

Parrondo Paradox and Stock Investment

Dongseob Cho¹ · Jiyeon Lee²

¹Department of Statistics, Yeungnam University; ²Department of Statistics, Yeungnam University

(Received February 21, 2012; Revised June 7, 2012; Accepted June 30, 2012)

Abstract

Parrondo paradox is a counter-intuitive phenomenon where two losing games can be combined to win or two winning games can be combined to lose. When we trade stocks with a history-dependent Parrondo game rule (where we buy and sell stocks based on recent investment outcomes) we found Parrondo paradox in stock trading. Using stock data of the KRX from 2008 to 2010, we analyzed the Parrondo paradoxical cases in the Korean stock market.

Keywords: Parrondo paradox, Parrondo effect, reverse Parrondo effect, history-dependent Parrondo games, Markov chains, stationary distribution, stock data.

1. 서론

파론도 역설(Parrondo paradox)은 1996년 스페인의 물리학자 파론도(Juan M. R. Parrondo)가 브라운 톱니바퀴(Brownian ratchet)의 특성을 쉽게 설명하기 위해 소개한 동전 던지기 게임에서 유래하였다. 이 동전 던지기 게임은 두 개의 게임 A 와 B 로 구성되며, 게임 A 는 앞면이 나올 확률이 $1/2 - \epsilon$ 인 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B 는 게임자가 현재 가지고 있는 누적 상금이 3의 배수이면 앞면이 나올 확률이 $1/10 - \epsilon$ 인 나쁜 동전을 던지고, 3의 배수가 아니면 앞면이 나올 확률이 $3/4 - \epsilon$ 인 좋은 동전을 던져서, 게임 A 와 마찬가지로 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 그러면 게임 A 는 $0 < \epsilon < 1/2$ 에 대해 항상 지는(losing) 게임이 되고, 게임 B 는 $0 < \epsilon < 1/10$ 에 대해 항상 지는 게임이 된다. 즉, 게임 A 와 게임 B 는 동일한 게임을 계속해서 시행하면, 한 시행에서 얻어지는 점근적인(asymptotic) 기대상금이 음수가 되어 시행을 계속할수록 누적되는 기대상금이 점점 $-\infty$ 에 가까워지는 지는 게임이 된다. 반면에 매 시행에서 두 게임 A 와 B 중 하나를 임의로 선택하여 진행하거나 또는 일정한 규칙에 의해 주기적으로 두 게임을 반복해서 시행하면 시행당 점근적 기대상금이 양수가 되는 작은 $\epsilon > 0$ 이 존재하여 결국 이기는(winning) 게임이 되는 역설적인 결과를 얻게 된다. 이런 역설적인 현상을 파론도 효과(Parrondo effect)라고 하고, 이와 반대로, 음수인 $\epsilon < 0$ 을 고려하면 각각 이기는 두 게임을 결합하여 지는 게임이 되는 역 파론도 효과(reverse Parrondo effect)를 얻을 수 있다. 이 게임에서 유래하여 두 시스템이 결합하여 원래의

This work was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2011-0005982).

²Corresponding author: Professor, Department of Statistics, Yeungnam University, 214-1 Dae-Dong, Kyeongsan 712-749, Korea. E-mail: leejy@yu.ac.kr

특성과 다른 특성을 갖는 새로운 시스템이 되는 역설적인 현상을 파론도 역설이라고 한다 (Harmer과 Abbott, 2002; Abbott, 2010).

파론도 역설은 초기에는 주로 물리학자들에 의해 연구가 진행되었으나 최근에는 프랙탈과 카오스 등의 통계물리학 뿐 아니라 화학 (Osipovitch 등, 2009), 재무학 (Boman 등, 2001; Spurgin과 Tamarkin, 2005), 인구 유전학 (Reed, 2007), 신뢰성 이론 (Di Crescenzo, 2007), 인식론 (Stjernberg, 2007) 등의 다양한 분야에서 연구되며 그 적용사례가 점차 늘어나고 있다. 신경망 분야에서 잡음이 혼련 데이터에 포함되면 네트워크 일반화에서 더 잘 작동하는 것 (Bishop, 1996)을 파론도 역설로 설명할 수 있으며, 생물학에서도 겸상적혈구성 빈혈(sickle cell anemia)이 해로운 것이지만 말라리아 감염을 막아주는 것과 같은 파론도 효과를 찾아볼 수 있다. 수학 분야에서도 Pinsky와 Scheutzow (1992)는 두 개의 일시적인 확산 과정(diffusion process)을 교환하여 양의 재귀적인 확률과정을 구성하는 것을 증명하였고, Key (1987)는 하락하는 분지과정(branching process)이 역설적으로 증가하도록 결합할 수 있음을 보였다. Ethier와 Lee (2010)은 카지노 게임에서 두 개의 이기는 (특수한) 슬롯머신을 임의적으로 선택하거나 규칙적으로 반복했을 때 오히려 돈을 잃게 되는 역 파론도 효과가 존재함을 보이고 그 조건을 찾기도 하였다.

본 논문에서는 이러한 파론도 효과와 역 파론도 효과가 주식 투자에도 나타남을 확인하고자 한다. 그러기 위해서는 몇가지 추가 작업이 필요하다. 위에서 소개한 게임 B 는 현재의 누적 상금에 의해 사용되는 동전이 결정되어 이를 상금의존(capital-dependent) 파론도 게임이라고 한다. 상금의존 파론도 게임은 매 시행에서의 상금이 +1원과 -1원이지만 주가는 연속적인 값을 가지기 때문에 적용에 한계가 있다. 따라서 본 연구에서는 기존의 상금의존 파론도 게임 대신에 Parrondo 등 (2000)이 소개한 과거의존(history-dependent) 파론도 게임을 적용하고자 한다. 과거의존 파론도 게임도 두 개의 게임으로 구성되며, 게임 A 는 상금의존 파론도 게임의 게임 A 와 동일하다. 게임 B 는 사용되는 동전이 현재의 누적 상금에 의해 결정되는 것이 아니라 바로 직전의 두 번의 시행 결과에 의해 결정된다. 즉, 직전의 두 번의 시행 결과인 패-패, 패-승, 승-패, 승-승의 4 종류에 따라 사용될 동전이 달라진다. 그러므로 주가와 같은 일반적인 상금 변동에도 적용이 가능하다. 또한 연속적인 시간 상의 주가의 변동을 매일 증가 기준으로 매매함으로써 이산적인 시간 상의 주가의 변동으로 나타내어 기존의 마코프 체인(Markov chain) 모형을 사용할 수 있게 한다. 전날의 증가와 비교하여 주가가 상승하면 승으로, 주가가 하락하면 패로 간주한다.

기존의 동전 던지기 게임을 주식 투자 모형으로 변형하여, 게임 A 를 포트폴리오(portfolio) A 로, 게임 B 를 포트폴리오 B 로 나타낸다. 포트폴리오 A 를 구성하는 주식이 1개 있고, 포트폴리오 B 를 구성하는 주식이 4개 있다. 포트폴리오 B 는 과거의존 파론도 게임에 의해 매일 4개의 주식 중 어느 것을 매수할 것인지가 전날과 전전날의 투자 결과에 의해 결정된다. 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 는 각각 수익을 남기지만 두 포트폴리오를 1/2의 확률로 혼합하면 손실을 보는 역 파론도 현상이 나타날 수 있는지 알아본다. 또한 각각은 손실을 보지만 두 포트폴리오의 혼합으로 수익을 얻게 되는 파론도 효과가 가능한지도 파악한다. 일반적으로 주식을 사거나 팔 때는 거래 비용이 발생한다. 그러므로 파론도 역설에 있어서 각각의 포트폴리오가 손실을 갖지만 두 포트폴리오의 혼합으로 이익을 갖는 경우가 있더라도 실제로 거래 비용을 고려하면 효율적인 투자 방법이 되지 못할 수도 있다. 그러나 역 파론도 효과의 경우는 각각의 포트폴리오는 수익을 얻지만 두 포트폴리오를 혼합하면 손실을 보기 때문에, 만약 거래 비용까지 고려한다면 손실은 더욱 증가할 것이다. 파론도 역설을 주식 데이터에 적용할 때 파론도 효과보다는 역 파론도 효과에 더욱 중점을 두는 것은 이 때문이다.

Spurgin과 Tamarkin (2005)는 Parrondo 등 (2000)이 소개한 과거의존 파론도 게임의 기존의 확률 모수 그대로 주가가 +1원 또는 -1원으로만 움직일 때 역 파론도 효과가 나타날 수 있음을 보였다. 그러

나 이는 단순한 모형의 소개이고 직접 주가 데이터를 적용하여 확인하지는 못했다. 거래비용을 고려하지 않는 상황에서, 포트폴리오 A 는 매일 같은 주식을 사고 팔기 때문에 실질적으로는 그 주식을 계속 보유하는 것과 같다. 그래서 그들은 역 파론도 효과의 존재를 통하여 빈번한 투자 종목의 교환이 좋은 전략이 되지 못하고 오히려 “구매-보유(Buy-and-Hold)” 전략이 더 우수할 수 있음을 보이고자 하였다.

2장에서는 과거의존 파론도 게임에 대한 자세한 설명과 파론도 효과와 역 파론도 효과가 존재하기 위한 확률 모수의 범위를 결정하고, 3장에서는 2008년부터 2010년까지의 주식 데이터에 적용하여 파론도 효과와 역 파론도 효과가 어떻게 존재하는지 알아본다.

2. 파론도 게임

2.1. 과거의존 파론도 게임

Parrondo 등 (2000)은 직전의 시행 결과에 의해 다음 시행의 승패 확률이 정해지는 과거의존 파론도 게임을 소개하였다. 그들이 소개한 과거의존 파론도 게임은 두 개의 게임 A 와 B 로 구성되며, 게임 A 는 앞면이 나올 확률이

$$p = \frac{1}{2} - \epsilon$$

인 동전을 던져서 앞면이 나오면 게임자는 1원을 얻고, 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 B 는 $0 < \epsilon < 1/4$ 인 편의 모수 ϵ 에 대해

$$p_0 := \frac{9}{10} - \epsilon, \quad p_1 = p_2 := \frac{1}{4} - \epsilon, \quad p_3 := \frac{7}{10} - \epsilon \quad (2.1)$$

로 정의되는 4개의 동전을 사용한다. 만약 직전의 두 번의 시행 결과가 패-패(각각 패-승, 승-패, 승-승)이면 앞면이 나올 확률이 p_0 (각각 p_1, p_2, p_3)인 동전을 던진다. 즉, 직전의 두 번의 시행 결과에 따라 현재 시행에서 사용될 동전이 결정된다. 다만, 첫 시행을 위한 직전 결과는 패-패, 패-승, 승-패, 승-승 중에서 동일한 확률 $1/4$ 로 하나를 정하는 것으로 가정한다. 게임 B 에서도 앞면이 나오면 1원을 얻고 뒷면이 나오면 1원을 잃는다. 게임 A 와 B 를 각각 오래 반복하면 시행당 기대상금 μ_A 와 μ_B 가 모두 음수가 되는 $\epsilon > 0$ 을 찾을 수 있어 지는 게임이 된다.

반면에 두 게임 A 와 B 를 확률 $\gamma > 0$ 로 혼합한 임의적 혼합게임 $C := \gamma A + (1 - \gamma)B$ 을 고려하면 모든 $0 < \gamma < 1$ 에 대해 임의적 혼합게임 C 의 시행당 기대상금 μ_C 가 양수가 되는 아주 작은 $\epsilon > 0$ 이 존재하여, 이기는 게임으로 만들 수 있다 (Ethier와 Lee, 2009). 한편, 게임 A 를 a 번, 게임 B 를 b 번, 다시 게임 A 를 a 번, 게임 B 를 b 번으로 규칙적으로 반복하는 주기적 반복게임 $[a, b]$ 에 대해서도 Ethier와 Lee (2009)는 게임 A 의 시행당 기대상금이 $\mu_A < 0$ 이고 게임 B 의 시행당 기대상금이 $\mu_B < 0$ 인 반면에 주기적 반복게임 $[a, b]$ 의 시행당 기대상금이 $\mu_{[a,b]} > 0$ 가 되는 $\epsilon > 0$ 이 존재함을 보였다. 더불어 (2.1)의 특정한 확률값에서의 파론도 역설 뿐 아니라 $\kappa > 0$, $\lambda > 0$ 와 $\lambda < 1 + \kappa$ 에 대해

$$p_0 := \frac{1}{1 + \kappa} - \epsilon, \quad p_1 = p_2 := \frac{\lambda}{1 + \lambda} - \epsilon, \quad p_3 := 1 - \frac{\lambda}{1 + \kappa} - \epsilon, \quad (2.2)$$

로 확장된 확률값의 게임 B 를 고려하여 파론도 역설을 분석하였다. 식 (2.1)의 확률값은 $\kappa = 1/9$ 이고 $\lambda = 1/3$ 인 특별한 경우이다. 식 (2.2)의 확률값에 대해 Ethier와 Lee (2009)는 임의적 혼합게임 C 와 주기적 반복게임 $[a, b]$ 에서 $\kappa < \lambda < 1$ 또는 $\kappa > \lambda > 1$ 일 때 파론도 효과가 나타나고, $\lambda < \min(\kappa, 1)$ 또는 $\lambda > \max(\kappa, 1)$ 일 때는 역 파론도 효과가 존재함을 확인하였다. 다만 이 결과는 식 (2.2)에서와 같이 $p_1 = p_2$ 의 가정 하에서 얻어진 것이며, 본 논문에서는 그런 조건없이 모든 p_0, p_1, p_2 그리고 p_3 에 대해 살펴볼 것이다.

과론도 역설의 존재를 확인하기 위해서 Ethier와 Lee (2009)는 마코프 체인에 의해 진행되는 게임의 궁극적인 평균과 분산의 강대수의 법칙(strong law of large numbers)과 중심극한정리(central limit theorem)를 유도하였다. 그 결과를 정리하면 다음과 같다.

$\{X_n\}_{n \geq 0}$ 을 유한 상태 공간 Σ 에서 정의되는 분할불가(irreducible)이고 비주기적(aperiodic) 마코프 체인이고 $\mathbf{P} = (P_{ij})_{i,j \in \Sigma}$ 을 1단계 전이확률행렬(transition probability matrix)이라고 하자. 그리고 그 정상확률분포를 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i)_{i \in \Sigma}$ 라고 하자. 함수 $w : \Sigma \times \Sigma \mapsto \mathbf{R}$ 를 행렬 $\mathbf{W} = (w(i, j))_{i,j \in \Sigma}$ 로 나타내어 상금행렬(payload matrix)이라고 한다. 모든 n 에 대해,

$$\begin{aligned}\xi_n &:= w(X_{n-1}, X_n), \quad n \geq 1 \\ S_n &:= \xi_1 + \cdots + \xi_n, \quad n \geq 1\end{aligned}$$

로 정의하면 S_n 은 n 번의 시행 후의 게임자의 누적 상금이 된다. (i, j) 의 요소가 $P_{ij}w_{ij}$ 인 행렬을 $\dot{\mathbf{P}}$ 라고 하고, $P_{ij}w_{ij}^2$ 인 행렬을 $\ddot{\mathbf{P}}$ 라고 하자. 그리고 각 행이 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}$ 인 정방행렬(square matrix)을 $\boldsymbol{\Pi}$ 라고 하고, 전이확률행렬 \mathbf{P} 에 대한 근본행렬(fundamental matrix, Kemeny와 Snell, 1960)을 $\mathbf{Z} := (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \boldsymbol{\Pi}))^{-1}$ 이라고 하자. 그러면 열벡터 $\mathbf{1} := (1, 1, \dots, 1)^T$ 에 대해 Ethier와 Lee (2009)는 다음과 같이 평균과 분산

$$\mu := \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}, \quad \sigma^2 := \boldsymbol{\pi} \ddot{\mathbf{P}} \mathbf{1} - (\boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1})^2 + 2\boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{P}} (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\Pi}) \dot{\mathbf{P}} \mathbf{1}.$$

을 계산하고, 다음의 강대수의 법칙과 중심극한정리를 증명하였다.

정리 2.1 (Ethier과 Lee 2009) 위의 조건과 임의의 초기상태 X_0 에 대해 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}E[S_n] = \mu$ 이고

$$\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu \text{ a.s.},$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1}\text{Var}(S_n) = \sigma^2$ 이며, 만약 $\sigma^2 > 0$ 이면,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

이다. 만약 $\mu = 0$ 이고 $\sigma^2 > 0$ 이면, $-\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ a.s.가 된다.

과거의존 과론도 게임 A 와 B 에서 연이은 두 시행에서의 결과인 패-패, 패-승, 승-패, 승-승을 각각 상태 0, 1, 2, 3으로 나타내면, 각 게임은 상태 공간 $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ 에서 정의되고 1단계 전이확률행렬이 각각

$$\mathbf{P}_A := \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_B := \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 \\ 1-p_2 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p_3 & p_3 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

인 마코프 체인으로 모형화 할 수 있다. 더불어 $0 < p < 1$ 이고 $0 < p_i < 1$, $i = 0, 1, 2, 3$ 이므로 이 마코프 체인은 분할불가이고 비주기적이다. 또한 상금행렬 \mathbf{W} 은 두 게임 모두 동일하게

$$\mathbf{W} := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

로 나타낼 수 있다. 게임 A 의 정상확률분포 π_A 는

$$\begin{aligned}\pi_A &= \pi_A \mathbf{P}_A, \\ \pi_A \mathbf{1} &= 1\end{aligned}$$

을 만족하는 행벡터로서 $\pi_A = (q^2, pq, pq, p^2)$ 로 얻어진다. 여기서 $q := 1 - p$ 이다. 게임 B 의 정상확률분포 $\pi_B = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 는 $\pi_B = \pi_B \mathbf{P}_B$ 와 $\pi_B \mathbf{1} = 1$ 을 만족하기 때문에 $i = 0, 1, 2, 3$ 에 대해 $q_i := 1 - p_i$ 를 이용하면,

$$\pi_0 = \frac{q_2 q_3}{r}, \quad \pi_1 = \frac{p_0 q_3}{r}, \quad \pi_2 = \frac{p_0 q_3}{r}, \quad \pi_3 = \frac{p_0 p_1}{r} \quad (2.4)$$

로 나타낼 수 있다. 단, $r := p_0 p_1 + 2p_0 q_3 + q_2 q_3$ 이다. 그러므로 게임 A 의 시행당 기대상금은

$$\mu_A = \pi_A \dot{\mathbf{P}}_A \mathbf{1} = 2p - 1 \quad (2.5)$$

이고, 게임 B 의 시행당 기대상금은

$$\begin{aligned}\mu_B &= \pi_B \dot{\mathbf{P}}_B \mathbf{1} \\ &= \pi_0(p_0 - q_0) + \pi_1(p_1 - q_1) + \pi_2(p_2 - q_2) + \pi_3(p_3 - q_3) \\ &= \frac{p_0 p_1 - q_2 q_3}{r}\end{aligned} \quad (2.6)$$

이다. 한편, 두 게임의 임의적 혼합게임 $C := \gamma A + (1 - \gamma)B$ 는 그 전이확률행렬이 $\mathbf{P}_C := \gamma \mathbf{P}_A + (1 - \gamma) \mathbf{P}_B$ 이므로 이에 대응되는 혼합게임의 정상확률분포 π_C 는 $\pi_C = \pi_C \mathbf{P}_C$ 와 $\pi_C \mathbf{1} = 1$ 를 만족하는 해로 구할 수 있다. 특별히 $\gamma = 1/2$ 이면 혼합게임 C 의 시행당 기대상금은

$$\begin{aligned}\mu_C &= \pi_C \dot{\mathbf{P}}_C \mathbf{1} \\ &= \frac{(p + p_0)(p + p_1) - (q + q_2)(q + q_3)}{(p + p_0)(p + p_1) + 2(p + p_0)(q + q_3) + (q + q_2)(q + q_3)}\end{aligned} \quad (2.7)$$

로 얻어진다. 따라서 식 (2.5), (2.6)과 (2.7)에 의해

$$\begin{aligned}2p - 1 &< 0, \\ p_0 p_1 &< q_2 q_3, \\ (p + p_0)(p + p_1) &> (q + q_2)(q + q_3)\end{aligned}$$

를 만족하는 확률 p 의 게임 A 와 확률 $p_i, i = 0, 1, 2, 3$ 의 게임 B 는 각각은 지는 게임이지만 동일한 가중치의 혼합게임 C 는 이기는 게임이 되므로 파론도 효과가 존재하게 된다. 한편, 반대로

$$\begin{aligned}2p - 1 &> 0, \\ p_0 p_1 &> q_2 q_3, \\ (p + p_0)(p + p_1) &< (q + q_2)(q + q_3)\end{aligned}$$

의 범위에서는 역 파론도 효과가 존재한다.

2.2. 일반 상금행렬의 과거의존 파론도 게임

기존의 과거의존 파론도 게임은 매 시행의 결과에 따른 상금이 모두 동일하게 +1원 또는 -1원인 경우만 고려하였다. 이 모형을 주식에 적용하기 위해서는 상금행렬을 일반화시킬 필요가 있다. 게임 A 의 상금행렬 \mathbf{W}_A 는

$$\mathbf{W}_A := \begin{pmatrix} -d & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & u \\ -d & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & u \end{pmatrix}$$

으로 모든 상태에 대해 그 시행에서 이기면 u 원을 얻고, 지면 d 원을 잃는다. 단, $u, d > 0$ 이다. 한편, 게임 B 의 상금행렬 \mathbf{W}_B 는

$$\mathbf{W}_B := \begin{pmatrix} -d_0 & u_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_1 & u_1 \\ -d_2 & u_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 & u_3 \end{pmatrix}$$

로서 상태에 따라 이기는 경우는 각각 $u_0, u_1, u_2, u_3 > 0$ 원을 받고, 질 때는 각각 $d_0, d_1, d_2, d_3 > 0$ 원을 잃는다. 예를 들어 상태 0의 경우, 즉 직전의 시행 결과가 패-패인 경우에는 앞면이 나올 확률이 p_0 인 동전을 던지고 그 동전에서 앞면이 나오면 u_0 원을 얻고, 뒷면이 나오면 d_0 을 잃게 된다. 나머지 상태 1, 2, 3도 유사하게 진행된다. 그러면 게임 A 의 시행당 기대상금은

$$\mu_A = up - dq \quad (2.8)$$

이고, 게임 B 의 시행당 기대상금은 (2.4)의 $\pi_i, i = 0, 1, 2, 3$ 에 대해

$$\begin{aligned} \mu_B &= \boldsymbol{\pi}_B \dot{\mathbf{P}}_B \mathbf{1} \\ &= \pi_0(u_0 p_0 - d_0 q_0) + \pi_1(u_1 p_1 - d_1 q_1) + \pi_2(u_2 p_2 - d_2 q_2) + \pi_3(u_3 p_3 - d_3 q_3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

로 계산된다. 한편, 동일한 가중치의 임의적 혼합게임 $C = (1/2)A + (1/2)B$ 의 전이확률행렬 \mathbf{P}_C 은 $(1/2)\mathbf{P}_A + (1/2)\mathbf{P}_B$ 로써, 식 (2.3)의 \mathbf{P}_B 의 각 요소의 p_i 대신에 $p/2 + p_i/2, i = 0, 1, 2, 3$ 를 대입하여 얻을 수 있다. 그러므로 게임 C 의 정상확률분포 $\boldsymbol{\pi}_C := (\pi'_0, \pi'_1, \pi'_2, \pi'_3)$ 는 식 (2.4)의 p_i 를 $p/2 + p_i/2, i = 0, 1, 2, 3$ 로 바꾸어서 $r' := (p + p_0)(p + p_1) + 2(p + p_0)(q + q_3) + (q + q_2)(q + q_3)$ 에 대해

$$\begin{aligned} \pi'_0 &= \frac{(q + q_2)(q + q_3)}{r'}, \\ \pi'_1 &= \frac{(p + p_0)(q + q_3)}{r'}, \\ \pi'_2 &= \frac{(p + p_0)(q + q_3)}{r'}, \\ \pi'_3 &= \frac{(p + p_0)(p + p_1)}{r'} \end{aligned}$$

로 얻어진다. 게임 C 의 상금행렬 \mathbf{W}_C 는 $(1/2)\mathbf{W}_A + (1/2)\mathbf{W}_B$ 이므로 게임 C 의 시행당 기대상금은

$$\begin{aligned} \mu_C &= \boldsymbol{\pi}_C \dot{\mathbf{P}}_C \mathbf{1} \\ &= \left\{ \pi'_0[(u + u_0)(p + p_0) - (d + d_0)(q + q_0)] + \pi'_1[(u + u_1)(p + p_1) - (d + d_1)(q + q_1)] \right. \\ &\quad \left. + \pi'_2[(u + u_2)(p + p_2) - (d + d_2)(q + q_2)] + \pi'_3[(u + u_3)(p + p_3) - (d + d_3)(q + q_3)] \right\} / 4 \end{aligned} \quad (2.10)$$

이다. 그러므로 주식 투자 모형에서는 상승확률 p 와 상승금액 u , 하락금액 d 의 1개의 주식으로 구성된 포트폴리오 A 와 $i = 0, 1, 2, 3$ 에 대해 각각의 상승확률이 p_i , 상승금액이 u_i , 그리고 하락금액이 d_i 인 4개의 주식으로 구성된 포트폴리오 B 에 대해 식 (2.8), (2.9) 그리고 (3.2)의 거래당 기대수익금 μ_A , μ_B , μ_C 을 계산한다. 이 값들이 $\mu_A < 0$ 이고 $\mu_B < 0$ 면서 $\mu_C > 0$ 을 만족하면 파론도 효과가 나타나고, 반대로 $\mu_A > 0$ 이고 $\mu_B > 0$ 면서 $\mu_C < 0$ 인 경우에는 역 파론도 효과가 존재하게 된다.

3. 주식 투자에의 적용

2008년부터 2010년까지 3년간 한국거래소의 유가증권 시장에 상장된 900여개 종목의 매일의 증가 데이터를 이용하여 전날과의 증가 차이를 구한다. 전날에 비해 다음 날의 증가가 상승했다면 게임에서의 승에 해당되는 것이고, 증가가 전날에 비해 하락했다면 게임에서의 패에 대응된다. 증가의 변동이 없는 날은 2장의 마코프 체인 모형을 적용하기 위해 본 분석에서 제외한다. 3년간 900개의 종목들 중 증가의 변동이 없는 날을 제외하고, 증가가 상승 혹은 하락한 날이 3년간의 전체 거래일 755일 중 적어도 700일 이상인 종목 279개만 분석에 이용하였다. 매일의 증가를 비교하여 증가의 총 변화일 중에서 상승한 날과 하락한 날의 수를 구한다. 279개의 각 종목에 대해

$$\hat{p} = \frac{\text{증가가 상승한 날의 수}}{\text{증가 변화일의 수}}$$

로 상승확률 p 를 추정한다. 더불어

$$\hat{u} = \frac{\text{증가 상승 폭의 합}}{\text{증가가 상승한 날의 수}}$$

$$\hat{d} = \frac{\text{증가 하락 폭의 합}}{\text{증가가 하락한 날의 수}}$$

로 평균 상승금액과 평균 하락금액을 구하여 상승금액 u 와 하락금액 d 의 추정값으로 사용한다.

279개 종목 각각을 포트폴리오 A 로 간주하고 계산한 거래당 기대수익금 μ_A 가 양수인 종목은 127개, 음수인 종목은 152개로 나타났다. 279개 종목에서 4개의 종목을 구별하여 구성할 수 있는 포트폴리오 수는 $279!/275! = 5,929,770,024$ 개이고, 구성된 4개의 종목으로 포트폴리오 B 를 구성하는 경우 그 거래당 기대수익금 μ_B 가 0 보다 큰 경우는 2,945,935,416개이고, μ_B 가 0 보다 작은 경우는 2,983,834,608개로 얻어졌다. 파론도 효과는 거래당 기대수익금이 음수인 포트폴리오 A 의 152개 종목과 포트폴리오 B 의 2,983,834,608개의 경우에 대해 1/2의 동일한 확률로 두 포트폴리오를 결합한 혼합 포트폴리오 $C = (1/2)A + (1/2)B$ 의 거래당 기대수익금 μ_C 가 양수가 되는 경우로서, 전체의 2.91%로 나타났다. 이때, 포트폴리오 A 의 종목 1개와 포트폴리오 B 의 종목 4개는 모두 다른 종목으로 구성한다. 역 파론도 효과는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 가 평균적으로 양의 수익을 얻는 경우에서 발생한다. $\mu_A > 0$ 인 127개와 $\mu_B > 0$ 인 2,945,935,416개로 구성할 수 있는 경우에 대해 혼합 포트폴리오 $C = (1/2)A + (1/2)B$ 의 거래당 기대수익금 μ_C 가 0보다 작은 경우가 11.16%로 얻어졌다. 즉, 양의 수익을 얻는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 를 1/2의 확률로 혼합하여 투자하면 손실이 발생하는 경우가 전체의 11.16%로 나타났다.

각 경우에 해당되는 실제 주식 종목을 예로 살펴보자. 파론도 효과의 경우 포트폴리오 A 에 해당되는 LIG 손해보험과 포트폴리오 B 에 해당되는 현대증권, 신한지주, HMC투자증권, 현대해상의 각 모수 추정값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{p} &= 0.5196, & \hat{u} &= 466.85, & \hat{d} &= 506.56, \\ \hat{p}_0 &= 0.4824, & \hat{u}_0 &= 353.45, & \hat{d}_0 &= 350.49, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned}\hat{p}_1 &= 0.4784, & \hat{u}_1 &= 872.74, & \hat{d}_1 &= 799.06, \\ \hat{p}_2 &= 0.4714, & \hat{u}_2 &= 732.69, & \hat{d}_2 &= 643.14, \\ \hat{p}_3 &= 0.5153, & \hat{u}_3 &= 492.27, & \hat{d}_3 &= 518.36.\end{aligned}$$

그러면 포트폴리오 A 에 해당하는 LIG 손해보험의 추정된 거래당 기대수익금은

$$\hat{\mu}_A = -0.77$$

이고, 포트폴리오 B 의 현대증권, 신한지주, HMC투자증권, 현대해상으로부터 계산되는 거래당 기대수익금은

$$\hat{\mu}_B = -0.84$$

인 반면에, A 와 B 의 혼합 포트폴리오 $C = (1/2)A + (1/2)B$ 의 거래당 기대수익금은

$$\hat{\mu}_C = 1.69$$

로 나타났다.

역 파론도 효과를 가지는 포트폴리오 A 와 포트폴리오 B 의 종목들은 예를 들어, 삼성중공업, 넥센타이어, 삼성정밀화학, 동일산업, 대한전선으로, 각 종목의 모수 추정값은

$$\begin{aligned}\hat{p} &= 0.4958, & \hat{u} &= 657.71, & \hat{d} &= 644.80 & (3.2) \\ \hat{p}_0 &= 0.4908, & \hat{u}_0 &= 156.37, & \hat{d}_0 &= 235.56 \\ \hat{p}_1 &= 0.5141, & \hat{u}_1 &= 1060.00, & \hat{d}_1 &= 1010.44 \\ \hat{p}_2 &= 0.5153, & \hat{u}_2 &= 1490.03, & \hat{d}_2 &= 1483.52 \\ \hat{p}_3 &= 0.4574, & \hat{u}_3 &= 677.96, & \hat{d}_3 &= 678.91\end{aligned}$$

로 계산된다. 포트폴리오 A 인 삼성중공업의 거래당 기대수익금은

$$\hat{\mu}_A = 0.92$$

추정되었고, 넥센타이어, 삼성정밀화학, 동일산업, 대한전선으로 구성된 포트폴리오 B 의 거래당 기대수익금은

$$\hat{\mu}_B = 1.23$$

로 얻어졌으나, 혼합 포트폴리오 $C = (1/2)A + (1/2)B$ 의 거래당 기대수익금은 역설적으로

$$\hat{\mu}_C = -2.20$$

로 나타났다.

위의 두 예제에서 보듯이, 비록 거래당 기대수익금의 크기는 종목의 주가에 비해 매우 작지만 음의 기대수익금의 두 포트폴리오를 혼합하여 양의 기대수익금이 되거나 양의 기대수익금의 두 포트폴리오를 혼합하여 음의 기대수익금이 얻어지는 역설적인 현상이 주식의 투자에서 발생할 수 있음을 확인하는데 의미를 두고자 한다.



(a) Parrondo effect



(b) reverse Parrondo effect

Figure 3.1. Parrondo effect (a)와 reverse Parrondo effect (b)

Figure 3.1은 두 예제에 대해 각 포트폴리오의 수익 변동을 시뮬레이션으로 생성하여 나타낸 것이다. 초기 수익금액 S_0 는 모두 동일하게 0원에서 시작하는 것으로 가정하고, 마코프 체인의 초기 상태 X_0 는 균일확률 1/4로 정해진다. 각 포트폴리오에 대해서 식 (3.1)과 (3.2)에서 계산한 상승확률 \hat{p} 와 \hat{p}_i 의 전이 확률행렬을 이용하여 거래일 $n \geq 1$ 일에서의 마코프 체인의 상태 X_n 을 연쇄적으로 생성한다. 생성된 상태에 따라 해당되는 상승금액 \hat{u}_i 와 하락금액 \hat{d}_i 에 의해 거래일 n 일의 수익금 ξ_n 은 $+\hat{u}_i$ 이거나 $-\hat{d}_i$ 이 된다. 따라서 거래일 n 일까지의 누적 수익금 S_n 은

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

로 얻어진다. Figure 3.1은 거래일 200일까지 독립적으로 150개의 누적 수익금 과정 $\{S_n\}_{n \geq 0}$ 을 생성하여 그 평균을 나타낸 것이다. 시간이 흐를수록 혼합 포트폴리오 C의 기대 누적 수익금(expected cumulative profit)이 점점 커지는 파론도 효과 (a)와 혼합 포트폴리오 C의 기대 누적 수익금이 점점 작아지는 역 파론도 효과 (b)의 점근적 특성을 잘 나타내고 있다.

4. 결론

매일의 종가를 기준으로 주식을 사고 팔며 직전의 두 번의 거래 결과에 의해 매수 종목을 결정하는 과거 의존 파론도 게임을 적용하면, 수익을 얻을 것으로 기대되는 주식들의 혼합으로 오히려 손실을 입는 역 파론도 효과가 존재함을 2008년부터 2010년까지의 3년간의 한국거래소의 주식 데이터로 확인하였다. 더불어 손실이 발생하는 주식을 혼합하여 이익이 되도록 하는 파론도 효과도 존재함을 보였다. 그러나 일반적인 투자의 원칙은 전망이 좋은 종목을 사고, 전망이 좋지 않은 종목을 파는 것인데 Iyengar와 Kohli (2004)가 지적하였듯이, 손실을 보는 종목들에 투자를 하여 그것들의 교환으로 이익을 보기에는 곤란한 부분이 있어 파론도 효과를 실제 주식 투자에서 활용하기에는 현실적인 어려움이 있다.

본 논문에서는 과거의존 파론도 게임을 적용하기 위해 매일의 종가가 상승 또는 하락하는 경우만 고려하였다. 가격 변동이 없는 경우도 포함하여 분석하기 위해서는 “상승”, “하락” 뿐 아니라 “변동 없음”의 세가지 상황을 이용하여 총 9개의 상태의 마코프 체인 모형으로 확대할 필요가 있으며 이는 추후 연구과제가 될 것이다.

References

- Abbott, D. (2010). Asymmetry and disorder: A decade of Parrondo's paradox, *Fluctuation and Noise Letters*, 129–156.
- Bishop, C. M. (1996). *Neural Networks for Pattern Recognition*, Oxford Press, Chapter 9, 346–349.
- Boman, M., Johansson, S. J. and Lyback, D. (2001). Parrondo strategies for artificial traders. In: Zhong, N., Liu, J., Ohsuga, S., and Bradshaw, J. (eds.) *Intelligent Agent Technology: Research and Development*, World Scientific, Singapore, 150–159.
- Di Crescenzo, A. (2007). A Parrondo paradox in reliability theory, *Mathematical Scientist*, **32**, 17–22.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2009). Limit theorems for Parrondo's paradox, *Electronic Journal of Probability*, **14**, 1827–1862.
- Ethier, S. N. and Lee, J. (2010). A Markovian slot machine and Parrondo's paradox, *Annals of Applied Probability*, **20**, 1098–1125.
- Harmer, G. P. and Abbott, D. (2002). A review of Parrondo's paradox, *Fluctuation and Noise Letters*, R71-R107.
- Iyengar, R. and Kohli, R. (2004). Why Parrondo's paradox is irrelevant for utility theory, stock buying, and the emergence of life, *Essays & Commentaries*, **20**, 595–601.
- Kemeny, J. G. and Snell, J. L. (1960). *Finite Markov Chains*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, NJ.
- Key, E. S. (1987). Computable examples of the maximal Lyapunov exponent, *Probability Theory and Related Fields*, **75**, 97–107.
- Osipovitch, D. C., Barratt, C. and Schwartz, P. M. (2009). Systems chemistry and Parrondos paradox: Computational models of thermal cycling, *New Journal of Chemistry*, **33**, 2022–2027.
- Parrondo, J. M. R., Harmer, G. P. and Abbott, D. (2000) New paradoxical games based on Brownian ratchets, *Physical Review Letters*, **85**, 5226–5229.
- Pinsky, R. and Scheutzow, M. (1992). Some remarks and examples concerning the transient and recurrence of random diffusions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques*, **28**, 519–536.
- Reed, F. (2007). Two-locus epistasis with sexually antagonistic selection: A genetic Parrondo's paradox, *Genetics*, **176**, 1923–1929.
- Spurgin, R. and Tamarkin, M. (2005). Switching investments can be a bad idea when Parrondo's paradox applies, *Journal of Behavioral Finance*, 15–18.
- Stjernberg, F. (2007). Parrondo's paradox and epistemology when bad things happen to good cognizers (and conversely). In: Rnnow-Rasmussen, T. and Petersson, B., Josefsson, J., and Egonsson, D. (eds.) *Hommage à Wlodek. Philosophical Papers Dedicated to Wlodek Rabinowicz*.