한국소음진동공학회논문집 제 22 권 제 8 호, pp. 791~799, 2012.

http://dx.doi.org/10.5050/KSNVE.2012.22.8.791

자기장 및 열하중을 받는 복합재료 원통셸의 진동해석

Vibration Analysis of Composite Cylindrical Shells Subjected to Electromagnetic and Thermal Fields

박 상 윤*·김 성 균**·최 종 운***·송 오 섭†

Sang-Yun Park, Sung-Kyun Kim, Jong-Woon Choi and Ohseop Song

(2012년 6월 14일 접수 ; 2012년 7월 12일 심사완료)

Key Words : Composite Laminated Shells(복합재료 적층셸), Dynamic Characteristics(동적 특성), Electromagnetic Field(전자기장), Transverse Shear(횡 전단), Extended Galerkin Method(확장된 Galerkin 방법)

ABSTRACT

In this paper free vibration analysis of symmetric and cross-ply elastic laminated shells based on FSDT was performed through discretization of equations of motion and boundary condition. Structural model of laminated composite cylindrical shells subjected to a combination of magnetic and thermal fields is developed via Hamilton's variational principle. These coupled equations of motion are based on the electromagnetic equations(Faraday, Ampere, Ohm, and Lorenz equations) and thermal equations which are involved in constitutive equations. Variations of dynamic characteristics of composite shells with applied magnetic field, temperature gradient, and stacking sequence are investigated and pertinent conclusions are derived.

기 호 설 명

$\mathbf{B}$	: 자속밀도 벡터
β_1, β_2	: 중립축에 대한 회전각
$\mathbf{E}$	: 전계 벡터
$\mathbf{f}$	: 로렌츠 힘 벡터
$\mathbf{H}$	: 자계 벡터
h	: 원통셸의 두께
$\mathbf{J}$	: 전류밀도 벡터
L, R	: 원통셸의 길이와 반경
μ_0	: 진공속에서의 투자율
N_L	: 적층 개수
$\rho_0^{(k)}$	: k번째 층의 밀도
Θ	: 온도구배
θ	: 섬유각
U_i, u_i	: 곡선좌표의 3D, 2D변위성분
z_k	: 원점에서 k번째 층의 바닥까지 거리
$\dot{}$, $\ddot{}$	: 시간 t에 대한 한 번 미분, 두 번 미분

† 교신저자; 정회원, 충남대학교, 기계공학과
E-mail : songos@cnu.ac.kr
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642
* 정회원, 충남대학교 대학원
** 정회원, 한국원자력연구원
*** 정회원, 특허청

이 논문의 일부는 2012년 춘계 소음진동 학술대회에서 발표되었음.

1. 서 론

현장에서 많이 사용되는 구조물인 원통셸의 진동 문제는 많은 연구자들에 의해 큰 관심을 끌어 왔다. Arnold와 Warburton[1]의 선구적 연구를 시작으로 많은 연구가 수행되었으며, 1973년에 Leissa[2]에 의해 집대성되었다. 1981년 Chung[3]은 임의의 형태의

경계조건을 갖는 등방성 원통셸의 진동특성에 대한 일반적 해법을 Sanders의 이론에 기초하여 유도하였다. 보통 원통셸은 주름, 보강재 및 복합재료 등으로 제작하게 되며 직교 이방성 및 준직교 이방성으로 취급할 수 있는 경우가 많은데, 이에 대한 연구가 국내외적으로 진행되어 왔다.

Ferreira[4]와 그의 공동연구자는 다중이차 반경기초함수(multiquadric radial basis function)에 기초한 무요소(meshless) 방법을 사용하여 복합재료 셸의 자유진동해석을 수행하였다. Qatu[5]는 곡률반경이 작은 두꺼운 셸(deep thick shells)에 대한 보다 정확한 식을 유도하였다. Lam과 Qian[6]은 FSDT(first order shear deformation theory)에 근거한 복합법(complex method)를 이용하여 angle-ply로 대칭 적층된 두꺼운 복합재료 셸(thick symmetric angle-ply laminated composite shells)의 진동 해석을 수행하였다.

최근에는 탄성(elasticity)만을 이용하는 구조물 외에 탄성-열-자기-전기 등의 물리적 연성이 내재하는 다기능성 구조물(multifunctional structures)에 대한 연구에 관심이 많아지고 있다.

Yoon[7]에 의한 전기-유체-열-구조 연성을 고려한 마이크로 액추에이터의 위상체적설계와 Kim[8]과 그의 공동연구자들에 의한 핵융합로 ITER 실험로에 대한 적용을 그 예로 들 수 있다. 이와 같은 구조물은 탄성뿐만 아니라 탄성-열-자기-전기 등이 상호연성된 구조물이기 때문에 설계 시 상호 연성을 고려해야 한다. 원통셸에 그러한 연성효과를 고려하여, Qin[9,10]은 자기-탄성-열을 고려한 원통셸의 비선형 응답과 안정성을 수행하였다. Tsai와 Wu[11]는 개회로 표면상태(open-circuit surface condition)를 갖는 경사기능 자기-전기-탄성 셸의 자유진동 해석을 수행하였다.

이방성 복합재료의 경우에 그 적층방법(stacking sequence) 및 섬유각(fiber angle)에 따라 전기전도도 행렬이 변하여 로렌츠 힘의 변화를 초래한다[8].

즉, 동일한 전자기장이 가해져도 적층방법 및 섬유각에 따라 원통셸의 동적거동의 차이가 발생한다. 또한 동일한 열하중에 대해서도 적층방법 및 섬유각에 따라 동적거동의 차이가 존재한다. 이 연구에서는 온도구배가 존재하는 cross-ply 복합재료 원통셸에 자기장이 축 방향으로 가해졌을 때, 적층방법 및 섬유각에 따른 로렌츠 힘 및 온도구배의 변화와 그에 따른 자유진동 및 안정성(stability) 특성의 변화경향을 고찰하였으며, 이는 기존의 등방성 원통셸에만 적용된 연성효과를 복합재료 원통셸에도 적용함으로써 다기능성 복합재료 구조물 설계에 유용하게 적용될 수 있을 것이다.

2. 운동방정식

2.1 기초방정식

운동방정식을 유도하기 위해서는 탄성, 열, 전자기장과 관련된 수식 정의가 선행되어야 한다. 따라서 변위장과 전자기장에 대한 기초방정식을 유도하고 이를 기반으로 운동방정식을 유도하였다.

(1) 변위장(displacement field)

복합재료 원통셸의 변위장을 정의하기 위해 Fig. 1과 같이 중립면(middle surface)을 기준으로 하는 x, θ, z좌표계를 사용하며, 이는 각각 원통셸의 축방향, 원주방향, 두께방향 좌표를 나타낸다.

복합재료 원통셸의 모델링을 위해 다음과 같은 운동학적 가정을 고려하였다.

(a) 각 복합재료 층들은 서로 완전히 접착되어 있으며 각 층의 두께는 모두 동일하다.

(b) 원통셸의 두께는 길이와 반경에 비해 상대적으로 매우 작다.

(c) 횡전단변형률을 고려한다.

위 가정에 따라 Love의 셸이론에 근거한 원통셸의

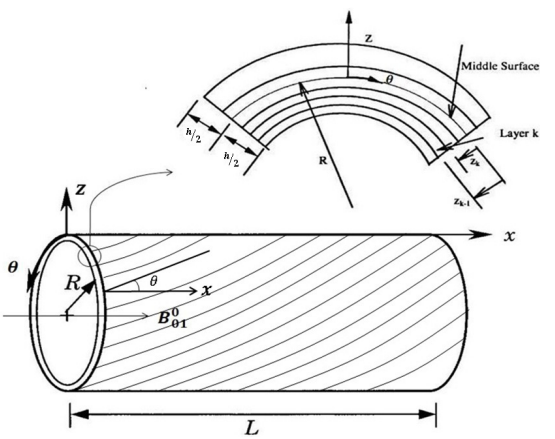


Fig. 1 Geometry of laminated composite shells

변위장을 다음과 같이 중립면에 대한 변위장으로 표현한다.

$$U_1(x,\theta,z,t) = u_1(x,\theta,t) + z\beta_1(x,\theta,t) \quad (1a)$$

$$U_2(x,\theta,z,t) = u_2(x,\theta,t) + z\beta_2(x,\theta,t) \quad (1b)$$

$$U_3(x,\theta,z,t) = u_3(x,\theta,t) \quad (1c)$$

식 (1)에서 u_1, u_2, u_3는 각각 축방향, 원주방향, 두께방향의 중립면에서의 변위이며, β_1, β_2는 중립축에 대한 회전각을 나타낸다.

식 (1)로부터 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\varepsilon_x = u_{1,1} + z\beta_{1,1} \quad (2a)$$

$$\varepsilon_\theta = u_{2,2} + z\beta_{2,2} \quad (2b)$$

$$\gamma_{x\theta} = u_{1,2} + u_{2,1} + z(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) \quad (2c)$$

$$\gamma_{xz} = \beta_1 + u_{3,1} \quad (2d)$$

$$\gamma_{\theta z} = \beta_2 + u_{3,2} \quad (2e)$$

식 (2)에서 $(.)_{,i} \equiv \partial(.)/\partial\alpha_i$ 를 나타낸다.
여기서 하첨자 $1 = x, 2 = \theta, 3 = z$.

(2) 전자기장(electro-magnetic field) 방정식

전기장 및 자기장 방정식은 다음과 같이 일반화된 맥스웰 방정식으로 표현된다[8].

페러데이 법칙 $\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$ (3a)

앙페르 법칙 $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$ (3b)

옴의 법칙 $\mathbf{J} = \mathbb{G}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{V}} \times \mathbf{B})$ (3c)

로렌츠 힘 $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ (3d)

$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (3e)

여기서 **E**, **H**는 전기장 및 자기장 벡터를 나타내며, **J**, **B**는 전류밀도 벡터와 자속밀도 벡터를 나타낸다. 또한 식 (3d)에서 **f**는 단위 체적당 로렌츠 힘을 나타내며 μ_0는 진공에서의 투자율을 나타낸다. 식 (3c)에서 $\mathbb{G}$는 복합재료 섬유각(fiber angle)의 함수인 전기전도도 행렬이며 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbb{G} \equiv \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $g_{11} = g_1 \cos^2\theta + g_2 \sin^2\theta$, $g_{33} = g_3$, $g_{22} = g_2 \cos^2\theta + g_1 \sin^2\theta$, $g_{12} = (g_1 - g_2)\sin\theta\cos\theta$, $g_i (i = 1,2,3)$은 섬유(fiber)의 주방향(principle directions) 전기전도도를 나타낸다.

2.2 탄성-열-전기-자기 연성 운동방정식

(1) 응력-변형률(stress-strain) 관계식

복합재료 원통셸의 응력과 변형률 사이의 관계식은 다음 식 (5)와 같다.

식 (5)에서 $[\overline{Q}_{ij}]^{(k)} (i,j = 1,2,6)$는 각 lamina에 대한 환산탄성계수이며 $\overline{\alpha}_{ij} (i,j = 1,2)$는 환산 열팽창계수이다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{\alpha}_{11} \\ \overline{\alpha}_{22} \\ \overline{\alpha}_{12} \end{Bmatrix} \Theta \right) \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

여기에서 Θ는 온도구배를 뜻한다. 식 (5)를 두께에 따라 적분한 합 응력과 합 모멘트에 관한 식은 식 (6)과 같다.

(1) 합 응력과 합 모멘트(stress resultants and couples)

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{h(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (6a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\theta z} \\ N_{xz} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{h(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (6b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_L} \int_{h(k)} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{x\theta} \end{Bmatrix}^{(k)} z\, dz \tag{6c}$$

(3) 운동방정식

아래의 Hamilton 원리를 이용하여 운동방정식 및 경계조건식을 유도한다.

$$\delta J = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[T - U + W_e \right] dt = 0 \tag{7}$$

@$t=t_0, t=t_1$: $\delta u_i = 0, \delta\beta_\zeta = 0\ (i=1,2,3\ \ \zeta=1,2)$

여기서 T, U는 각각 운동에너지, 변형에너지를 나타내며 이들의 변분 및 외력에 의한 가상일 δW_e는 다음과 같다.

$$\delta T = \int_{-h/2}^{h/2} \int_\Omega \rho \dot{U}_i \delta \dot{U}_i d\Omega dx_3 \tag{8a}$$

$$\delta U = \int_{-h/2}^{h/2} \int_\Omega \left[\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \right] d\Omega dx_3 \tag{8b}$$

$$\delta W_e = \int_\tau \rho H_i \delta U_i d\tau + \int_\Omega \underset{\sim}{\sigma}_i \delta U_i d\Omega \tag{8c}$$

여기서 H_i는 체적력(body force), $\underset{\sim}{\sigma}_i$는 표면력(surface traction force)을 나타낸다.

유도된 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

운동방정식

$$N_{11,1} + \frac{1}{R} N_{12,2} - m_1 \ddot{u}_1 + \int_{-h/2}^{h/2} f_1 d\alpha_3 = 0 \tag{9a}$$

$$N_{12,1} + \frac{1}{R} N_{22,2} - m_1 \ddot{u}_2 + \int_{-h/2}^{h/2} f_2 dx_3 = 0 \tag{9b}$$

$$N_{13,1} + \frac{1}{R} N_{23,2} - \frac{1}{R} N_{22} + \int_{-h/2}^{h/2} f_3 dx_3 - m_1 \ddot{u}_3 = 0 \tag{9c}$$

$$M_{11,1} + \frac{1}{R} M_{12,2} - N_{13} - m_3 \ddot{\beta}_1 + \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 f_1 d\alpha_3 = 0 \tag{9d}$$

$$M_{21,1} + \frac{1}{R} M_{22,2} - N_{23} - m_3 \ddot{\beta}_2 + \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 f_2 d\alpha_3 = 0 \tag{9e}$$

경계조건

@$x = cons\tan t$

$$\left(-N_{11} + \underset{\sim}{N}_{11}\right)\delta u_1 = 0,\ \ \left(-N_{12} + \underset{\sim}{N}_{12}\right)\delta u_2 = 0,$$

$$\left(-N_{13} + \underset{\sim}{N}_{13}\right)\delta u_3 = 0,$$

$$\left(-M_{11} + \underset{\sim}{M}_{11}\right)\delta\beta_1 = 0,\ \ \left(-M_{12} + \underset{\sim}{M}_{12}\right)\delta\beta_2 = 0$$

@$\theta = cons\tan t$

$$\left(-N_{12} + \underset{\sim}{N}_{12}\right)\delta u_1 = 0,\ \ \left(-N_{22} + \underset{\sim}{N}_{22}\right)\delta u_2 = 0,$$

$$\left(-N_{23} + \underset{\sim}{N}_{23}\right)\delta u_3 = 0,$$

$$\left(-M_{12} + \underset{\sim}{M}_{12}\right)\delta\beta_1 = 0,\ \left(-M_{22} + \underset{\sim}{M}_{22}\right)\delta\beta_2 = 0$$

자기장에 의하여 발생한 로렌츠 힘 $f_i (i=1,2,3)$은 식 (3d)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$f_1 = J_2(B_{03}^0 + \alpha_3 B_{03}^1) - J_3(B_{02}^0 + \alpha_3 B_{02}^1) \tag{10a}$$

$$f_2 = J_3(B_{01}^0 + \alpha_3 B_{01}^1) - J_1(B_{03}^0 + \alpha_3 B_{03}^1) \tag{10b}$$

$$f_3 = J_1(B_{02}^0 + \alpha_3 B_{02}^1) - J_2(B_{01}^0 + \alpha_3 B_{01}^1) \tag{10c}$$

식 (10)을 두께에 대해 적분하여 로렌츠 힘과 그에 의한 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_1 d\alpha_3 = 0 \tag{11a}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_2 d\alpha_3 = -\frac{h}{2} \mathsf{M}_0 \left[g_{33} \right] \dot{u}_2 \left(B_{01}^0 \right)^2 = -\frac{h}{2} \overline{g}_{33} \dot{u}_2 \left(B_{01}^0 \right)^2 \tag{11b}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_3 d\alpha_3 = -\frac{h}{2} \mathsf{M}_0 \left[g_{22} \right] \dot{u}_3 \left(B_{01}^0 \right)^2 = -\frac{h}{2} \overline{g}_{22}^{g} \dot{u}_3 \left(B_{01}^0 \right)^2 \tag{11c}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3 f_1 dx_3 = 0 \tag{11d}$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}\alpha_3 f_2 d\alpha_3 = -\frac{h}{2}\mathsf{M}_2\left[g_{33}\right]\dot{\beta}_2\left(B_{01}^0\right)^2 = -C_{33}^g\dot{\beta}_2\left(B_{01}^0\right)^2 \tag{11e}$$

여기서

$$C_{\alpha\beta}^g \equiv h\mathsf{M}_2\left[g_{\alpha\beta}\right],\ \ \overline{g}_{\alpha\beta} \equiv \mathsf{M}_0\left[g_{\alpha\beta}\right],\left(\alpha,\beta\right)=1,2$$

$$\mathsf{M}_0\left[g_{\alpha\beta}\right] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)} / N_L$$

$$\mathsf{M}_2\left[g_{\alpha\beta}\right] \equiv \sum_{i=1}^{N_L} g_{\alpha\beta}^{(i)}\left(z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2\right)/\left(3N_L\right)$$

2.3 축 방향으로 자기장이 가해질 때의 지배방정식

원통셸의 양단이 단순지지 되어있고, cross-ply 대칭 적층(symmetrically laminated) 조건을 만족하는 원통셸에 축 방향으로 자기장이 작용하고 셸의 내외부에 온도구배가 존재할 때의 운동방정식과 경계조건을 변위의 항으로 나타내면 식 (12)와 같다.

운동방정식

$$A_{11}u_{1,11} + A_{12}\left(\frac{1}{R}u_{2,12} + \frac{1}{R}u_{3,1}\right) + A_{66}\left(\frac{1}{R}u_{2,12} + \frac{1}{R^2}u_{1,22}\right) - m_1\ddot{u}_1 = 0 \tag{12a}$$

$$A_{66}\left(u_{2,11} + \frac{1}{R}u_{1,12}\right) + A_{12}\frac{1}{R}u_{1,12} + A_{22}\left(\frac{1}{R^2}u_{2,22} + \frac{1}{R^2}u_{3,2}\right) - m_1\ddot{u}_2 + \int_{\alpha_3} f_2 d\alpha_3 = 0 \tag{12b}$$

$$A_{55}\left(\beta_{1,1} + u_{3,11}\right) + A_{44}\left(\frac{1}{R}\beta_{2,2} + \frac{1}{R^2}u_{3,22}\right) - \frac{1}{R}A_{12}u_{1,1} - A_{22}\left(\frac{1}{R^2}u_{2,2} + \frac{1}{R^2}u_3\right) - A_{11}^{\alpha}\Theta u_{3,11} - \frac{2}{R}A_{12}^{\alpha}\Theta u_{3,12} - \frac{1}{R^2}A_{22}^{\alpha}\Theta u_{3,22} - m_1\ddot{u}_3 + \int_{\alpha_3} f_3 d\alpha_3 = 0 \tag{12c}$$

$$D_{11}\beta_{1,11} + D_{12}\frac{1}{R}\beta_{2,12} + D_{66}\left(\frac{1}{R^2}\beta_{1,22} + \frac{1}{R}\beta_{2,12}\right) - A_{55}\left(\beta_1 + u_{3,1}\right) - m_3\ddot{\beta}_1 = 0 \tag{12d}$$

$$D_{66}\left(\beta_{2,11} + \frac{1}{R}\beta_{1,12}\right) + D_{12}\frac{1}{R}\beta_{1,12} + D_{22}\frac{1}{R^2}\beta_{2,22} - A_{44}\left(\beta_2 + \frac{1}{R}u_{3,2}\right) - m_3\ddot{\beta}_2 + \int_{\alpha_3} f_2\alpha_3 d\alpha_3 = 0 \tag{12e}$$

경계조건

$$at\ \ x=0,L:$$

$$A_{11}u_{1,1} + A_{12}\left(\frac{1}{R}u_{2,2} + \frac{1}{R}u_3\right) = 0,\ \ u_2 = u_3 = 0,$$

$$D_{11}\beta_{1,1} + D_{12}\frac{1}{R}\beta_{2,2} = 0,\ \ \beta_2 = 0$$

$$at\ \ \theta=0,2\pi:$$

$$u_1 = 0,\ \ A_{12}\frac{1}{R}u_{1,1} + A_{22}\left(\frac{1}{R^2}u_{2,2} + \frac{1}{R^2}u_3\right) = 0,$$

$$u_3 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \ D_{12}\frac{1}{R}\beta_{1,1} + D_{22}\frac{1}{R^2}\beta_{2,2} = 0$$

위 경계조건을 만족하는 변위 근사함수[12]를 식 (13)과 같이 선택한다.

$$u_1(x,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\alpha_m x\sin\beta_n\theta\cdot q(t) \tag{13a}$$

$$u_2(x,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_m x\cos\beta_n\theta\cdot q(t) \tag{13b}$$

$$u_3(x,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_m x\sin\beta_n\theta\cdot q(t) \tag{13c}$$

$$\beta_1(x,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\alpha_m x\sin\beta_n\theta\cdot q(t) \tag{13d}$$

$$\beta_2(x,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sin\alpha_m x\cos\beta_n\theta\cdot q(t) \tag{13e}$$

여기서 $\alpha_m = \frac{m\pi}{L}$, $\beta_n = n$ 는 각각 복합재 원통셸의 축방향과 원주방향의 모드형상의 차수를 의미한다. 확장된 Galerkin 방법을 사용하여 식 (13)을 식 (7)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 얻는다.

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}}(t)+[\mathbf{C}]\dot{\mathbf{q}}(t)+[\mathbf{K}]\mathbf{q}(t)=0 \tag{14}$$

식 (14)는 감쇠항을 포함하는 운동방정식으로서, 이 식을 아래와 같은 상태방정식으로 변환한다.

$$[\mathbf{M}]^{*}\dot{\mathbf{x}}(t)+[\mathbf{K}]^{*}\mathbf{x}(t)=0 \tag{15}$$

여기서, $[\mathbf{M}]^{*}=\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{K}\end{bmatrix}$, $[\mathbf{K}]^{*}=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & \mathbf{K}\\ \boldsymbol{K} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$, $\mathbf{x}=\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{q}}\\ \mathbf{q}\end{Bmatrix}$, $[\mathbf{M}]^{*}$, $[\mathbf{K}]^{*}$는 $2n\times 2n$ 대칭행렬이고, x(t)는 2n 상태벡터(state vector)이다. $[\mathbf{M}],[\mathbf{C}],[\mathbf{K}]$ 행렬의 요소는 부록에 수록하였다. 여기서, n=5×M×N이고, M은 축 방향 모드 수를 나타내고 N은 원주 방향 모드 수를 나타낸다.

식 (15)의 해는 $\mathrm{x}(\mathrm{t})=\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{x}$의 형태를 가지며, 이를 식 (15)에 대입하여 아래와 같은 고유치 문제를 유도한다.

$$\lambda[\mathbf{M}]^{*}\mathbf{x}+[\mathbf{K}]^{*}\mathbf{x}=0 \tag{16}$$

여기서, λ는 복소수 고유치로 $\lambda_r=\sigma_r\pm i\omega_{dr}$으로 표현된다. 여기서 σ_r은 시스템의 감쇠를, ω_{dr}는 감쇠 고유진동수를 의미한다. x는 모드형상을 나타내는 고유벡터이다.

식 (16)을 변형시키면 식 (17)과 같다.

$$\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x} \tag{17}$$

여기서

$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{K}^{*}=\begin{bmatrix}-\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\\ \mathbf{I} & 0\end{bmatrix}$$

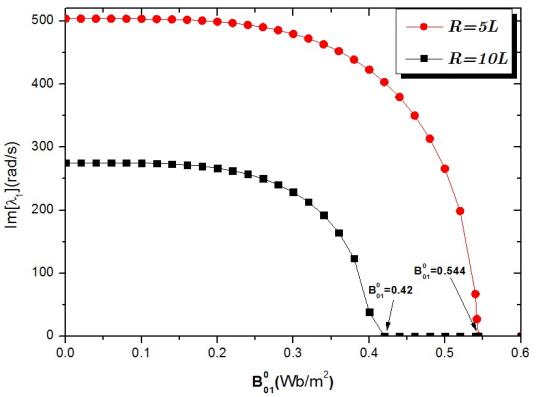
3. 수치해석 및 고찰

수치해석에서 사용된 복합재료의 물성치는 다음과 같다.

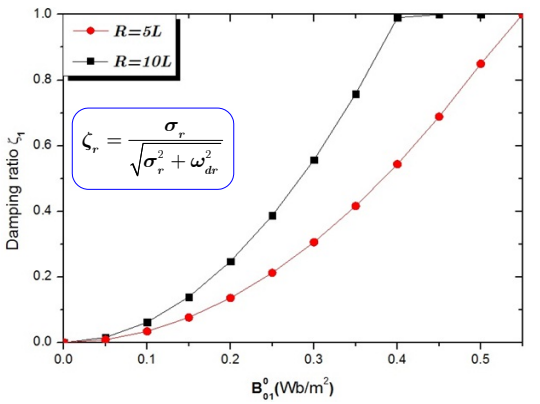
$$\mathrm{E}_1=25\mathrm{E}_0,\ \mathrm{G}_{12}=\mathrm{G}_{13}=0.5\mathrm{E}_0,\ \mathrm{G}_{23}=0.2\mathrm{E}_0,$$
$$\mathrm{E}_3=\mathrm{E}_2,\ \nu_{12}=\nu_{13}=0.25,\ \nu_{23}=0.01,\ \rho=1528.15\mathrm{kg/m}^3$$
$$\alpha_1/\alpha_0=0.1,\ \alpha_2/\alpha_0=2,\ \alpha_3/\alpha_0=1,$$
$$\mathrm{E}_0=5.17\times10^9\ \mathrm{N/m}^2,\ \alpha_0=10^{-3},\ \mathrm{g}_0=10^8\ \mathrm{S/m}^3$$

Table 1 Comparison of natural frequencies(rad/s) with Reference (13), $[0^\circ\ 90^\circ\ 90^\circ\ 0^\circ]$

Present	Reference[reddy]	Difference(%)
Case 1(R=5L)		0.39 %
20.2803	20.361	
Case 2(R=10L)		0.4 %
16.701	16.634	



(a) Fundamental natural frequency, Im $[\lambda_1]$



(b) First damping ratio, ζ_1

Fig. 2 Variation of fundamental natural frequency and damping ratio with $\boldsymbol{B}_{01}^{0}$(L=100h, g_1/g_0= g_3/g_0=3.0, g_2/g_0=1.1)

Table 1은 이 연구의 수치해의 검증을 위해 일정 두께를 갖는 원통셸의 반경 대 길이의 비를 2가지 경우로 달리하여 FSDT에 기초한 자유진동해석을 수행하여 이를 참고문헌[13]의 결과와 비교한 결과 이 연구 방법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Fig. 2는 자기장의 세기 $\boldsymbol{B}_{01}^{0}$에 따른 고유진동수의

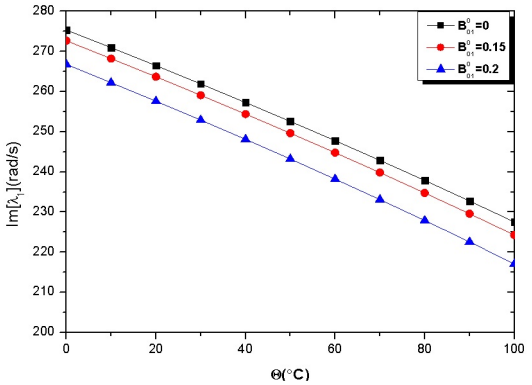


Fig. 3 Variation of fundamental natural frequency with Θ for different values of B_{01}^0

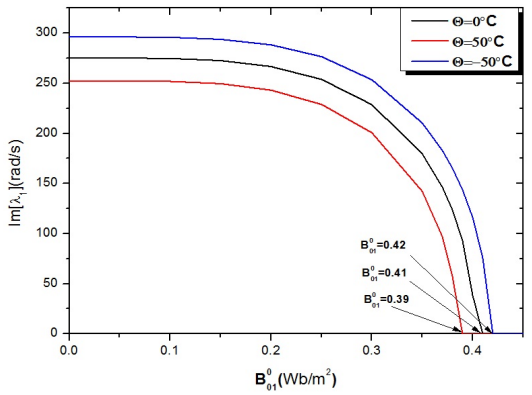


Fig. 4 Variation of fundamental natural frequency with B_{01}^0 for different values of Θ

변화를 보여주고 있다. 자기장의 세기는 감쇠를 증가시켜 고유진동수를 낮추는 역할을 하며, 이는 감쇠가 자기장의 세기의 제곱에 비례하기 때문이다(부록참조). 그리고 반경이 클수록 $(R=10L)$ 질량에 대한 강성비가 반경이 작은 셸 $(R=5L)$ 보다 작게 나타나 고유진동수가 더 낮아지는 현상을 확인할 수 있다.

Fig. 3은 서로 다른 자기장의 세기에 대하여, 온도구배 Θ의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸다. 자기장의 세기와 온도구배가 커질수록 고유진동수는 감소경향을 보이는데, 이는 온도구배에 따라 구조강성이 변화하기 때문이며 강성행렬에 온도구배의 함수인 요소가 존재하기 때문이다(부록 참조).

Fig. 4는 서로 다른 온도구배에 대하여, 자기장의 세기의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여준다.

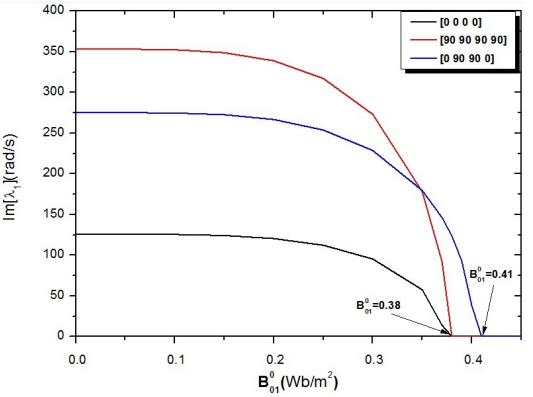


Fig. 5 Variation of fundamental natural frequency with B_{01}^0 for different stacking sequences

예상한 바와 같이 자기장의 세기는 고유진동수를 감소시키며 각 온도구배마다 고유진동수를 0으로 만드는 자기장의 세기값에 차이가 있음을 보여준다. 또한 온도구배가 작으면 고유진동수를 0으로 만드는 자기장의 세기값이 커진다.

이는 Fig. 3의 경우와 마찬가지로 자기장의 세기와 온도구배가 각각 감쇠 및 강성값을 변화시키기 때문이다.

Fig. 5는 서로 다른 적층방법과 섬유각에 대하여, 자기장의 변화에 따른 고유진동수의 변화를 보여준다. 진동수의 크기는 $\left[90°\ 90°\right]_s > \left[0°\ 90°\right]_s > \left[0°\ 0°\right]_s$ 의 적층형태 순으로 나타났고, 고유진동수를 0으로 수렴시키는 자기장의 세기는 $\left[0°\ 90°\right]_s$ 의 적층형태에서는 B_{01}^0**=0.41**에서, 동일한 섬유각으로 적층된 형태의 $\left[90°\ 90°\right]_s$, $\left[0°\ 0°\right]_s$ 에서는 B_{01}^0=0.38인 지점에서 각각 약간의 차이를 가지고 나타났다.

이는 섬유각의 변화가 구조강성 변화를 초래하며 이로서 자기장에 더 민감한 적층형태가 있으며, 동일한 각으로 적층된 구조물이 자기장 세기에 더 민감하게 반응함을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

이 연구에서는 복합재료 원통셸에 축 방향으로 자기장이 작용할 때, 전자기-열-탄성이 연성된 운동방정식과 경계조건을 Hamilton의 원리를 이용하여

유도하였다. 원통셸의 양단이 단순지지된 조건을 만족하는 근사함수를 이용하여 고유치문제를 유도하고 자기장의 세기와 온도구배, 그리고 형상, 크기에 따른 복합재료 원통셸의 자유진동특성을 고찰하였다. 이 연구를 통하여 외부에서 가해진 자기장이 구조물에 감쇠(damping)를 창출하는 효과를 가져오며 그 크기는 적층방법 및 섬유각에 따라 다름을 알 수 있었다. 또한 양(+)의 온도구배는 강성행렬의 감소를 초래하여 고유진동특성의 변화, 즉 고유진동수의 감소를 가져온다. 반대로 음(-)의 온도구배는 강성의 증가를 가져오며 따라서 고유진동수의 증가가 관찰되었다. 이러한 변화 역시 적층방법 및 섬유각의 함수로 나타남을 알 수 있었다. 또한, 고유진동수가 선형적으로 감소되는 온도구배 영향보다 포물선으로 어떤 지점에서 급격히 감소하여 0으로 수렴시키는 자기장 세기가 복합재료 원통셸 구조물 설계에 더 민감한 변수임을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 2011년도 교육과학기술부(한국연구재단)의 지원을 받아 수행된 일반연구자 지원사업(기본연구)임(20110027000).

참 고 문 헌

(1) Arnold, R. N. and Warburton, G. B., 2011, Flexural Vibrations of the Walls of Thin Cylindrical Shells Having Freely Supported Ends, Proceedings of the Royal Society London, A197, pp. 238~256.

(2) Leissa, A. W., 1973, Vibration of Shells, NASA SP-288.

(3) Chung, H., 1981, Free Vibration of Circular Cylindrical Shells, Journal of Sound and Vibration, Vol. 74, No. 3, pp. 331~350.

(4) Ferreira, A. J. M., Roque, C. M. C. and Jorge, R. M. N., 2007, Natural Frequencies of FSDT Cross-ply Composite Shells by Multiquadrics, Composite Structures, Vol. 77, No. 3, pp. 296~305.

(5) Mohamad S. Q., 1999, Accurate Equations for Laminated Composite Deep Thick Shells, Solids and Structures, Vol. 36, No. 19, pp. 2917~2941.

(6) Lam, K. Y. and Wu, Q., 2000, Free Vibration of Symmetric Angle-ply Thick Laminated Composite Cylindrical Shells, Composite Part B: Engineering, Vol. 31, No. 4, pp. 345~354.

(7) Yoon, G. H., 2010, Topology Optimization Considering the Couplings of Electro-fluid-thermal-compliant Micro Actuator, KSME, Vol. 10, pp. 640~642.

(8) Kim, S. K., Lee, K. W., Moon, J. K., Choi, J. W., Kim, Y. J., Park, S. Y. and Song, O. S., 2011, Dynamic Characteristics of Composite Plate Subjected to Electromagnetic and Thermal Field, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 6, pp. 536~545.

(9) Qin, Z., 2010, Magneto-thermo-elasticity of an Electroconductive Circular Cylindrical Shell Featuring Nonlinear Deformations, International Journal of Engineering Science, Vol. 48, No. 12, pp. 1797~1810.

(10) Qin, Z. and Hasanyan, D., 2011, Fully Non-linear Magnetoelastic Interactions of a Circular Cylindrical Thin Shell Subject to Electromagnetic Fields, International Journal of Non-linear Mechanics, Vol. 46, No. 2, pp. 425~435.

(11) Tsai, Y. H. and Wu, C. P., 2008, Dynamic Responses of Functionally Graded Magneto-electro-elastic Shells with Open-circuit Surface Conditions, International Journal of Engineering Science, Vol. 46, No. 9, pp. 843~857.

(12) Reddy, J. N., 2004, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis 2nd Edition, CRC Press, New York.

(13) Reddy, J. N. and Liu, C. F., 1985, A Higher-order Shear Deformation Theory of Laminated Elastic Shells, International Journal of Engineering Science, Vol. 23, No. 3, pp. 319~330.

부 록

A.1 식(15)의 A_{ij}, D_{ij} 행렬, $A_{11}^{\alpha}, A_{12}^{\alpha}, A_{22}^{\alpha}$ 행렬 및 질량계수 m_1, m_3

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(z_{k+1} - z_k \right)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left(z_{k+1}^3 - z_k^3 \right)$$

$$A_{11}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{11}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{12}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{16}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$A_{12}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{16}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{66}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$A_{22}^{\alpha} = \sum_{k=1}^{N_L} \left[A_{12}^{(k)} \alpha_{11}^{(k)} + A_{22}^{(k)} \alpha_{22}^{(k)} + A_{26}^{(k)} \alpha_{12}^{(k)} \right]$$

$$m_1 = \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} \left(z_{k+1} - z_k \right)$$

$$m_3 = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \rho_0^{(k)} \left(z_{k+1}^3 - z_k^3 \right)$$

A.2 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \int_{\Omega} m_1 \psi_1 \psi_1^T d\Omega \qquad C_{22} = \left(B_{01}^0 \right)^2 \int_{\Omega} h \bar{g}_{33} \psi_2 \psi_2^T d\Omega$$

$$M_{22} = \int_{\Omega} m_1 \psi_2 \psi_2^T d\Omega \qquad C_{33} = \left(B_{01}^0 \right)^2 \int_{\Omega} h \bar{g}_{22} \psi_3 \psi_3^T d\Omega$$

$$M_{33} = \int_{\Omega} m_1 \psi_3 \psi_3^T d\Omega \qquad C_{55} = \left(B_{01}^0 \right)^2 \int_{\Omega} C_{33}^g \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$M_{44} = \int_{\Omega} m_3 \psi_4 \psi_4^T d\Omega$$

$$M_{55} = \int_{\Omega} m_3 \psi_5 \psi_5^T d\Omega$$

$$K_{11} = \int_{\Omega} \left(A_{11} \psi_{1,1} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R^2} A_{66} \psi_1 \psi_{1,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{12} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_{2,2}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_1 \psi_{2,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{13} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{1,1} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{21} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_{2,2} \psi_{1,1}^T - \frac{1}{R} A_{66} \psi_2 \psi_{1,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{22} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_{2,2}^T - A_{66} \psi_2 \psi_{2,11}^T \right) d\Omega$$

$$K_{23} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_{2,2} \psi_3^T \right) d\Omega$$

$$K_{31} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{12} \psi_3 \psi_{1,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{32} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_{2,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{33} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R^2} A_{22} \psi_3 \psi_3^T - A_{55} \psi_3 \psi_{3,11}^T - \frac{1}{R^2} A_{44} \psi_3 \psi_{3,22}^T \right.$$
$$+ A_{11}^{\alpha} \Theta \psi_3 \psi_{3,11}^T + \frac{2}{R} A_{12}^{\alpha} \Theta \psi_3 \psi_{3,12}^T$$
$$\left. + \frac{1}{R^2} A_{22}^{\alpha} \Theta \psi_3 \psi_{3,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{34} = -\int_{\Omega} \left(A_{55} \psi_3 \psi_{4,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{35} = -\int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{44} \psi_3 \psi_{5,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{43} = \int_{\Omega} \left(A_{55} \psi_4 \psi_{3,1}^T \right) d\Omega$$

$$K_{44} = \int_{\Omega} \left(D_{11} \psi_{4,1} \psi_{4,1}^T + A_{55} \psi_4 \psi_4^T - D_{66} \frac{1}{R^2} \psi_4 \psi_{4,22}^T \right) d\Omega$$

$$K_{45} = \int_{\Omega} \left(D_{12} \frac{1}{R} \psi_{4,1} \psi_{5,2}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_4 \psi_{5,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{53} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{R} A_{44} \psi_5 \psi_{3,2}^T \right) d\Omega$$

$$K_{54} = \int_{\Omega} \left(D_{12} \frac{1}{R} \psi_{5,2} \psi_{4,1}^T - D_{66} \frac{1}{R} \psi_5 \psi_{4,12}^T \right) d\Omega$$

$$K_{55} = \int_{\Omega} \left(D_{22} \frac{1}{R^2} \psi_{5,2} \psi_{5,2}^T + A_{44} \psi_5 \psi_5^T - D_{66} \psi_5 \psi_{5,11}^T \right) d\Omega$$

여기서

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^L dx d\theta$$