한국수학사학회지 *The Korean Journal for History of Mathematics*
제25권 제3호 (2012년 8월), 29–39

선형논리의 통사론

The syntax of Linear logic

정계섭 Kye-Seop Cheong

선형논리는 현대 증명이론의 산물로서 1987년 프랑스 Marseille대학 Jean-Yves Girard 교수가 프로그래밍 언어의 개발을 위해 직관주의 논리학(Intuitional logic)을 정교하게 보완하여 고안한 새로운 논리학이다. 그래서 선형논리의 연결사들은 정보배열(Sequentiality)과 병행처리(Parallel computation) 등 정보처리와 관련된 해석을 갖는다.

예컨대, A⊗B는 두 과정 A와 B를 차례차례 수행하는 것을 나타내고, A&B는 내적 미결정과 관련되어 관찰자가 A 또는 B를 선택할 수 있으며, A⊕B는 외적인 미결정으로서, 관찰자는 A 또는 B라는 사실을 알지만 어느 것이 될지는 알지 못한다. 그리고 A ℘B는 A과정과 B과정의 병행처리를 의미한다. 선형부정은 동시화(Synchronization)를 나타내어, 하나의 과정 A가 수행되기 위해서는 A와 $A^\perp$ 가 동시에 이루어져야 한다.

국내에 선형논리에 대한 연구가 활성화되지 않아서 이 글은 이에 대한 관심을 제고하기 위해 우선 선형논리의 통사론만을 취급했으며, 의미론과 증명망 등은 차후의 연구에서 다루고자 한다.

As a product of modern proof theory, linear logic is a new form of logic developed for the purpose of enhancing programming language by Professor Jean-Yves Girard of Marseille University (France) in 1987 by supplementing intuitionist logic in a sophisticated manner. Thus, linear logic' s connectives can be explained using information processing terms such as sequentiality and parallel computation.

For instance, A⊗B shows two processes, A and B, carried out one after another. A&B is linked to an internal indeterminate, allowing an observer to select either A or B. A⊕B is an external indeterminate, and as such, an observer knows that either A or B holds true, but does not know which process will be true. A ℘ B signifies parallel computation of process A and process B; linear negative exhibits synchronization, that is, in order for the process A to be carried out, both A and $A^\perp$ have to be accomplished simultaneously.

Since the field of linear logic is not very active in Korea at present, this paper deals only with syntax aspect of linear logic in order to arouse interest in the subject, leaving semantics and proof nets for future studies.

Keywords: 자원(Resources), 구조구칙(structural rules), 선형함축(linear : Implication), ⊗/ ℘ , & / ⊕, ! / ?, 선형부정(linear negation)

MSC: 03X-XX ZDM: E5
제출일: 2012년 7월 10일 수정일: 2012년 8월 10일 게재확정일: 2012년 8월 18일

1 들어가면서

고전논리는 상태(state), 즉 안정적 사실에 기초한다. 하나의 상태는 참이든 거짓이든 그 진리치를 우리가 원하는 만큼 무한정 사용할 수 있다. 예컨대 '$0 \neq 1$'은 영속적으로 변하지 않아서 언제든 필요 시 쓸 수 있는 것이다. 그러니까 현재 진리로 여겨지는 공리나 정리 그리고 이론은 공짜인 셈이다.

이러한 정적인 논리에 사건(event)의 논리가 대립되는데, 현실 세계에서는 모든 것이 비용이 들고, 시간이나 공간 등 자원의 한계에 의해 제약을 받기 때문이다. 그래서 인과적 함축(Causal implication)의 필요성이 제기된다. 여기에는 자원과 소비 내지 지불과 교환의 개념이 결부되어 있다. 바로 이 '지불'한다는 사실이 고전논리를 동적인 행동의 논리로 만드는데, 한번 지불한 것은 재사용이 가능하지 않기 때문이다.

보다 구체적으로 알아보자면, 고전논리에서는 다음이 성립한다.

$$\frac{A, A \to B}{B}$$

그리고 A는 여전히 성립한다.

$$\mathrm{A},\ \mathrm{A} \to \mathrm{B} \vdash \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$$

그러나 선형 논리에서는 A는 더이상 성립하지 않는다.

$$\frac{A, A \multimap B}{B}$$

이제 A를 천원, B를 한 갑에 천원하는 진달래라고 하면,

$$\text{천원},\ \text{천원} \to \text{진달래} \vdash \text{진달래}$$

그러나 다음은 성립하지 않는다.

$$\text{천원},\ \text{천원} \to \text{진달래} \nvdash \text{천원} \wedge \text{진달래}$$

선형함축 '$\multimap$'은 이렇게 자원의 관점에서 전제를 단 한번만 사용할 수 있기 때문에, 고전논리의 함축은 새롭게 정의되지 않으면 안 된다.

선형논리는 겐첸(Gentzen)의 순차식 계산[1)]을 정교화한 것이다. 순차식이란 아래와 같은 통사적 형태로서 Γ 와 Δ 는 각각 적형식(formulas) 들의 집합이다. 고전논리와 선형논리의 차이는 다음 기본적인 순차식에서 확연히 드러난다.

1) 필자의 논문, 「순차식 연산과 절단제거(Sequent calculus and cut elimination)」를 참고할 것. (한국수학사학회지 제 23권 제 3호, 2010년 8월, pp. 45–56)

$$\Gamma \vdash \Delta$$

고전논리 : “Γ 의 참으로부터 Δ 의 참이 연역된다.”

이를 풀어 쓰면,

$$A_1, \cdots, A_n \vdash B_1, \cdots, B_p$$

턴스타일 $\vdash$ 왼편의 컴마는 연접(conjunction)을, 오른편은 이접(disjunction)을 의미해서, 이 식을 다시 풀어쓰면 다음을 의미한다.

$$(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to (B_1 \vee \cdots \vee B_p)$$

선형논리 : “당신이 Γ 라는 재화를 나에게 주면, 나는 Δ 에 있는 물품 중 하나를 주겠다.”[2] 이렇게 되면 고전적 순차식 계산(Sequent calculus)에서 구조규칙(Structural rules)은 더 이상 유효하지 않으며, 고전논리의 연접(Conjunction)은 곱연접(Multiplicative conjunction)과 덧연접(Additive conjunction)으로 분할되고, 이접(disjunction)은 곱이접(Multiplicative disjunction)과 덧이접(Additive disjunction)으로 나뉘어진다. 이제부터 선형논리의 연결사에 대해 찬찬히 알아보도록 하겠다.

2 구조규칙의 붕괴

선형논리에서 구조규칙 중 유일하게 남아있는 것은 교환규칙이다.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, B, A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash B, A, \Delta}$$

비교환 선형논리의 출현은 가능한가? 이 문제는 차후의 과제로 남겨두도록 하겠다.

2.1 축약 (Contraction)[3]

다음은 고전논리의 순차식 계산에서 성립되는 축약룰이다.

2) 나중에 선형연결사가 소개되면 밝혀지겠지만, 이 식은 아래와 동치이다.

$$A_1, \cdots, A_n \vdash B_1, \cdots, B_n \equiv A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \vdash B_1 \mathscr{P} \cdots \mathscr{P} B_1$$

3) 축약은 A $\to$ A $\wedge$ A 를 증명하기 위해 필요하다.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{공리}}{A,\ A \vdash A}\text{약화} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{공리}}{A,\ A \vdash A}\text{약화}}{A,\ A \vdash A \wedge A}\wedge\text{-R}}{A \vdash A \wedge A}\text{축약-L}}{\vdash A \to A \wedge A}\to \text{R}$$

$$\frac{\Gamma, A, A, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\textbf{C-L})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, A, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A, \Delta'}\ (\textbf{C-R})$$

고전논리에서는 A가 가정에 들어있는지의 여부에는 신경을 쓰지만, A가 몇 번 출현하는지에 대해서는 관심이 없다. 즉 A를 n번 쓰면서 Δ를 도출했다면, A는 한 번만 써도 된다는 것이다. 이런 논리는 자원의 관점에서는 선형논리에서는 더 이상 성립하지 않는다.

2.2 약화 (Weakening)[4)]

고전논리에서 어떤 가정은 쓰이지 않을 수도 있다.

$$\frac{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma, A, \Gamma' \vdash \Delta}\ (\textbf{W-L})\ \frac{\Gamma \vdash \Delta, \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta, A, \Delta'}\ (\textbf{W-R})$$

W-L : 만일 Γ 가 Δ를 연역한다면 $\Gamma \wedge$ A도 동일한 결론 Δ 를 연역할 수 있다. 즉, 어떤 가정은 쓰이지 않을 수도 있다.

W-R : $\Gamma \vdash \Delta$ 로부터 Γ가 $\Delta \wedge$ A를 연역한다는 것을 의미하지 않는다. 그런 일이 가능하다면, 무엇이든 연역될 수 있을 것이다. 여기서는 $\Delta \vee$ A 를 의미한다. 결과적으로 결론이 약화되는 것이다. 교환의 관점에서, 구매자는 동일한 물품을 구입하는데 불필요하게 돈을 낭비하려 들지는 않을 것이므로 W-L은 성립하지 않는다. 그리고 상인의 입장에서는 공짜로 선물할 리가 없으므로 W-R은 더 이상 성립하지 않는다.

나중에 지수연산자 (!, ?) 의 도입으로 축약과 약화규칙이 부활되지만 그때는 구조규칙이 아니라 논리규칙으로 작용하게 될 것이다.

3 선형함축 ($\multimap$)

고전논리에서 이른바 실질함축 (material implication)[5)]은 "네가 대통령이라면, 나는 교황이다." 와 같은 '역설' 을 야기한다.

선형함축은 함축에 대한 우리의 자연스러운 직관에 맞아서 루이스 (Lewis) 의 엄밀함축에 해당하 면서도 자원에 대한 관점을 추가하는 이점이 있다.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \multimap B, \Delta}\ \multimap \mathrm{R} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma', B \vdash \Delta'}{\Gamma, \Gamma', A \multimap B \vdash \Delta, \Delta'}\ \multimap \mathrm{L}$$

---

4) 약화는 A $\wedge$ A $\rightarrow$ A를 증명하기 위해 필요하다.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\ \text{공리}}{A,\ A \vdash A}\ \text{약화}}{A \wedge A \vdash A}\ \wedge\text{-L}}{\vdash A \wedge A \rightarrow A}\ \rightarrow \mathrm{R}$$

5) 'material' 이라는 용어 대신에 'classical' 이라는 용어가 보다 적절할 것이다.

$\multimap$ R 규칙은 순차식 계산과 다른 점이 없다. 다만 A를 단 한 번만 사용하며 B를 얻고, Δ에 있는 다른 것들은 무시한다. $\multimap$ L 규칙은 조금 복잡해서 이해를 돕기 위해 풀어쓰도록 하자. 나는 Γ 라는 유언에 의해 현금 A와 부동산 Δ 를 상속받았다. 운수대통 Γ' 덕분에 나는 A를 투자해서 B를 실현시킨다. 그러면 나는 꿈에 그리던 Δ' 을 얻게 된다. 결국 $\Delta \otimes \Delta'$ 을 얻게 되는 셈이다.

4 연접과 이접

4.1 덧연접 &(With)과 곱연접 $\otimes$(Times)

선형논리에서는 두 개의 연접이 공존하는데, ‘and’ 라는 단어의 서로 다른 용법에 해당한다.

덧연접 A & B는 “나는 A와 B 중 하나를 가질 수는 있지만 둘 다 가질 수는 없다.”를 의미한다. 앞의 담배의 예를 계속해서, A를 1000원, B, C가 각각 1000원씩 하는 진달래와 도라지 담배라고 할 때, A $\multimap$ B & C가 된다. 이를 순차식 형태로 나타내면 아래와 같다.

$$\frac{A \vdash B \quad A \vdash C}{A \vdash B\&C}$$

그러니까 &은 중첩(Superposition)[6)]의 의미를 갖는데, 이는 컴퓨터 명령어 “If... then... else... ” 와 정확히 일치한다. &을 이접으로 보는 경향이 있는 바, 이는 잘못된 견해이다. 다음과 같이 연접의 전형적인 사실이 성립하기 때문이다.

$$\text{B \& C} \multimap \text{B}$$
$$\text{B \& C} \multimap \text{C}$$

그러나 B $\multimap$ (B & C)는 성립하지 않는다.

곱연접 A $\otimes$ B 는 고전논리의 A $\wedge$ B와 크게 다르지 않다. 그러나 선형논리에서 는 $\otimes$ 멱등법칙(idempotent law)[7)]을 거부한다. 따라서 다음은 성립하지 않는다.

$$\text{A} \otimes \text{A} \multimap \text{A}$$
$$\text{A} \multimap \text{A} \otimes \text{A}$$

만일 내가 2000원을 가지고 있고, 진달래와 도라지를 한 갑씩 산다고 가정할 경우, 이를 순차식으로 나타내면,

6) 하나의 양자상태(Quantum state)는 어떤 입자가 위치나 에너지에 관련하여 모든 가능한 상태들을 수학적으로 기술할 수 있는데, 이를 중첩원리라고 한다. 위 담배의 예에서 두 가지 가능성이 공존하는데 만약 진달래(또는 도라지)를 사면 중첩이 사라진다. 이 또한 양자역학의 측정의 문제에서 말하는 파동함수의 ‘붕괴’ 에 해당한다고 볼 수 있겠다.

7) 기호논리에서는 P $\vee$ P = P, P $\wedge$ P = P, 집합론에서는 A $\cup$ A = A, A $\cap$ A = A 와 같은 법칙을 말한다.

$$\dfrac{\dfrac{A \vdash B \quad A \vdash C}{A, A \vdash B \otimes C}}{A \otimes A \vdash B \otimes C}$$

이상에서 설명한 이유로 다음 규칙이 성립한다.

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \otimes B} \otimes\text{R} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \& B} \&\text{R}$$

$\otimes$은 축적적 문맥 Γ, Δ를 요구하는데, 이는 독립적 사실들의 연접이다. 반면에 &는 대안적 문맥 Γ만을 요구한다. 마찬가지 이유에서 아래 규칙이 성립한다.

$$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \otimes B \vdash C} \otimes\text{L} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash C}{\Gamma, A \& B \vdash C} \&\text{L}$$

&L은 앞에서도 보았듯이, Γ와 A로부터 C를 증명할 수 있다면, 당연히 Γ와 A&B로부터도 C를 증명할 수 있다.

4.2 덧이접 $\oplus$(plus)과 곱이접 $\wp$(par)

'A⊕B' 는 고전적 이접으로서 'A이거나 B' 를 의미하며, 여기에서 관찰자는 선택권이 없다. 만일 Γ와 A로부터, 또는 Γ와 B로부터 Δ를 증명할 수 있다면, Γ와 A, B 중 임의의 선택에 의해 당연히 Δ를 증명할 수 있다. 왜냐하면 둘 다 동일한 결론으로 이끌기 때문이다.

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \oplus B \vdash \Delta} \oplus\text{L} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \oplus B} \oplus\text{R}$$

$\oplus$R이 의미하는 바는, 만일 Γ가 A를 증명하면, Γ는 'A 또는 B' 를 증명한다. 고전적 이접처럼 A가 될지 B가 될지 모르는 상황이므로 이 규칙은 말하자면 정보를 감춘다고 볼 수도 있겠다.

직관주의 논리에서처럼 선형논리에서도 배중률은 성립하지 않는데, A $\oplus$ $\mathrm{A}^{\perp}$ 를 증명하기 위해서는 A를 증명하든가 $\mathrm{A}^{\perp}$ 을 증명할 수 있어야 하는데 이는 불가능하다.

'A $\wp$ B' 는 병존하지만 독립적이 아닌 두 사건을 나타낸다. 이를 잘 예시하는 것이 바로 동일성의 원리이다.

$$\vdash \mathrm{A},\ \mathrm{A}^{\perp} \equiv \mathrm{A} \wp \mathrm{A}^{\perp}$$

A $\wp$ $\mathrm{A}^{\perp}$ 가 의미하는 바는, A의 긍정은 필연적으로 $\mathrm{A}^{\perp}$ 를 희생시킨다는 것이다. $\wp$는 선형연결사들 중에서 가장 다루기 어려운 연결사이다. Girard는 여러 번 U자관 (U-tube)[8)]에 대해서 언급하고 있는 바, 단순한 축적이 아닌 두 현상이 상호 의존적으로 동시에 발생하는 사태에 비유한 것이다.

---

8) U자형으로 굽힌 유리관에 수은, 알코올, 물과 같은 액체를 넣고 양쪽 높이의 차를 비교하기 위해 고안된 관. 각각의 압력을 P_1, P_2 라 하고 높이의 차를 h라 할 때, P_1–P_2 = γh (γ는 액체의 비중).

$$\frac{\Gamma_1, A \vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \wp B \vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \wp\mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wp B, \Delta}\ \wp\mathrm{R}$$

그래서 "A를 투자해서 B를 생산한다."는 선행함축 'A⊸B' 는 인과적 함축으로서 다음과 같이 정의될 수 있다. 즉, A를 소비해서 B를 얻는다.

$$\mathrm{A} \multimap \mathrm{B} \equiv \mathrm{A}^{\perp}\ \mathrm{P}\ \mathrm{B}$$

5 지수연산자 !(of course)와 ?(why not)

!A는 A를 얼마든지 (ad libitum) 공급하는 것을 의미하고 그 쌍대인 ?A는 A를 마음대로 소비하는 것을 의미한다. 선형논리는 구조규칙을 포기하는 대신, 이런 새로운 연산자를 도입하여 축약과 약화규칙을 부활시킨다.

!는 순차식의 왼편에서 구조규칙을 허용한다.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ \mathrm{WL} \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash \Delta}{\Gamma, !A \vdash \Delta}\ \mathrm{CL}$$

?는 순차식의 오른편에서 약화나 축약규칙을 도입한다.

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ \mathrm{WR} \qquad \frac{\Gamma \vdash ?A, ?A, \Delta}{\Gamma \vdash ?A, \Delta}\ \mathrm{CR}$$

WR의 ?A는 왼쪽으로 옮기면 $!A^{\perp}$ 가 되어서 이는 WL 규칙의 변이형이고, CR의 ?A도 왼편으로 옮기면 CL규칙의 변이형임을 알 수 있다.

이외에 아래 두 규칙이 추가된다.

$$\frac{\vdash ?\Gamma, A}{\vdash ?\Gamma, !A}\ \text{판매촉진 (promotion)} \qquad \frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, ?A}\ \text{피투성 (dereliction)}$$ [9]

이 식들은 각각 아래 식들과 동치이다.

$$\frac{!\Gamma^{\perp} \vdash A}{!\Gamma^{\perp} \vdash !A} \qquad \frac{A^{\perp} \vdash \Gamma}{!A^{\perp} \vdash \Gamma}$$

이렇게 해서 고전논리의 함축은 전제를 원하는 대로 사용할 수 있기 때문에 선형논리의 두 가지 연산 ! 와 ⊸ 에 의해 새롭게 정의된다.

$$\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \equiv !\mathrm{A} \multimap \mathrm{B}$$

참고로, 아래와 같은 적형식들은 모두 증명 가능하다.

$$!\ \mathrm{A} \multimap \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$$

$$!\ \mathrm{A} \multimap (!\mathrm{A} \otimes !\mathrm{A})$$

$$!\ \mathrm{A} \multimap !(\mathrm{A} \otimes \mathrm{A})$$

9) 선형논리 창시자 Girard는 promotion을 A를 여러 장 복사하는 것에, dereliction을 A를 한 장 복사하는 것으로 비유를 들었는데, 우리가 보기에 dereliction이라는 용어는 적절해 보이지 않는다.

6 선형부정 (⊥)

선형부정 ⊥은 참이나 거짓을 취급하는 것이 아니라, 작용 A에 대한 반작용 $A^{\perp}$를 나타낸다. 선형부정은 ⊢ (turnstile)을 넘나들게 해준다.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, A^{\perp} \vdash \Delta} \perp \mathrm{L} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A^{\perp}, \Delta} \perp \mathrm{R}$$

⊢ A, Δ는 가정과 무관하게 A나 Δ중 하나는 참이라는 사실을 의미하는데, A가 왼쪽으로 넘어가 $A^{\perp}$이 가정이 되면 자연스럽게 Δ가 참이 된다.

$A^{\perp}$와 A의 관계는 질문과 대답, 입력과 출력, 생산자와 소비자의 관계에 비유할 수 있다. 그래서 고전논리의 부정연산자 ¬A 가 A의 항구적인 부재를 의미하는 데 반하여, $A^{\perp}$(nil A)는 단 한 번의 부재를 의미한다. ⊥R을 동일성 공리 A ⊢ A에 적용하면, ⊢ $A^{\perp}$, A이 되는데, 진공으로부터 물질과 반물질이 생성되고 또 소멸되는 쌍생성과 쌍소멸을 한 눈에 볼 수 있지 않은가![10)]

고전논리에서처럼 선형논리는 이중부정 (involution)을 수용한다.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\text{공리}}{\vdash A,\ A^{\perp}} \perp R}{A^{\perp\perp} \vdash A} \perp L}{\vdash A^{\perp\perp} \multimap A} \multimap R$$

그리고 De Morgan의 법칙도 성립한다.

$(A \otimes B)^{\perp} = A^{\perp}$ P B⊥ $\qquad (A \wp B)^{\perp} = A^{\perp} \otimes B^{\perp}$

$(A \& B)^{\perp} = A^{\perp} \oplus B^{\perp} \qquad (A \oplus B)^{\perp} = A^{\perp} \& B^{\perp}$

$(!A)^{\perp} = ?A^{\perp} \qquad (?A)^{\perp} = !A^{\perp}$

여기에서 ⊗/ ℘, &/ ⊕, !/? 의 쌍대성 (duality)을 재확인할 수 있다.

7 구체적 사례

이제까지 살펴 본 선형논리 연결사를 사용하여 구체적 상황에 적용해 볼 차례이다. 어떤 고객이 일식집에서 3만원짜리 회정식을 주문한다고 가정하자. 제일 처음에 당일 형편에 따라 해삼 또는 멍게가 나오는데 이는 고객이 선택할 사항이 아니다. 디저트는 수정과나 아이스크림으로서 고객이 선택할 수 있으며, 쌈은 요청한대로 제공되고 물도 물론 마찬가

10) 여기에서 컷 룰은 즉각적이다. 우리가 비유로 든 쌍소멸에 해당한다.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma' \vdash A, \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{cut}$$

지이다.

가격 : 3만원

첫 코스: 해삼 또는 멍게 (당일 물량에 따라)

주요리 : 생선회 + 쌈 (마음대로)

디저트 : 수정과 또는 아이스크림

음료 : 물 (마음대로)

선형논리 연결사를 활용하면 다음과 같이 일목요연한 식이 배출된다.

3만원 $\multimap$ (해삼 $\oplus$ 멍게) $\otimes$ 생선회 ! 쌈$\otimes$

(수정과&아이스크림)$\otimes$! 물

$\oplus$ 와 & 에서 우리는 선형논리의 주관성을 엿볼 수 있는 바, $\oplus$ 는 고객의 입장에서는 수동적이지만 식당측으로는 능동적이고, 역으로 &는 고객의 입장에서는 능동적이지만 식당측으로는 수동적이기 때문이다.

다음은 간단한 증명의 사례이다. 이제까지 소개한 선형 연결사들을 이용하면 어려움 없이 파생식들을 따라갈 수 있을 것이다.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp},\ A$}
\RightLabel{$(\oplus B)$}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp},\ (A \oplus B)$}
\RightLabel{$(?)$}
\UnaryInfC{$\vdash A^{\perp},\ ?(A \oplus B)$}
\RightLabel{$(!)$}
\UnaryInfC{$\vdash !(A^{\perp}),\ ?(A \oplus B)$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\vdash B^{\perp},\ B$}
\RightLabel{$(A\oplus)$}
\UnaryInfC{$\vdash B^{\perp},\ (A \oplus B)$}
\RightLabel{$(?)$}
\UnaryInfC{$\vdash B^{\perp},\ ?(A \oplus B)$}
\RightLabel{$(!)$}
\UnaryInfC{$\vdash !(B^{\perp}),\ ?(A \oplus B)$}
\RightLabel{$(\otimes)$}
\BinaryInfC{$\vdash (!(A^{\perp})\otimes !(B^{\perp})),\ ?(A \oplus B),\ ?(A \oplus B)$}
\RightLabel{(C)}
\UnaryInfC{$\vdash (!(A^{\perp})\otimes !(B^{\perp})),\ ?(A \oplus B)$}
\RightLabel{$(\wp)$}
\UnaryInfC{$\vdash ((?A \wp ?B) \multimap ?(A \oplus B)$}
\end{prooftree}
$$

세 개의 공리와 하나의 규칙 (modus ponens) 이 있는 힐버트 연역체계[11])와는 달리 겐첸의 순차식 계산에서는 오직 하나의 공리 A $\vdash$ A 로부터 모든 결론을 유도할 수 있다. 주지하는 바와 같이, 이 공리는 연역의 재귀성 (reflexivity of deduction) 이라고 불리운다.

8 나오면서

정보 · 통신은 그 특성상 모든 분야에 깊숙이 개입되어 있기 때문에 보편적인 성격을 띄고 있어서 사람들은 이 분야가 경제와 사회에 미치는 영향을 잘 알고 있다. 컴퓨터, 오디오,

11) 필자의 논문, 「연구프로그램으로서의 힐버트 계획」을 참고할 것, (한국수학사학회지 제 24권 제 3호, 2011 년 8월, pp. 37–58).

비디오 등 전자 제품이 날로 경량화되고 가격의 저렴화 등을 피부로 느낄 수 있다. 병원에서도 하이테크가 원거리 치료에서 한 몫을 하고 있으며, 나아가서 원격조정 비행 내지 무인 비행에 이르기까지 항공 산업에서도 혁명적인 변화를 가져오고 있다.

그런데 그러한 혁신기술을 가능하게 해주는 학문적 토대에 대해서 우리나라는 외국과 비교해서 상대적으로 매우 취약한 실정이다. 한국이 IT강국이라고는 하지만, 그것은 하드웨어차원에서 하는 말이다. 정보 통신 분야는 21세기의 화두로 등장할 만큼 국가 경쟁력을 좌우하는 결정적 요인이기 때문에, 기술혁명을 가능하게 해주는 기초분야의 중요성에 대한 사회적 인식의 제고가 시급하다.

자연스런 또는 실용적인 추론의 관점에서, 선형논리는 벨납(Belnap)과 앤더슨(Anderson)의 이른바 적합성논리(relevance logic)[12)]와 맥을 같이 한다고 볼 수 있는데 여기에서도 약화규칙이 성립되지 않는다. 그러나 고전논리를 새로운 체계의 특수한 경우로 이끌어주는 "!"와 같은 연산자가 없고 또한 두 가지 이접과 두 가지 연접 같은 구분도 없어서 선형논리의 인지적 해석과 응용성에 미치지 못한다.

현재 프로그래밍언어의 개발에 가장 적합한 논리학으로 평가받고 있는 선형논리학에서, 가정은 주어지는 자원으로서 그리고 결론은 그 자원을 소비함으로써 도달하는 결과를 의미한다, 그러니까 선형성(linearity)이란 자원이 제공되고 소비되는 과정이 인과관계로 표현됨을 의미한다. 한 번 지불한 것은 재사용이 가능하지 않다. '지불' 된다는 사실이 선형논리를 동태적(dynamic) 논리학으로 만든다.

수학자나 철학자들이 고전논리에 만족하는 반면, 이론전산학자나 언어학자들이 선형논리에 주목하는 것은 바로 이런 동태적 특성 때문이다.

이렇게 되면 고전논리 전 체계를 새로운 관점에서 보아야 하고 재구성해야 한다. 이것이 우리가 여기에서 선형논리의 연결사들을 통해 살펴본 작업이다. 앞으로 선형논리를 자연언어 분석에 응용하고, 나아가서 프로그래밍 언어와 관련된 병행처리 문제, 데이터베이스 관리, 가장자리 효과(edge effect), 기억할당 등의 문제에 접목시킬 것을 염두에 두고 있다. 선형논리의 양화(quantification) 문제는 고전논리와 다를 바 없기 때문에 여기에서는 다루지 않았음을 밝혀둔다.

참고 문헌

1. Coquand, T. and Huet, G. (1988), "The calculus of constructions", Information and Computation 76, pp. 95–120.
2. Di cosmo, Roberto, and Damos, Vincent, The Linear logic primer. (`http://www.dicosmo.org/CourseNotes/LinLog/`)

12) Anderson and Belnap, Entailment : The Logic of Relevance and Necessity, volume 1(1975), volume 2(1992), Princeton University Press.

3. Danos, V. and Regnier, L. (1989), "The structure of multiplicatives", Archive for Mathematical Logic 28, pp. 181–203.
4. Girard, J. Y. (1987), "Linear logic", Theoretical Computer Science 50, pp. 1–102.
5. Girard, J. Y., Lafont, Y and Taylor, P. (1989), Proofs and Types, Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press.
6. Girard, J. Y. (1993), "On the unity of logic", Annals of Pure and Applied Logic 59, pp. 201–217.
7. Girard, J. Y. (2001), Locus Solum, Mathematical Structures in Computer Science 11, pp. 301–506.
8. Lambek, J. (1958), "The mathematics of sentence structures", American Mathematical Monthly 65, pp. 154–169.
9. Laurent, O. (2003), "Étude de la polarisation en logique", Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille II, March.
10. Scedrow A., A brief guide to linear logic, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science, v. 41, pp. 154–165.
11. Troelstra, A. S. (1992), Lectures on Linear Logic, CSLI(Center for the Study of Language and Information) Lecture Notes No. 29, Stanford.
12. Wadler P., A taste of linear logic, MFPS, Springer Verlag LNCS 711, Gdansk, Aug 1993.

정계섭 덕성여자대학교
Duksung University
E-mail: kseopcheong@hanmail.net