선형시변 발진기 위상잡음 이론의 전력 보존성의 증명

전만영*

Analytical Proof of Conservation of Power in the LTV Phase Noise Theory for Noisy Oscillators

Man-Young Jeon*

요 약

본 연구에서는 선형시변 발진기 위상잡음 이론에 있어서 전력 스펙트럼 밀도식의 일반화된 형태를 유도한다. 유도된 전력 스펙트럼 밀도식을 바탕으로 선형시변 발진기 위상잡음 이론은 발진 신호의 전력 보존성을 예측할 수 있음을 본 연구에서 증명한다. 게다가, 유도된 전력 스펙트럼 밀도식은 선형시변 발진기 위상잡음 이론이 기본 주파수와 그 하모닉을 포함하는 전 주파수 영역에 걸친 전력 스펙트럼의 특성을 설명 할 수 있게 한다.

ABSTRACT

This study derives a generalized PSD formula in the LTV phase noise theory for noisy oscillators. The derived formula analytically proves that the LTV phase noise theory can predict the conservation of the power in the noisy oscillation signals. Additionally, the derived formula allows the theory to account for the behavior of the power spectrum over the entire frequency range including the regions around higher harmonics as well as fundamental frequency.

키워드

Conservation of Power in Oscillators, Phase Noise, PSD of Oscillation Signals, Noisy Oscillators
발진기 전력 보존, 위상잡음 , 발진신호 전력 스펙트럼 밀도, 잡음 교란된 발진기

Ⅰ. 서 론

지금까지 발진기의 위상잡음에 관하여 가장 널리 알려진 두 이론은 참고문헌 [1]-[4]와 [5]-[9]에서 제시되고 추가 연구된 두 이론이다. 참고문헌 [1]-[4]는 선형시변(LTV: Linear Time Varying) 개념에 기초하여 Hajimiri와 그 공동 연구자에 의해 제시된 선형시변 발진기 위상잡음 이론으로서 이론의 전개과정이 복잡하지 않으며 발진 주파수에서 다소 유리된 주파수에서 실용적으로 사용하기에 충분한 정확성을 나타내는 위상잡음 공식을 제공하기 때문에 발진기 설계자들 사이에 널리 알려진 이론이다. 한편 Demir와 그 공동 연구자들에 의해서 제시된 참고문헌 [5]-[9]의 통일 위상잡음 이론은 위상잡음 계산에 필요한 Floquet 고유벡터를 구하는 과정이 복잡하나 발진 주파수와 그것의 하모닉을 포함하는 전 주파수 영역에 걸친 위상잡음 특성을 하나의 간결한 위상잡음 공식에 의해 정확하게 설명 할 수 있다. 통일 위상잡음 이

* 동양대학교 정보통신공학과(myjeon@dyu.ac.kr)
접수일자 : 2012. 06. 29 심사(수정)일자 : 2012. 07. 26 게재확정일자 : 2012. 08. 09

론은 다수의 잡음원에 발생하는 위상천이를 표현하는 확률과정 미분 방정식에 Fokker-Planck 방정식을 적용하여 위상천이의 특성함수의 시간에 관한 미분식을 구한다, 이 방정식에 위상 천이의 특성함수를 대입하여 잡음 변조 매트릭스와 Floquet 고유벡터의 곱의 내적의 주기 평균인 상수 c와 위상천이의 앙상블 평균 m을 구한다. 이 c와 m을 이용하여 시스템의 상태변수의 자기상관(autocorrelation)을 구한다음 이를 Fourier 변환하면 통일 위상잡음 이론의 최종 목표인 위상잡음 공식이 얻어진다. 이 이론에 의해 밝혀진 중요한 사실 중의 하나는 잡음에 의해 교란을 받지 않는 이상적 발진 신호의 전력과 잡음에 의해 교란된 실재 발진 신호의 전력사이에는 전력 보존성이 존재한다는 것이다. 즉, 잡음에 의해 교란된 발진 신호의 전력과 교란을 받지 않은 순수 발진 신호의 전력은 동일하다는 사실이다. 그러나 선형시변 위상잡음 이론은 상기 전력 보존성을 설명할 수 없으며 이것이 이론의 단점으로 지적되고 있다[5]. 또한 선형시변 위상잡음 이론은 기본 주파수에서 전력 스펙트럼 밀도가 무한대가 되며 하모닉에서 전력 스펙트럼 밀도를 예측할 수 없다.

본 연구에서는 선형시변 위상잡음 이론을 기초로 하여 전력 스펙트럼 밀도(PSD: Power Spectral Density)식을 참고문헌[1]보다 일반화 하였다. 일반화된 PSD식을 전 주파수 영역에 걸쳐 적분함으로써 선형시변 위상잡음 이론 역시 발진기의 전력 보존성을 설명할 수 있고 유도된 PSD는 기본 주파수와 그 하모닉에서 전력 스펙트럼의 Lorentzian 특성을 나타냄을 알 수 있다. 즉, 본 연구를 통해 선형 시변 위상잡음 이론도 본질적으로 완전한 이론임을 알 수 있다.

II. 전력 보존성의 증명

외부 잡음에 의하여 교란된 발진기의 발진 신호 x(t)는 식(1)과 같이 표현된다.

$$x(t)=x\left[\omega_o t+\phi(t)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn(\omega_o t+\phi(t))}. \tag{1}$$

여기서 $\phi(t)$는 잡음에 의해 교란된 발진 신호의 위상을 나타낸다. 백색 가우시안 잡음원에 대하여 $x(t)$와 $x(t+\tau)$는 상호 독립이므로 $x(t)$의 시간평균 자기상관 함수는

$$R(t,\tau)=\overline{x(t)x^*(t+\tau)}=\overline{x(t)}\,\overline{x^*(t+\tau)} \tag{2}$$

이다. 식(1)을 식(2)에 대입하면 자기상관 함수는

$$R(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m X_n^* e^{-jn\omega_o\tau} \times \overline{e^{j(m-n)\omega_o t}}\,\overline{e^{j[m\phi(t)-n\phi(t+\tau)]}} \tag{3}$$

이다. $e^{j(m-n)\omega_o t}$는 $m\neq n$에 대하여 주기 $T=2\pi/\omega_o$인 주기함수임으로 $\overline{e^{j(m-n)\omega_o t}}=\delta_{m,n}$이 된다. 따라서 식(3)은

$$R(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|X_m|^2 e^{-jm\omega_o\tau}\,\overline{e^{jm\varphi(t,\tau)}} \tag{4}$$

이 된다. 여기서 $\varphi(t,\tau)$는 $\varphi(t,\tau)\equiv\phi(t)-\phi(t+\tau)$로 정의된다. $e^{jm\varphi(t,\tau)}$을 에르고딕 확률과정(ergodic process)으로 가정하면 식(4)는 앙상블 평균의 관점에서

$$R(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|X_m|^2 e^{-jm\omega_o\tau}\langle e^{jm\varphi(t,\tau)}\rangle \tag{5}$$

로 다시 쓸 수 있다. 여기서 $\langle e^{jm\varphi(t,\tau)}\rangle$는 $\varphi(t,\tau)$에 대한 특성함수로서

$$\langle e^{jm\varphi(t,\tau)}\rangle=e^{jm\langle\varphi(t,\tau)\rangle-\frac{1}{2}m^2 Var[\varphi(t,\tau)]} \tag{6}$$

으로 주어진다. 식(6)을 식(5)에 대입하면

$$R(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|X_m|^2 e^{-jm\omega_o\tau} \times e^{jm\langle\varphi(t,\tau)\rangle-\frac{1}{2}m^2 Var[\varphi(t,\tau)]}. \tag{7}$$

참고문헌[1]에 의하면 $\phi(t)$는

$$\phi(t)=\int_0^t \frac{\Gamma(\omega_o\alpha)}{q_{\max}} i_n(\alpha)\,d\alpha \tag{8}$$

로 주어진다. 여기서 $\Gamma(\bullet)$, $q_{\max}$, 그리고 $i_n(\tau)$는 유효 임펄스 민감도 함수, 공진기의 커패시터에 충전되는 최대전하량, 잡음전류를 각각 나타낸다. $\langle i_n(t)\rangle=0$ 이므로 식(8)의 양변에 앙상블 평균을 취하면 $\langle\phi(t)\rangle=0$임을 알 수 있다. 같은 이유에 의해 $\langle\phi(t+\tau)\rangle=0$임도 알 수 있다. 이 두 가지 사실을 이용하면 다음 식(9)를 얻으며 식(9)와 $\varphi(t,\tau)$ 의 정의식을 사용하면 식(10)를 얻는다.

$$\langle\varphi(t,\tau)\rangle=\langle\phi(t)\rangle-\langle\phi(t+\tau)\rangle=0 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}Var[\varphi(t,\tau)]&=\langle[\varphi(t,\tau)-\langle\varphi(t,\tau)\rangle]^2\rangle\\&=\langle\varphi(t,\tau)^2\rangle=\langle[\phi(t)-\phi(t+\tau)]^2\rangle\end{aligned} \tag{10}$$

식(4)를 사용하면

$$\phi(t)=\int_0^t\frac{\Gamma(\omega_o\alpha)}{q_{\max}}i_n(\alpha)d\alpha \tag{11}$$

이고,

$$\phi(t+\tau)=\int_0^{t+\tau}\frac{\Gamma(\omega_o\alpha)}{q_{\max}}i_n(\alpha)d\alpha \tag{12}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\langle\phi^2(t)\rangle=&\frac{1}{q_{\max}^2}\iint_0^t\langle\Gamma(\omega_o\alpha)\Gamma(\omega_o\beta)\rangle\\&\times\langle i_n(\alpha)i_n(\beta)\rangle d\alpha d\beta\end{aligned} \tag{13}$$

이고

$$\begin{aligned}\langle\phi^2(t+\tau)\rangle=&\frac{1}{q_{\max}^2}\iint_0^{t+\tau}<\Gamma(\omega_o\alpha)\\&\times\Gamma(\omega_o\beta)>\langle i_n(\alpha)i_n(\beta)\rangle d\alpha d\beta\end{aligned} \tag{14}$$

이며

$$\begin{aligned}\langle\phi(t)\phi(t+\tau)\rangle=&\frac{1}{q_{\max}^2}\int_0^{t+\tau}\int_0^t<\Gamma(\omega_o\alpha)\\&\times\Gamma(\omega_o\beta)>\langle i_n(\alpha)i_n(\beta)\rangle d\alpha d\beta\end{aligned} \tag{14}$$

이다.

$\langle i_n(\alpha)i_n(\beta)\rangle=\left(\overline{i_n^2}/2\Delta f\right)\delta(\alpha-\beta)$ 이라는 사실과 식(13), (14), (15)의 결과를 식(10)에 대입하면

$$Var[\phi(t,\tau)]=\left(\Gamma_{eff}^2/2q_{\max}^2\right)/\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)|\tau| \tag{15}$$

를 얻는다. 식(9)와 (15)를 식(7)에 대입하면

$$R(t,\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|X_m|^2e^{-jm\omega_o\tau}e^{-m^2D|\tau|}. \tag{16}$$

여기서 D는 $D\equiv\left(\Gamma_{eff}^2/4q_{\max}^2\right)/\left(\overline{i_n^2}/\Delta f\right)$로 정의되며 발진 신호 위상 ϕ(t)의 시간에 따른 확산의 정도를 나타내는 확산계수로서 참고문헌[10]에서 가상 감쇄율(virtual damping rate) 개념을 이용하여 유도한 결과와 정확히 일치한다. 식(16)의 양변에 퓨리에 변환을 취하면 발진 신호 x(t)의 전력스펙트럼 밀도식은

$$\begin{aligned}S(\omega)=&\sum_{\substack{m=-\infty\\m\neq0}}^{\infty}|X_m|^2\frac{2m^2D}{m^4D^2+(\omega+m\omega_o)^2}\\&+2\pi|X_0|^2\delta(\omega)\end{aligned} \tag{17}$$

로 얻을 수 있다. 식(17)는 선형 시변 위상잡음 이론에 의해 일반화된 전력 스펙트럼 밀도식으로서 기본 발진 주파수와 그 하모닉뿐 아니라 기본 발진 주파수와 그 하모닉 주변에서의 $x(t)$의 전력스펙트럼을 나타내는 식으로서 선형시변 위상잡음 이론을 더 상세히 설명한 참고문헌[3]의 식(B.17)으로부터 얻어지는 전력스펙트럼 밀도식보다 일반화되고 확장된 식이다. 특히 기본 주파수와 그 하모닉 주변에서의 전력 스펙트럼 밀도는 Lorentzian 형태이고 기본 주파수와 그 하모닉에서 전력밀도가 유한한 값이 되게 한다. 이는 기본 주파수 또는 그 하모닉에서 전력밀도가 무한한 값으로 발산하여 이론이 붕괴되는 참고문헌 [1]과 [4]의 이론과는 대비되는 사실이다. 따라서 식 (17)은 선형 시변 위상잡음 이론을 완성시키는 식이라 할 수 있다.

식(17)을 전 주파수 영역에 걸쳐 적분하면 $x(t)$의 전력은 아래의 식(18)과 같이 얻어진다.

$$P=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)d\omega=\sum_{m=-\infty}^{\infty}|X_m| \tag{18}$$

그런데 식(1)로부터 이상적 발진 신호는

$$x_{idl}(t)=x_{idl}(\omega_o t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_o t} \tag{19}$$

로 표현 할 수 있으며 이상적 발진 신호의 전력은

$$P_{idl}=\frac{1}{T}\int_0^T x_{idl}(t)x_{idl}^*(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|X_n| \tag{20}$$

이다. 따라서 잡음에 의해 교란된 발진 신호의 전력(식(18))은 잡음에 의해 교란되지 않는 이상적 발진 신호의 전력(식(20))과 같음을 알 수 있다. 이는 선형시변 위상잡음 이론에 기초하여 본 연구에서 일반화한 전력 스펙트럼 밀도식 (17)도 참고문헌[5]의 통일 위상잡음 이론처럼 발진 신호의 전력 보존성을 나타냄을 의미한다.[11][12][13]

III. 결 론

본 연구에서는 선형시변 발진기 위상잡음 이론에 근거하여 전력 스펙트럼 밀도식의 일반화된 형태를 유도하였다. 유도된 전력 스펙트럼 밀도식에 의해 선형시변 발진기 위상잡음 이론 역시 발진 신호의 전력 보존성을 예견할 수 있음을 본 연구에서 증명하였다. 또한 유도된 전력 스펙트럼 밀도식 으로부터 참고문헌 [1]의 선형시변 발진기 위상잡음 이론도 기본 주파수와 그 하모닉을 포함하는 전 주파수 영역에 걸쳐서 전력 스펙트럼의 특성을 예측 할 수 있음을 알 수 있다.

참고 문헌

[1] A. Hajimiri and T. H. Lee, “A general theory of phase noise in electrical oscillators,” IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 33, No. 2, pp. 179-194, Feb. 1998.

[2] A. Hajimiri, S. Limotyrakis, and T. H. Lee, "Jitter and phase noise in ring oscillators," IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 34, No. 6, pp. 790-804, June 1999.

[3] A. Hajimiri and T. H. Lee, The Design of Low Noise Oscillators, Boston, MA: Kluwer Academic, 1999.

[4] T. H. Lee and A. Hajimiri, "Oscillator phase noise: a tutorial," IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 35, No. 3, pp. 326-336, March, 2000.

[5] P. Andreani, X. Wang, L. Vandi, and A. Fard, "A study of phase noise in Colpitts and LC-tank CMOS oscillators," IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 40, No. 5, May 2005.

[6] A. Demir, Analysis and simulation of noise in nonlinear electronic circuits and systems, Ph. D. Thesis, University of California, Berkeley, May 1997.

[7] A. Demir and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, Analysis and simulation of noise in nonolinear electric circuits and systems, Kluwer Academic Publications, 1998.

[8] A. Demir, "Phase noise in oscillators," Proc. of Int. Conf. on CAD, pp. 170-177, Nov. 1998.

[9] A. Demir, A. Mehrotra, and J. Roychowdhury, "Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization," Proc. of ACM/IEEE Design Automation Conf., pp. 26-31, June 1998.

[10] A. Demir et al., “Phase noise in oscillators: a unifying theory and numerical methods for characterization,” IEEE Trans. Circuits Syst.-I, Vol. 47, pp. 655-674, May, 2000.

[11] A. Demir, "Floquet theory and non-linear perturbation analisis for oscillators with differential-algebraic equations," Int. J. Circ. Theor. Appl., Vol. 28, pp, 163-185, 2000.

[12] A. Demir, "Phase noise and timing jitters in oscillators with colored-noise sources," IEEE Trans. on Circuits and Sistems-I: fudamental theory and applications, Vol. 49, No. 12, Dec. 2002.

[13] A. Demir and J. Roychowdhury, "A reliable and efficient procedure for oscillator PPV computation with phase noise macromodelinf applications," IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 22, No. 2, pp. 188-197, Feb., 2003.

[14] A. Demir and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation and modeling of phase noise in open-loop oscillators," Proc. of IEEE Custom Integrated Circuits Conf., pp. 453-456, 1996.

[15] A. Demir, "Oscillator noise analysis," Proc. of Int. Conf. on noise and fluctuations 2005,

pp. 499-504, 2005.
[16] D. Ham and A. Hajimiri, "Virtual damping and Einstein relation in oscillators," IEEE J. Solid-State Circuits, Vol. 38, No.3, pp. 407-418, March, 2003.

저자 소개

전만영(Man-Young Jeon)

1987년 2월 경북대학교 전자공학과 졸업 (공학사)
1991년 2월 경북대학교 대학원 전자공학과 졸업(공학석사)
2000년 2월 포스텍 대학원 전자및전기공학과 졸업 (공학박사)
동양대학교 정보통신공학부 부교수
1987. 2.~1997. 3. 한국전자통신연구원(ETRI) 선임연구원, 삼성전자 주임연구원
2000. 6.~2001. 9. 삼성종합기술원 수석연구원
※ 관심분야 : 발진기 위상잡음 이론, RFIC