가리켜 제거와 복원(reduction and restoration)의 과정이라고 하였다. 그는 이차방정식의 풀이에서 제곱식을 만들기 위해 항을 복원하는 것과 (al-jabr), 그 식에서 제곱근을 구하여 방정식을 제거한다는 것(al-muqabala)에서 대수

(algebra) 라는 용어가 발생한 것에 착안하였다. 이차방정식의 풀이는 아라비아 대수의 가장 중요한 부분이었다. 이 용어의 순서를 바꾸어 보면, 대수를 확립하는 마지막 모습을 잘 표현하고 있음을 알 수 있다. 보편적 산술에서 의미를 제거하여 기호대수를 다루고, 그 다음 의미를 부여하여 새로운 의미대수를 복원한다.

보편적 산술에서는 $a > b$을 만족하는 특수한 값 a, b에 대해 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$가 성립한다. 형식 불역의 원리에 의하면 a, b의 값에 제한을 두지 않고 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$가 성립한다고 말할 수 있다. 그러나 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$이라는 등식은 덧셈과 곱셈의 교환법칙과 분배법칙이라는 형식적인 법칙에 의해 성립하는 것이다. 따라서 Gregory는 피콕의 대수이론을 개선하여 형식 불역의 원리 (permanence of equivalent forms) 보다는 형식적 법칙 불역의 원리 (permanence of certain formal laws) 로 표현을 바꾸었다 (Macfarlane, 1916: 13). De Morgan은 그레고리의 논의를 수용하여, 산술이 암시한 등식이 내적으로 일관된 대수체계를 형성하는 데 절대적인 것이 아님을 인식하였다. 그는 잘 완비된 규칙이 (공리) 필요하다고 생각했다. 피콕이 형식 불역의 원리에 의해 산술적인 의미로부터 제한조건을 제거하여 형식으로 나아갔다면, 드모르간은 추상적인 형식을 확립하고 다시 그로부터 새로운 의미로 나아가는 것을 택했다. 대수적 형식의 타당성을 산술에 의존하여 판단하고, 대수 체계를 일관되게 이루는 규칙체계를 규정하고, 그 체계에서 대수적 조작이 가능해진 다음에 그것의 의미를 추구하였다. 다음 글에 이와 같은 관점이 반영되어 있다.

> 기호의 의미를 포기함으로써, 또한 우리는 기호를 설명하는 용어의 의미도 버려야 한다. 따라서 덧셈은 아무 의미가 없다. 그것은 $+$로 표현되는 조합의 양식이다. $+$가 그것의 의미를 얻을 때, 그 용어도 의미를 얻는 것이다. 이번 장에서 학생들은 산술이나 대수의 모든 기호가 어떠한 의미도 가지지 않는다는 것을 명심해야 한다. 이번 장의 목적은 기호와 그 기호들의 조합을 다루는 기호대수를 소개하는 데 있다. 기호대수는 앞으로 수 백 가지의 의미대수들이 갖는 문법이 될 것이다 (De Morgan[16], p. 101).

De Morgan은 『Trigonometry and Double Algebra(1849)』에서 복소수의 기하학적 해석을 다루기 전에 삼각함수와 기호대수를 먼저 소개한다. 실제로 Trigonometry and Double Algebra 의 구성을 보면, 1부는 삼각법에 대한 전통적인 주제를 다루고 2부는 이중대수를 다루고 있다. 1부의 5장 '설명되지 않은 기호 $\sqrt{-1}$의 소개' 에서는 $\sqrt{-1}$의 의미를 언급하지 않고, $\sqrt{-1}$를 사용하여 기존의 참인 결과들을 일반화하고, 특히 삼각함수의 여러 성질들을 일반화하여 소개하고 있다. 그는 이러한 $\sqrt{-1}$의 사용을 일종의 실험이라고 보았다.

> $\sin\theta, \cos\theta$의 무한급수를 살펴보면, 각각의 항이 e^θ의 무한급수에서 나타난다. 쉽게 $\cos\theta + k\sin\theta = 1 + k\theta - \frac{\theta^2}{2} - k\frac{\theta^3}{2\cdot3} + \frac{\theta^4}{2\cdot3\cdot4} + \cdots$ 임을 보일 수 있다. 만약,

> $k^2 = -1, k^3 = -k, k^4 = 1, \cdots$ 를 만족하는 k가 존재한다면, $\cos\theta + k\sin\theta$는 $e^{k\theta}$가 될 것이다. 그러한 수는 지금까지 살펴본 대수에는 존재하지 않는다.: $k^2 = -1$은 불합리하기 때문이다. 만약 이러한 등식을 만족한다고 가정하고, 우리가 $k = \sqrt{-1}$를 만들어서 합리적인 기호인 양수와 음수를 규제하는 규칙에 따라서 그것을 사용한다면, 우리는 모든 대수학자들이 수행하는 과정을 분명하게 밝히면서 따라할 수 있다. 불가능한 양인 기호 $\sqrt{-1}$을 사용하여(실험이라고 불러야 마땅하다) 그 결과가 항상 참이 되고 그 결과를 다른 방식으로 증명할 수도 있음을 보일 것이다. 이제 이러한 실험을 행하도록 하겠다. 그러나 이 과정에 대한 심정적인 확신이 있더라도, 이 결과들이 지금 여기에서 증명되었다고 생각해서는 안 된다. $\sqrt{-1}$을 사용하는 데 우선권을 줌으로써, 학생들은 어려움을 겪지 않고 이중대수의 언어에 익숙해지는 장점을 얻을 것이다(De Morgan[16], p.41).

De Morgan은 기호대수에 의해 허수를 명시적으로 보여주고자 하였다. 기존의 규칙으로부터 자연스럽게 유추한 결과를 확인하면, 허수 사용에 익숙해지게 된다. De Morgan이 형식불역의 원리를 수학적인 측면이 아니라 교육적인 측면에서 수용한 것도 바로 학생들이 허수 사용에 익숙해지도록 하여 적으로 드러내어 형식화하도록 하기 위한 것이었다.

De Morgan[16]이 $\sqrt{-1}$의 불합리성 또는 불가능성을 언급하면서도 $e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$를 설명한 이유는 $\sqrt{-1}$에 대한 간단한 사칙연산뿐만 아니라 음수의 로그 및 복잡한 허수의 제곱근 등도 $a + b\sqrt{-1}$꼴로 표현할 수 있음을 보여주기 위한 것이었다. 당시 $a + b\sqrt{-1}$는 x좌표가 a, y좌표가 b인 점을 끝점으로 하는 선분을 표현한다는 사실이 알려져 있었다. Argand과 Warren도 그러한 의미로 복소수 기호를 사용했지만, $e^{a\sqrt{-1}}$을 해석하지는 못했다. 드모르간은 $e^{a\sqrt{-1}}$을 $a+b\sqrt{-1}$꼴로 바꿀 수 있었다. 바로 이 과정에서 삼각함수가 사용되었고, 그래서 그는 삼각함수를 이중대수에 앞서 비중 있게 다룬 것이다. 이중대수는 De Morgan이 앞서 제시한 기호대수의 모든 규칙을 만족했으며, 모든 기호의 조합에 의미를 부여할 수 있었다. 다시 말해, 복소수에 어떠한 대수적 조작을 가하여도 여전히 복소수 형태의 결과가 나올 수 있었다. 그래서 그는 이중대수를 대수의 완전한 형태라고 생각했다. 이제 복소수는 기호대수의 대상에서 의미대수의 대상으로 바뀌었다.

이제 의미가 제거된 기호대수에서 새로운 의미를 복원할 필요가 있다. De Morgan은 복원 과정을 설명하면서 여러 가지 의미대수가 가능하다고 주장하였다. 그 중에서 이중대수, 곧 복소수의 사칙연산이 모두 정의된 다음에 복소수 하나 하나의 의미를 결정하는 방식을 강조하였다. 그는 복소수를 뜻하는 $a + bi$는 기호일 뿐, 그것으로부터 어떤 의미가 결정되는 아니라 그러한 복소수를 조합하는 연산규칙이 완벽하게 정의된 후에야 비로소 복소수의 의미가 결정된다고 보았다. 따라서 De Morgan의 관점에서 복소수의 의미는 복

소수를 결정하는 연산규칙과 법칙에 의존한다. 앞서 가우스 정수 $a+bi$가 기존의 정수론 문제해결에 중요한 역할을 한 이유도 그것이 정수라서가 아니라 정수의 기본성질과 관계를 모두 만족했기 때문에, 가우스 정수를 사용하여 증명한 내용을 기존의 정수론에서 그대로 받아들여도 아무런 무리가 없는 것과 유사한 맥락이다.

2.4 새로운 개념의 등장을 자극하는 복소수의 역할

1712년부터 1713년 까지 Leibniz와 M. Bernoulli는 음수의 로그에 대해 논쟁을 벌였다. Bernoulli는 $\log a = \log(-a)$을 주장한 반면, Leibniz는 $\log(-a)$가 허수이므로, $\log a \neq \log(-a)$라고 주장하였다. 1727년에서 1731년 까지 Bernoulli와 Euler 역시 이 문제를 논의하였으나 끝내 해결되지 않았다. 1749년 Euler[8]는 음수의 로그에 대한 논쟁을 해결하는 논문을 발표한다. 이 논문에서 Euler는 Leibniz와 Bernoulli가 자신의 입장을 옹호하기 위해 제시한 논증과 반증을 체계적으로 서술하였다. Euler의 논문은 대립하는 두 입장을 충실히 설명하고, 그러한 대립의 원인을 지적하여 해소하는 과정을 상세하게 제시하고 있다. 이 과정에서 Euler에 의해 로그의 본질적인 의미와 복소수의 역할이 밝혀졌다.

Bernoulli의 주장은 다음과 같았다.

> 로그의 성질 $\log a^n = n\log a$을 이용하면, $n=2$일 때 $\log(-a)^2 = 2\log(-a)$이다. 그런데 $(-a)^2 = a^2$이므로, $\log(-a)^2 = \log a^2 = 2\log(-a)$이다. 따라서 $2\log(a) = 2\log(-a)$이고 $\log(a) = \log(-a)$가 성립한다(Euler[8], p.2).

Euler는 Bernoulli가 제시한 여러 가지 증명 가운데 위 논증이 가장 설득력 있다고 평가하면서 이에 대해 다음과 같이 반박하였다.

> 해석학과 로그의 확고한 제반 원리들을 부정하지 않는 한, 이 증명을 뒷받침하는 성질에 대해 의심할 여지는 없다. $(-a)^2 = a^2$을 부정할 수는 없다. 따라서 $\log(-a)^2 = \log a^2$은 당연하다. 게다가 일반적으로 $\log a^2 = 2\log a$도 확실하다. 따라서 Bernoulli의 주장대로 $\log(a) = \log(-a)$이다. 그러나 이 추론이 옳다면, Bernoulli를 비롯해서 어느 누구도 수용할 수 없는 결과를 연역할 수 있다. 우리는 동일한 방식으로 허수의 로그가 실수임을 증명할 수 있다. $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$이고 따라서 $\log(a\sqrt{-1})^4 = \log(a)^4$. 그러면 $4\log(a\sqrt{-1}) = 4\log(a)$이고 따라서 $\log(a\sqrt{-1}) = \log a$이다. 게다가 $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$이므로 $\log\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = \log a^3$, $3\log\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = 3\log a^3$, $\log\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right) = \log a$이다. 로그의 이론을 송두리째 뒤집는 결론들이다. 따라서 Bernoulli의 체계를 따르면, $\log(-1) = \log(1) = 0$뿐만 아니라, $\log(\sqrt{-1}) = 0$, $\log(-\sqrt{-1}) = 0$, $\log(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}) = 0$도 받아들여야 한다(Euler[8], p.4).

한편, Leibniz는 $\log(-a)$를 허수라고 생각하고 다음과 같이 주장하였다.

> $y = \log x$라 하자. x의 로그는 e의 지수 y이다 ($x = e^y$). e의 지수가 실수라면 e^y는 음수가 될 수 없다. $e^y = -1$을 만족하는 실수 y는 존재하지 않는다. 일반적으로 x값을 음수인 $-a$라고 할 때, 이 값의 로그를 y라고 하면, $e^y = -a$를 만족해야 하는데 이러한 y는 존재하지 않는다. 따라서 y는 허수[8])이다 (Euler[8], p.5).

Euler는 Leibniz의 증명방식을 그대로 적용하여 Bernoulli 주장을 증명할 수 있다고 하였다.

> $x = e^y$에서 $y = \frac{m}{2n}$ (분모가 짝수)이라면, $x^2 = e^{\frac{m}{n}}$이라고 할 수 있다. 그러면, $e^{\frac{m}{2n}}$은 x^2의 제곱근이다. 따라서 $+x, -x$ 모두 $e^{\frac{m}{2n}}$에 해당한다. 따라서 x와 $-x$의 로그는 $\frac{m}{2n}$으로 서로 동일하다 (Euler[8], p.6).

이처럼 $\log(a) = \log(-a)$와 $\log(a) \neq \log(-a)$ 가운데 어느 하나를 택하더라도 모순을 피할 수 없었다. Leibniz와 Bernoulli는 서로 다른 주장을 했으며, 어느 주장을 인정해도 로그 이론에 모순을 일으켰다.

> Leibniz와 Bernoulli(및 모든 수학자)가 '로그'에 부여한 아이디어가 완전하다면, 모순에 빠지지 말아야 할 것이다. 완전한 이론에 기초하여 로그 개념이 만들어졌다면, 어떻게 모순이 일어날 수 있을까? 주어진 수의 로그란, 임의로 선택한 수를 거듭제곱하여 그 주어진 수와 같게 되는 지수를 뜻한다. 이러한 생각은 완전하지만, 여기에 적절하지 않은 조건을 덧붙이고 있다. 즉, 무의식적으로, 각각의 수에 오직 하나의 로그만이 대응한다고 가정하고 있다. 로그를 둘러싼 이 모든 어려움과 모순이 각각의 수에 오직 하나의 로그만 대응한다는 가정에서 비롯된 것이다. 로그의 정의를 다시 살펴보면서, 나는 각각의 수에 무한히 많은 로그가 대응한다는 것을 발견하였다 (Euler[8], p.8).

위와 같이 Euler는 Leibniz와 Bernoulli 가 로그 정의를 사용하면서 적절하지 않은 가정을 하고 있음을 지적하였다. Leibniz와 Bernoulli가 서로의 주장을 반박하지만 모두 동일한 가정에서 벗어나지 못하고 있음을 지적하고 있다. Euler는 숨겨진 가정을 드러냄으로써 두 사람의 논쟁을 해소할 수 있었다.

> 주어진 수의 로그는 무한히 많다는 것이 로그의 본질이다. 원의 호의 길이 (및 각도)와 로그는 그 성격이 동일하다. 사인이나 코사인에 무한히 서로 다른 호의

8) 이 때 Leibniz가 말한 허수는 문자 그대로 상상의 수, 불가능한 수라는 뜻이며, $a + bi$ 형태의 복소수를 뜻하는 것이 아니었다.

> 길이가 대응하듯이, 로그에 무한히 많은 수가 대응한다. 그러나 중요한 차이가 있다. 동일한 사인이나 코사인에 대응하는 모든 호의 길이는 실수이지만, 하나의 수에 대응하는 모든 로그는 (양수에 대응하는 로그의 경우엔 실수 하나를 제외하고) 허수이다. 음수와 허수의 로그는 예외 없이 모두 허수이다. 주어진 호의 길이에 오직 하나의 사인이나 코사인이 대응하듯이, 주어진 로그에 대응하는 수는 오직 하나이다 (Euler[8], p. 19–20).

$+1$의 로그는 0뿐만 아니라 무한히 많다. 물론 그 수는 모두 허수이다. -1의 로그가 무수히 많은데 그 각각을 2배한 값이 $+1$의 로그 하나에 해당한다면, $2\log(-1) = \log(+1)$을 만족한다고 볼 수 있다. 따라서 한편으로 Bernoulli의 주장 가운데 $\log(-1) = 0$은 인정하지 않으면서, $2\log(-1) = \log(+1)$을 설명하고 있으며, 다른 한편으로 $\log(-1)$이 허수라는 Leibniz의 주장도 설명하고 있다. Euler의 입장은 두 사람의 주장을 모두 받아들이며 동시에 모두 반박한다고 볼 수 있다. 갈등을 일으키던 '$2\log(-1) = \log(+1)$' 과 '$\log(-1)$은 허수이다' 라는 두 관점 가운데 어느 하나를 제거함으로써 로그를 둘러싼 모호성을 해소한 것이 아니다. Euler는 '주어진 수의 로그는 무한히 많다' 는 새로운 관점을 제시함으로써 기존의 두 관점을 모두 포괄하여 모호성을 해소한 것이다. 갈등의 원인이 되었던 두 관점이 이제는 로그 개념의 본질을 설명하는 데 활용되는 것이다. 이것이 가능한 이유는 복소수의 존재 때문이다. $\log(-1)$이 단지 불가능하고 존재하지 않는 수가 아니라 이 역시 $a + bi$ 형태로 표현할 수 있었고, 이로 인해 Euler는 음수의 로그를 정당한 수학적 대상으로 포용할 수 있었다.

2.5 대수와 기하의 조화를 보여주는 복소수의 역할

이번에는 복소수로 인해 대수와 기하가 조화를 이루고 수학의 확장을 일으킨 과정을 살펴보겠다. 복소수의 기하학적 해석의 본질은 수를 이차원 량(방향을 가진 선분) 및 변환으로 해석했다는 데 있다 (Glas[9], p.371). 데카르트 기하학에서는 평면 위의 점에 한 쌍의 실수가 대응되며 또 역으로 한 쌍의 실수에 평면의 한 점이 대응된다. 즉, 실수 쌍들의 집합과 평면 위의 점들의 집합을 동일시한다. 이제 평면의 점을 하나의 수로 간주할 차례였다. 그런데 그렇게 하기까지 200년 가까운 시간이 소요되었다 (Dantzig[5], p.249).

Wessel[22]은 기하학에서 방향을 표현하는 연구를 위해 그 수단으로 복소수의 편리함을 이용하였다. Wessel에게 복소수는 해석의 목표가 아니라, 자신의 방향에 대한 이론을 예시해주는 수단이었다. 이는 당시 대수에서 복소수가 거의 수학적 대상으로 인정받고 있었음을 보여준다고 하겠다. 실제로 Wessel은 자신의 논문을 다음과 같이 시작하고 있다.

> 본 논문은 방향을 해석적으로 표현하는 문제를 다루고자 한다. 다시 말해, 직

> 선을 어떻게 표현해야 하는가의 문제로서, 미지의 직선과 기지의 직선으로 이루어진 방정식으로부터 우리는 미지의 직선의 방향과 길이를 표현하는 수식을 찾을 수 있어야 한다. … 방향이 대수적 연산에 의해 변화될 수 있는 한, 방향은 대수의 대상인 것이다. 그러나 반대연산 즉, 양에서 음으로 또는 그 역으로 바꾸는 연산만이 있었기에, 오직 이들 두 방향만이 이미 알고 있는 방식으로 표현되었고, 그 밖의 방향에 대해선 미해결 상태였다. 이러한 이유로 그동안 아무도 이 문제를 다루지 않았던 것이다(Wessel[22], p.103).

그는 방향을 대수의 대상으로 삼고자 했다. 대수의 관심이 수에서 연산으로 옮겨 가면서 대수 연산의 대상이 수에서 벗어나 기하학적 대상으로 확대된 것이다. 당시까지 양수와 음수로 직선 위의 양의 방향과 음의 방향만을 나타냈다면, 그는 이 한계를 걷어내고자 했다. 그러기 위해 평면 위의 모든 방향을 표현하고, 이들을 조작할 수 있는 새로운 연산이 필요했다. 기존의 대수적 연산을 새롭게 해석하여 확대할 필요가 있었다.

Wessel의 목표는 하나의 식으로 선분의 길이와 방향을 모두를 표현하고, 그 식의 연산이 선분의 길이와 방향의 조작을 표현하도록 하는 것이었다. 복소수와 그 덧셈, 곱셈이 바로 그가 찾는 대수적 표현이자 연산이었다. 그는 복소수를 이용해 선분의 방향과 길이 모두를 단일한 식으로 표현하게 되었고, 그 결과 선분의 길이와 방향에 대해 적절한 계산을 할 수 있었다. 그는 선분의 곱셈 연산을 다음과 같이 정의하였다.

> 첫째, 두 인수의 방향은 양의 단위가 속한 평면에 있어야한다.
>
> 둘째, 곱의 길이와 관련하여, 그 곱과 한 인수의 관계는 다른 인수와 단위의 관계와 같아야 한다.
>
> 셋째, (양의 단위, 인수, 그리고 곱의 시점이 같게 주어졌다면) 그 곱은, 방향과 관련하여, 단위와 인수가 속한 평면에 있어야 한다. 그리고 그 곱이 한 인수로부터 벗어난 정도는 다른 인수가 단위로부터 벗어난 정도와 같아야 한다(같은 방향으로). 따라서 곱의 방향각도 즉, 양의 단위로부터 벗어난 정도는 인수들의 방향각도의 합과 같다(Wessel[22], p.106).

이러한 곱셈은 현재의 복소수 곱셈에 대한 기하학적 해석과 동일하다. 실제로 Wessel은 x축 양의 방향 단위 $+1$과 x축에 수직인 방향의 단위 $+\varepsilon$을 도입하였다. -1과 $-\varepsilon$은 반대방향을 의미했다. 곱의 정의에 따라 이 단위들을 계산하면 다음과 같은 성질을 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&(+1)(+1) = +1, \quad (+1)(-1) = -1,\\
&(-1)(-1) = +1, \quad (+1)(+\varepsilon) = +\varepsilon,\\
&(+1)(-\varepsilon) = -\varepsilon, \quad (-1)(+\varepsilon) = -\varepsilon,
\end{aligned}
$$

$$(-1)(-\varepsilon) = +\varepsilon, \quad (+\varepsilon)(+\varepsilon) = -1,$$
$$(+\varepsilon)(-\varepsilon) = +1, \quad (-\varepsilon)(-\varepsilon) = -1$$

Wessel은 이러한 성질로부터 ε은 $\sqrt{-1}$이 되고, 이러한 곱의 변형이 일반적인 연산규칙을 위반하지는 않는다고 주장하였다.

언어 문제로 Wessel의 저작은 당시 수학자들에게 영향을 주지 못했기 (한 세기 후에야 번역되었다) 때문에, 기하학적 해석 발견의 공은 종종 Argand에게 넘어간다. Wessel과 다른 점은, Argand는 실제 량의 관점에서 복소수의 해석에 관심이 있었다는 점이다. 기하학적 해석을 통해 Argand은 복소수의 허수 부분을 실수 부분과 동등하게 보았고 이러한 이유로 그는 복소수를 때때로 실수의 순서쌍으로 표기했다. 실수의 순서쌍에서 실수와 허수는 서로 동등한 입장이 된다. 실수나 허수 모두 평면 위의 하나의 점이라는 측면에서 보면 두 수를 모두 합쳐서 복소수로 부르는 것이 전혀 이상하지 않게 된다. 더욱 중요한 점은 사칙연산 모두 기하학적 해석이 가능하다는 것이다.

3 결론 및 교육적 함의

복소수 개념 발달의 역사는 실수와 허수의 대립이 해소되어 실수와 허수를 복소수라는 하나의 수학적 대상으로 포괄할 수 있는 '상위관점' 을 찾아가는 과정이었다. 수학이 발달하면서 나타나는 새로운 문제 상황이 실수와 허수의 조화를 요구하였고, 그 결과 복소수의 개념이 점차 명확해졌다. 복소수 개념의 발달과정에서 등장한 새로운 관점은 다음과 같다. 첫째, 대수의 본질을 수보다 연산에서 찾는 '대수적 구조의 관점' 의 등장하였다. 둘째, 실수와 허수를 평면 위의 점으로 동등하게 표현하고 해석하는 '기하학적 관점' 이 등장하였다. 이러한 새로운 관점의 발달과 더불어 실수와 허수, 그리고 복소수라는 개념이 수학적으로 발달하였다. 허수는 실수와 다른 수로 출발하였지만, 수학적으로 실수를 보완하고 실수와 조화를 이루었다. 따라서 복소수를 이해하려면, 실수와 허수의 연산이 모두 동일한 대수법칙을 따르며, 복소수는 실수보다 대수적인 의미에서 완전한 수라는 점을 이해해야 한다. 또한 이렇게 대수적으로 완전한 복소수를 이차방정식에서 활용함으로써 이차방정식 풀이 과정의 본질도 파악할 수 있어야 한다. 복소수는 대수적 문제해결 절차의 일반화를 가능하게 한 이상적인 수이며, 결국 대수적 구조의 의미와 본질을 구현한 수임을 이해해야 한다.

지금까지의 논의로부터 복소수 지도를 위안 교육적 함의를 정리하면 다음과 같다. 교사는 복소수를 지도할 때, 실수와 허수의 차이는 물론이고, 실수와 허수의 조화를 어떻게 구현할 것인지 계획해야 한다. 이를 위해 실수와 허수의 차이에서 출발하여 조화를 추구하고, 실수의 대수적 결함을 보완하는 허수의 역할을 이해해야 한다. 그리고 서로 이질적인 대상을 조

화시키기 위해 대상의 성질보다는 대상들 사이의 관계에 주목해야 한다(Dieudonne, [7]). 대상들 사이의 관계는 이른바 '이상적 요소' 를 도입함으로써 구성할 수 있다. Hilbert[10]의 다음 주장에서 '이상적 요소' 도입의 의의를 확인할 수 있다.

> 수학자로서 우리는 종종 불확실한 상황에 빠지지만 독창적인 이상적 요소(ideal elements)들을 도입하여 그 상황에서 벗어났다. 가 대수의 법칙을 가장 간단한 형태로 보존하기위해 도입되었다. 초등평면기하에서 이상적 요소, 즉 무한직선과 무한원점을 사용하면, 두 직선이 항상 한 점에서 만난다는 정리가 성립한다. 이 때, 이상적으로 '무한의' 요소는 간결하고 명쾌한 성질을 가능하게 한다. 복소수 역시 이상적 요소이다. 복소수는 방정식의 차수와 근의 개수에 관한 정리 및 근과 계수와의 관계 등을 간결하게 만들어 준다(Hilbert, [10]).

이러한 관점에서 앞서의 역사-발생적 분석에서 드러난 복소수 개념의 본질은 이상적 요소의 측면을 가지고 있다. 따라서 이상적인 요소로서의 복소수 지도를 위해선 복소수가 이상적 요소로 활용되었음을 이해하고, 복소수를 이용하여 간결하게 만든 법칙, 원리, 성질을 이해해야 한다.

참고 문헌

1. Birkhoff & MacLane, *A survey of modern algebra(4th ed.)*, NY: Macmillan, 1977.
2. J, Bos, *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, NY: Springer-Verlag, 2001.
3. Bourbaki, *Elements of the history of mathematics*, 1984.
4. G, Cardano, Ars magna, 1545. *English translation: R. T. Witmer, Ars magna or the rules of algebra* (M.I.T. Press, Cambridge MA, 1968), Reprinted by Dover (New York, 1993).
5. T, Dantzig, *Number : The language of science(4th ed.)*, NY: The Free press, 1954.
6. R, Descartes, *The geometry of René Descartes : with a facsimile of the first edition*(translated by David E. Smith & Marcia L. Latham), NY: Dover Publications, 1954.
7. Dieudonne, *Mathematics-The Music of Reason*, Springer, 1926.
8. L, Euler, *On the controversy between Leibniz and Bernoulli concerning logarithms of negative and imaginary numbers*, 1749. (Translated by Stacy G. Langton) [`http://home.sandiego.edu/~langton/elog.pdf`]
9. E, Glas, "Fallibilism and the Use of History in Mathematics Education." *Science & Education*, Vol. 7, Issue 4(1998), pp. 361–379.
10. D, Hilbert, "Über das Unendliche" [On the infinite], *Mathematische Annalen 95*, (1926) (Lecture given Münster, 4 June 1925. English translation in van Heijenoort 1967, pp. 367–92)
11. I, Kleiner, "Thinking the unthinkable: the story of complex numbers"(with a moral), *Mathematics Teacher*, Vol. 81, Issue 7(1988), pp. 583–592.

12. F, Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic 、Algebra 、Analysis*, NY: Dover Publications, 1968.
13. D, Laugwitz, Bernhard Riemann, *1826–1866 : turning points in the conception of mathematics*, 1996. (translated by Abe Shenitzer)
14. S, Mac Lane, *Mathematics, form and function*, NY: Springer-Verlag, 1986
15. A, Macfarlane, *Ten British Mathematicians of the 19th Century*, 1916.
16. De Morgan, *Trigonometry and Double Algebra*, London: Taylor, Walton and Maberly, 1849.
17. De Morgan, *On the study and difficulties of mathematics*(2nd ed), Chicago: Open Court Publishing, 1898.
18. E, Nagel, "Impossible Numbers: A Chapter in the History of Modern Logic." *Studies in the History of Ideas*, 3,(1935), pp. 429–479.
19. J, Stillwell, *Numbers and geometry*, NY: Springer, 1998.
20. H. J. S, Smith, *The Collected mathematical papers of Henry John Stephen Smith*(Edited by J.W.L. Glaisher), The Clarendon Press, Oxford, 1894.
21. Tignol, J. (2001). *Galois' Theory of Algebraic Equations*, NJ: World Scientific.
22. C, Wessel, *On the Analytical Representation of Direction*(translated by Flemming Damhus(1999)). Copenhagen: Kort & Matrikelstryrelsen, 1797.

이동환 한국과학창의재단
Korea Foundation for the Advancement of Science and Creativity
E-mail: hwany7@hanmail.net