

임의 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치 추출을 위한 개선된 NDIF법 개발

Development of a Modified NDIF Method for Extracting Highly Accurate Eigenvalues of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities

강 상 옥*·윤 주 일†

S. W. Kang and J. I. Yon

(2012년 5월 16일 접수 ; 2012년 6월 11일 심사완료)

Key Words : Sub-domain Method(분할 영역법), NDIF Method(무차원 동영향 함수법), Eigenvalue(고유치), Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities(임의 형상 음향 공동)

ABSTRACT

A modified NDIF method using a sub-domain approach is introduced to extract highly accurate eigenvalues of two-dimensional, arbitrarily shaped acoustic cavities. The NDIF method, which was developed by the authors for the eigen-mode analysis of arbitrarily shaped acoustic cavities, has the feature that it yields highly accurate eigenvalues compared with other analytical methods or numerical methods(FEM and BEM). However, the NDIF method has the weak point that it can be applicable for only convex cavities. It was revealed that the solution of the NDIF method is very inaccurate or is not suitable for concave cavities. To overcome the weak point, the paper proposes the sub-domain method of dividing a concave domain into several convex domains. Finally, the validity of the proposed method is verified in two case studies, which indicate that eigenvalues obtained by the proposed method are more accurate compared to the exact method, the NDIF method, or FEM(ANSYS).

1. 서 론

임의 형상 음향 공동의 고유치를 구하는 데에 가장 일반적으로 사용되는 방법은 유한요소법⁽¹⁾ 또는 경계요소법⁽²⁾을 이용하는 것이다. 그러나 상기 방법들은 해의 정밀도가 다소 떨어지는 단점을 지니고 있다. 저자는 이러한 단점을 극복하기 위해 고정밀도 고유치 해석 기법인 NDIF법(non-dimensional dynamic influence function method)을 개발하여 임

의 형상 음향공동의 고유치 해석에 성공적으로 적용하였다⁽³⁾. 최근에는 NDIF법의 단점인 해 추출 과정의 비효율성을 극복하기 위한 방법으로 MNDIF법(modified NDIF method)을 개발하였다⁽⁴⁾.

그러나 NDIF법과 MNDIF법은 단지 볼록 형상을 가지는 임의형상 음향 공동에만 적용 가능하다는 한계를 가지고 있다. 만약 이들 두 방법이 오목 형상 음향 공동에 적용되었을 경우, 구해진 고유치들은 아주 부정확하거나 고유치 자체가 구해지지 않은 현상이 발생하게 된다.

이 논문에서는 상기 문제점을 해결하기 위해, 오목 형상 음향 공동을 여러 개의 볼록 영역으로 분할한 후, 각각의 볼록 영역에 대해 NDIF법을 적용

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과

E-mail : juilyoon@hansung.ac.kr

Tel : (02)760-8008, Fax : (02)760-4329

* 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과

하는 소위 ‘분할 영역법 기반 NDIF법’을 제안한다. 논문의 후반부에서는 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해, 두 가지 예제 연구가 수행되었다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

Fig. 1에서 실선은 강체벽(rigid wall) 경계조건을 가진 2차원 음향 공동의 경계(Γ)를 보여준다. 음향 공동의 지배방정식은 식 (1)과 같은 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)으로 나타내어진다^(3,4).

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1)$$

여기서 \mathbf{r} 은 음향 공동 내부의 한 점 P에 대한 위치벡터를 의미하고(Fig. 1 참조), $p(\mathbf{r})$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P에서의 음압(sound pressure)을 나타내며, k 는 주파수 파라미터이다. 그리고 강체벽 음향 공동의 경계 Γ 에서의 경계조건은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_\Gamma)}{\partial n} = 0, \quad (2)$$

여기서 \mathbf{r}_Γ 는 음향 공동의 경계 상의 한 점에 대한 위치벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

2.2 기존 NDIF법 설명

NDIF법에서는 Fig. 1에서와 같이 해석 대상 음향 공동의 경계 Γ 는 N개의 경계노드들로 이산화된다. 그리고 위치 벡터 \mathbf{r}_0 로 표시된 음향 공동 내부의 한

점 P에서의 음압 $p(\mathbf{r})$ 은 다음과 같이 무차원 동영향 함수들의 선형 결합으로 가정된다^(3,4).

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^N A_s J_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s|) \quad (3)$$

여기서 J_0 는 제1종 0차 베셀 함수(Bessel function)를 나타내며, A_s 는 미지 상수이다. 그리고 \mathbf{r}_s 는 음향 공동 경계에 위치한 노드 P_s 에 대한 위치벡터를 뜻한다. 참고로 식 (3)은 지배방정식 식 (1)을 정확히 만족한다.

가정된 음압 식 (3)이 음향 공동의 경계에 위치한 노드들 위에서 강체벽 경계조건을 만족하도록 하기 위해, 경계조건 식 (2)를 다음과 같이 이산화된 경계조건으로 재정의한다⁽⁶⁾.

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_i)}{\partial n_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

여기서 \mathbf{r}_i 는 경계노드 P_i 에 대한 위치벡터를 뜻하며, n_i 는 노드 P_i 에서의 법선 방향을 의미한다(Fig. 1 참조).

다음으로 가정된 음압 식 (3)을 이산 경계조건 식 (4)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있으며,

$$\sum_{s=1}^N A_s \frac{\partial}{\partial n_i} J_0(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

식 (5)에서 미분을 수행하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\sum_{s=1}^N A_s k J_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) \frac{\partial}{\partial n_i} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) = 0 \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

마지막으로 식 (6)을 정리하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(k) \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 의 i 번째 행과 s 번째 열 위치에 있는 성분은 식 (8)에 의해 주어지며. 미지 상수 벡터 \mathbf{A} 의 s 번째 성분은 A_s 이다.

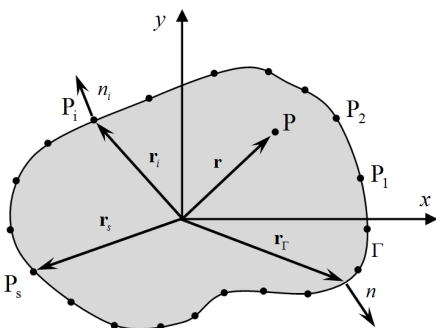


Fig. 1 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with boundary nodes P_1, P_2, \dots, P_N

$$\mathbf{SM}_{is} = kJ_1(k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|) \frac{\partial}{\partial n_i} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_s|). \quad (8)$$

최종적으로 음향 공동의 고유치는 식(7)에서 주어진 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 의 판별식의 근(root), 즉 식(9)의 근으로부터 구해질 수 있다.

$$\det[\mathbf{SM}(k)] = 0 \quad (9)$$

3. 분할 영역법 기반 NDIF법

3.1 분할된 영역에서의 시스템 행렬식 추출

해석 대상 음향 공동이 볼록 형상인 경우 식(9)는 매우 정밀한 고유치 결과를 제공하나, 오목 형상인 경우에는 고유치 결과가 매우 부정확하게 된다는 사실을 서론부에서 이미 언급하였다. 그래서 이 절에서는 Fig. 2와 같이 오목 형상의 음향 공동을 2개의 볼록 영역 D_I 와 D_{II} 로 분할한 후, 각각의 영역에 대해 기존의 NDIF법을 적용하여 시스템 행렬식을 먼저 구한다. 이를 위해 영역 D_I 의 내부 한 점에서의 음압을 식(3)과 같은 방법으로 다음과 같이 가정한다.

$$p_I(\mathbf{r}^{(I)}) = \sum_{s=1}^{N_I+N_a} A_s J_0(k|\mathbf{r}^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|), \quad (10)$$

여기서 N_I 와 N_a 는 영역 D_I 의 경계 Γ_1 과 접경 Γ_a 위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다. 그리고 $\mathbf{r}^{(I)}$ 과 $\mathbf{r}_s^{(I)}$ 는 영역 내부의 한 점과 s 번째 경계 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다. 참고로

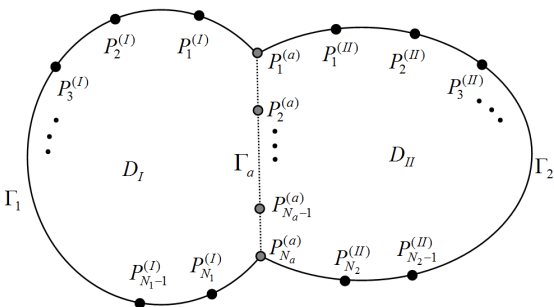


Fig. 2 Concave acoustic cavity divided with 2 convex domains

$\mathbf{r}_1^{(I)}, \mathbf{r}_2^{(I)}, \dots, \mathbf{r}_{N_I}^{(I)}$ 는 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들에 대한 위치벡터를, $\mathbf{r}_{N_I+1}^{(I)}, \mathbf{r}_{N_I+2}^{(I)}, \dots, \mathbf{r}_{N_I+N_a}^{(I)}$ 은 접경 Γ_a 위에 놓인 노드들에 대한 위치벡터를 의미한다.

식(4)와 마찬가지로 방법으로, 영역 D_I 의 경계 Γ_1 위에 놓인 노드들에 대해 이산화된 강체벽 경계조건은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(I)})}{\partial n_i^{(I)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_I \quad (11)$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(I)}$ 와 $n_i^{(I)}$ 는 i 번째 경계 노드의 위치벡터와 법선 방향을 각각 의미한다. 이제 식(10)을 식(11)에 대입하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sum_{s=1}^{N_I+N_a} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_I \quad (12)$$

다음으로, 식(12)를 경계 Γ_1 에 놓인 노드들의 위치벡터 $\mathbf{r}_1^{(I)}, \mathbf{r}_2^{(I)}, \dots, \mathbf{r}_{N_I}^{(I)}$ 와 접경 Γ_a 에 놓인 노드들의 위치벡터 $\mathbf{r}_{N_I+1}^{(I)}, \mathbf{r}_{N_I+2}^{(I)}, \dots, \mathbf{r}_{N_I+N_a}^{(I)}$ 에 대해 분리해서 다시 작성하면 식(13)과 같이 된다.

$$\sum_{s=1}^{N_I} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) + \sum_{s=N_I+1}^{N_I+N_a} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(I)}} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(I)} - \mathbf{r}_s^{(I)}|) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_I \quad (13)$$

식(13)을 행렬식의 형태로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{VM}_{11} \mathbf{A}_1 + \mathbf{VM}_{1a} \mathbf{A}_a = \mathbf{0} \quad (14)$$

마찬가지 방법으로, 영역 D_{II} 의 내부 한 점에서의 음압을 다음과 같이 가정한다.

$$p_{II}(\mathbf{r}^{(II)}) = \sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s J_0(k|\mathbf{r}^{(II)} - \mathbf{r}_s^{(II)}|), \quad (15)$$

여기서 N_2 와 N_a 는 영역 D_{II} 의 경계 Γ_2 와 접경 Γ_a

위에 놓여진 노드의 개수를 각각 나타낸다. 그리고 $\mathbf{r}^{(l)}$ 과 $\mathbf{r}_s^{(ll)}$ 는 영역 내부의 한 점과 s 번째 경계 노드에 대한 위치벡터를 각각 나타낸다.

다음으로, 영역 D_I 에 대해 수행한 일련의 과정 식(11~13)을 반복하면, 영역 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\mathbf{VM}_{22} \mathbf{B}_2 + \mathbf{VM}_{2a} \mathbf{B}_a = \mathbf{0}. \quad (16)$$

3.2 전체 시스템 행렬 구성 및 고유치 추출

식(14)와 식(16)에서 주어진 두 블록 영역 D_I 과 D_{II} 에 대한 시스템 행렬식으로부터 전체 영역에 대한 시스템 행렬식을 추출하기 위하여, 두 영역의 접경 Γ_a 에 위치한 노드에서의 연속 조건(음압 연속 및 음압 기울기 연속 조건⁽⁵⁾) 식(17)과 식(18)이 고려된다.

$$p_I(\mathbf{r}_i^{(l)}) = p_{II}(\mathbf{r}_i^{(ll)}) \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a$$

$$\frac{\partial p_I(\mathbf{r}_i^{(l)})}{\partial n_i^{(l)}} = -\frac{\partial p_{II}(\mathbf{r}_i^{(ll)})}{\partial n_i^{(ll)}} \quad (18)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a$$

먼저 식(17)에 식(10)과 식(15)를 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1+N_a} A_s J_0(k|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) = \sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s J_0(k|\mathbf{r}_i^{(ll)} - \mathbf{r}_s^{(ll)}|) \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a$$

식(19)의 양변을 식(13)과 같은 방식으로 변형한 후, 행렬식으로 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\mathbf{UM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{UM}_{aa} \mathbf{A}_a = \mathbf{UM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{UM}_{aa} \mathbf{B}_a \quad (20)$$

다음으로 식(18)에 식(10)과 식(15)를 대입하면

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{UM}_{aa} - \mathbf{UM}_{a1} \mathbf{VM}_{11}^{-1} \mathbf{VM}_{1a} & \mathbf{UM}_{a2} \mathbf{VM}_{22}^{-1} \mathbf{VM}_{2a} - \mathbf{UM}_{aa} \\ \mathbf{VM}_{aa} - \mathbf{VM}_{a1} \mathbf{VM}_{11}^{-1} \mathbf{VM}_{1a} & \mathbf{VM}_{a2} \mathbf{VM}_{22}^{-1} \mathbf{VM}_{2a} - \mathbf{VM}_{aa} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \{\mathbf{A}_a \quad \mathbf{B}_a\}^T \quad (24,25)$$

다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{s=1}^{N_1+N_a} A_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(l)}} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(l)} - \mathbf{r}_s^{(l)}|) = -\sum_{s=1}^{N_2+N_a} B_s \frac{\partial}{\partial n_i^{(ll)}} J_0(k|\mathbf{r}_i^{(ll)} - \mathbf{r}_s^{(ll)}|) \quad (21)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_a$$

식(21)의 양변을 식(13)과 같은 방식으로 변형하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{VM}_{a1} \mathbf{A}_1 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{A}_a = \mathbf{VM}_{a2} \mathbf{B}_2 + \mathbf{VM}_{aa} \mathbf{B}_a \quad (22)$$

이제 식(14), 식(16), 식(20), 식(22)를 하나의 행렬식으로 나타내면, 다음과 같은 전체 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}(k) \mathbf{C} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

여기서 최종 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 은 고유치 파라미터 k 의 함수이며, 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 와 벡터 \mathbf{C} 는 식(24, 25)와 같이 표현된다.

마지막으로 해석 대상 음향 공동의 고유치는 식(24)에서 주어진 시스템 행렬의 판별식 식(26)의 해로부터 구할 수 있다⁽³⁾.

$$\det[\mathbf{SM}(k)] = 0 \quad (26)$$

4. 검증 예제

이 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해, 두 가지 형상의 음향 공동을 검증 예제로 선택하였다.

4.1 직사각형 음향 공동

먼저 엄밀해가 존재하는 직사각형 음향 공동⁽⁵⁾(가로 1.2 m, 세로 0.9 m)을 Fig. 3과 같이 같은 크기의 두 영역으로 분할한 후, 총 23개의 노드를 경계 및 접경에 배치하여 해석을 수행하였다. 그 결과는

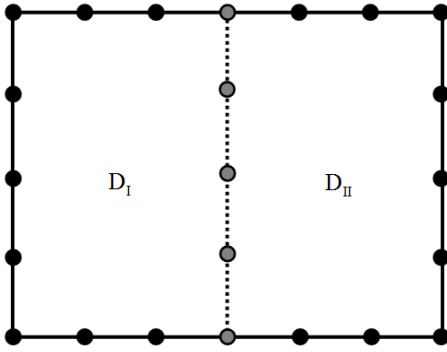


Fig. 3 Rectangular cavity divided with 2 domains

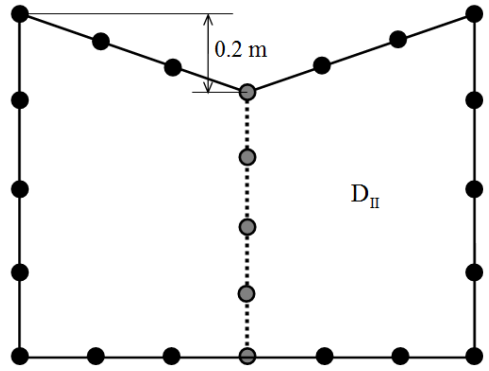


Fig. 4 Arbitrarily shaped, concave cavity divided with 2 convex domains

Table 1 Eigenvalues of the rectangular cavity by the proposed method, the exact method, and FEM(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by the exact method)

	Proposed method (23 nodes)	Exact solution ⁽⁵⁾	FEM(ANSYS) (2500 nodes)
1	2.618 (0.00)	2.618	2.618 (0.00)
2	3.491 (0.00)	3.491	3.492 (0.03)
3	4.363 (0.00)	4.363	4.364 (0.02)
4	5.236 (0.00)	5.236	5.238 (0.04)
5	6.293 (0.00)	6.293	6.295(0.03)
6	6.988 (0.10)	6.981	6.989(0.11)

Table 1에 제시되었다.

Table 1에서 이 논문에서 제안된 방법(proposed method)에 의해 구해진 고유치가 엄밀해(exact solution)와 아주 잘 일치함을 확인할 수 있다. 첫 번째부터 다섯 번째 고유치까지는 엄밀해와 오차 없이 완전히 일치함을 확인할 수 있으며, 여섯 번째 고유치의 경우 0.1% 정도의 오차로 매우 작음을 확인할 수 있다. 이 오차 크기는 노드 수를 증가시킬 경우 오차가 더욱 더 작아짐을 확인하였다. 반면에, 2500개의 많은 노드를 사용한 FEM(ANSYS) 해석 결과는 제안된 방법에 비해 더 큰 오차를 가짐을 확인할 수 있다. 결과적으로 이 논문에서 제안된 방법은 FEM에 비해 적은 노드(적은 수치 해석 계산량)를 사용함에도 불구하고 엄밀해와 거의 오차가 없는 매우 정밀한 고유치 해석 결과를 제공한다고 결론지을 수 있다.

4.2 임의의 형상 음향 공동

이 예제에서는 Fig. 4와 같은 오목 형상을 가진 임의의 형상 음향 공동을 총 23개의 노드로 이산화한 후 이 논문에서 제안한 방법을 적용하였다. 참고로 이 오목 음향 공동의 밑변의 길이는 1.2 m이며 높이는 0.9 m이다.

Table 2는 이 논문에서 제안된 방법(proposed method)과 FEM(ANSYS)에 의해 구해진 고유치 결과들을 보여주며, 고유치 바로 아래에 제시된 괄호 안의 값들은 2806개의 노드를 사용한 FEM 해석 결과에 대한 오차를 의미한다. 제안된 방법에 의해 구해진 고유치들을 FEM 결과와 비교해볼 때 1% 이내의 적은 오차를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 추가적으로, Table 2는 기존의 NDIF법(NDIF method)을 적용해서 구한 고유치 결과도 보여준다. 이들 고유치 결과들을 FEM 해석 결과와 비교해보면, 아주 큰 오차가 발생함을 확인할 수 있으며, 심지어 여섯 번째 고유치는 추출되지 않음을 확인할 수 있다.

Table 2에서의 고유치 결과 비교에서 확인한 바와 같이, 제안된 방법은 기존의 NDIF법이 오목 형상에 대해 부정확한 고유치 결과를 제공하는 단점을 극복할 수 있음은 물론이고, FEM 해석에 비해 적은 노드(적은 수치 해석 계산량)를 사용함에도 불구하고 아주 근사한 결과를 제공한다고 말할 수 있을 것이다.

참고로 Table 2의 해석 결과를 얻기 위하여 사용된 컴퓨터의 CPU 속도는 2.8GHz(인텔 코어 i7)이다. 그리고 2806개 노드를 가진 경우에 대한 FEM 해석 시간은 약 1.8초 정도가 소요되었으며, 23노드를 가진 경우에 대한 제안된 방법의 해석 시간은

Table 2 Eigenvalues of the arbitrarily shaped cavity by the proposed method, FEM, and the NDIF method(parenthesized values denote errors(%) with respect to the values by FEM with 2806 nodes)

	Proposed method (23 nodes)	FEM(ANSYS)			NDIF method (20 nodes)
		2806 nodes	1299 nodes	573 nodes	
1	2.480 (0.98)	2.456	2.457	2.457	2.372 (3.42)
2	3.828 (0.73)	3.856	3.857	3.860	3.553 (7.86)
3	4.427 (0.20)	4.418	4.419	4.421	4.814 (8.96)
4	5.297 (0.63)	5.264	5.267	5.273	4.981 (5.38)
5	6.460 (0.09)	6.454	6.458	6.466	6.570 (1.80)
6	7.548 (0.11)	7.556	7.564	7.582	None (none)

약 2분 10초 정도가 소요되었다.

5. 결 론

이 논문에서는 NDIF법을 응용/확장하여 2차원 입의 형상 오목 음향 공동의 고정밀도 고유치를 정확하게 구할 수 있는 방법을 제안하였다. 제안된 방법은 기존 NDIF법의 단점을 성공적으로 극복하면서 FEM 해석 결과에 비해 매우 정확한 고유치를 제공함이 두 가지 검증 예제를 통해 확인되었다.

이 연구에서 제안된 ‘분할 영역법 기반 NDIF법’에 대한 기본 연구 결과를 바탕으로 하여, 향후 분할 영역의 개수가 3개 이상인 경우에 대한 추가적인 이론 정립 및 다양한 형상을 가진 오목 공동에

대한 예제 연구를 수행할 예정이다.

후 기

이 연구는 한성대학교 연구 장려금 지원과제임.

참 고 문 헌

- (1) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.
- (2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.
- (3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.
- (4) Kang, S. W. and Yon, J. I., 2011, Development of an Improved NDIF Method for Efficiently Extracting Eigenvalues and Eigenmodes of Arbitrarily Shaped Acoustic Cavities, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 21, No. 10, pp. 960~966.
- (5) Blevins, R. D., 1979, Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, New York: Litton Education Publishing.
- (6) Meirovitch, L., 1967, Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Publishing, New York.