한국학교수학회논문집 제 15 권, 제 2 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 15, Number 2, 299-316, June 2012

# 고등학생의 함수의 모양 그리기와 해석하는 능력 분석

안종수[1)]

본 연구에서는 이차함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수와 같이 고등학교 수학 교육과정에서 이미 배운 기본적인 함수들의 모양 그리기와 해석하는 능력을 분석하였다. 00 고등학교의 인문반 2개반(64명)과 자연반 2개반(64명)을 대상으로 조사한 결과 주어진 함수들의 모양을 그리지 못한 학생이 50% 이상이었다. 또한 함수가 지닌 중요한 성질인 정의역, 치역, 최솟값, 최댓값, 주기 등에 대한 해석하는 능력이 부족한 것으로 나타났다.

본 연구에서는 함수단원이 고등학교 수학이나 대학 교양 수학에서 기초가 되는 내용이므로 함수의 개념과 함수의 모양 그리기, 함수의 모양 오류 데이터 분석 등의 수학학습에 관하여 연구하였다.

주요용어 : 다항함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수

## I. 서론

수학은 수량과 관련된 수학적 사실, 관계, 규칙을 다루며, 공간에서 일어나는 다양한 학문에 대해 연구하는 분야로서 수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며, 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하는 능력을 기르고, 여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과이다(교육과학기술부, 2009). 고등학교에서 인문반 학생들은 수학, 수학 I, 미적분과 통계 기본을 이수하고, 자연반 학생들은 심화 선택 과목에서 수학 I, 수학 Ⅱ , 적분과 통계 및 기하와 벡터 과목을 선택하여 이수를 한다. 현재 우리나라에서는 고등학교에서 미적분의 기본만 배우고 자연계열에 입학을 할 수 있어서 고등학교 수학과 대학 교양 수학과의 연계성에 많은 문제점을 가지고 있는 점이 사실이다. 이러한 연계성의 문제는 현재 해결해야 할 시급한 사안이다.

고등학교 수학과 대학 교양 수학과의 연계성의 단절 문제의 원인으로는 현행 대학 입시와 관련된 문제, 고등학교에서 이수한 수학 과목과 대양 교양수학 교재의 내용적 측면, 고등학교 수학과 대학 교양수학의 교수･학습 방법적 측면 등을 들 수 있다. 이 단절 문제에 대한 해결 방안은 여러 가지가 있을 수 있지만 우선적으로 입시 문제를 수정하고 보완 하여 연계성을 갖도록 하는 것이 중요하다고 보아진다.

자연계열의 학부 교육과정에서는 대학 신입생들이 1학년 1학기부터 대학 교양수학을 수강하도록 되어 있다. 이러한 교육과정의 편성은 자연계열의 신입생들이 교양수학의 내용을 배

1) 부산대학교 대학원 (jsan63@hanmail.net)

우고 이를 전공영역에 응용할 수 있는 능력을 기르기 위한 것이다. 교양수학에서 학습한 내용을 전공영역에 활용정도를 높이기 위해서는 각 전공과 관련되도록 교재개발을 할 필요성이 있다. 이를 위해서는 먼저 대학생들이 고등학교에서 배운 학습에서 오류를 분석하는 것이 매우 중요하다.

NCTM(2000)에서는 함수학습의 목표로, 주어진 상황을 해석하여 대수 방정식의 형식을 넘어 질적 정보를 양화하는 것에서부터 그래프적 방법에 이르는 수학화 과정을 다양하고 유창하게 표현 할 수 있어야 한다고 강조한다. 이는 주변의 함수적 현상을 해석하고 다양하게 표현하여 모델을 만들고 문제 해결 과정에서 이를 적용할 수 있도록 지도해야 함을 의미한다. 특히 함수는 해석학 이론에 기초를 이루는 영역으로 그 중요성에 대한 인식은 높아지고 있으며 대부분의 학생들은 함수를 어려워하고 공식을 통한 기계적 계산으로 형식주의에 빠져 있으며 문제해결 과정에서 많은 오류를 범하고 있음을 지적하고 있다.

최근의 오류에 대한 선행연구를 단계적으로 살펴본다. 먼저 유아를 대상으로 한 것으로 황해익・고은미(2006)는 유아의 수학학습 잠재력 측정과정에서 나타난 오류 및 전략 유형을 분석하고 오류의 개선과 효과적 전략 사용에 대한 수학학습 잠재력 평가의 교수적 기능을 살펴보고자 하였다. 안성훈・김은옥・고대돈(2004)은 초등학생의 ICT 활용 학습에서의 오류에 대한 처치 방안을 연구하였다. 중학교 교육과정에서의 오류에 대한 연구로는 김용호(2001)의 일차부등식에서 문제해결 과정에 발생하는 오류 유형에 대한 분석이 있다. 고등학교 교육과정에서의 오류에 대한 연구로는 김종명・김상래(2006)의 수열의 극한과 무한급수 단원에서의 문제해결에서 발생하는 오류유형에 대한 분석연구가 있으며, 일반적인 수학교육에 대한 것으로 이대현・박배훈(2001)이 직관을 오류와 관련하여 고찰한 것이 있다.

이러한 다양한 측면에서의 오류 누적으로 인해 학생들은 그 분야에 대해 부정적인 태도를 가지게 되고 계속되는 학습 부진으로 수학에 대한 흥미를 잃게 되는 것이다. Maurer(1987)는 인지과학적인 접근을 통해 밝혀진 이론에서 학생들의 오류의 특성은 우연적이거나 실수에 의한 것이 아니라 지속적이고 체계적・규칙성이 있으며, 교사가 그것을 파악하여 지도한다면 오류를 교정하고 재학습이 가능해진다고 하였다. 이처럼 학습에서 오류는 절대적인 것이 아니라 학습자 자신의 올바른 개념형성을 위해 학생이나 교수 모두에게 피드백 할 수 있도록 하는 중요한 자료가 된다.

본 연구에서는 함수단원이 고등학교 수학이나 대학 교양 수학에서 기초가 되는 내용이므로 함수의 개념과 함수의 모양 그리기, 함수 모양 오류 데이터 분석등의 수학 학습에 관하여 연구하였다.

## II. 본론

우리 생활에서 일어나는 많은 물리적 현상이나 사회적 현상 등은 함수로 표현되고 함수를 이용하여 해결 할 수 있다. 따라서 함수는 수학의 기본개념 이상의 다양한 수단을 지니고 있다. 그렇지만 학생들은 함수는 수학 교과서에서 하나의 영역으로 구분되어 있는 단지 수학교과서의 일부분 이라고 생각하는 경우가 대부분이다. 이는 수학 교수 학습에서 단편적인 내용을 다루고 있거나, 포괄적인 내용을 다루고 있더라도 수학 점수에 얽매여 단순히 하나의 문제를 더 해결할 수 있는 능력만을 추구한 점 등이 문제점으로 생각 할 수 있다.

대학 교양 수학의 내용은 함수와 밀접한 관련이 있다. 자연계열 학생들은 교양수학을 학습하기 전에 고등학교에서 배운 함수개념과 이차함수, 유리함수, 무리함수, 지수함수, 로그함수와 삼각함수등의 모양의 개형을 그릴 수 있어야하고 그래프에 담겨진 내용이 무엇인지를 알고 있어야겠다. 그리고 대학 교양수학을 담당하고 있는 교수자가 대학 교양수학에서 대학생들이 함수 개념을 어느 정도 이해하고 있는지, 함수의 모양을 그릴 수 있는지 그리고 해석할 수 있는지를 파악하는 일은 매우 중요하다. Vinner & Dreyfus(1989)의 연구에 따르면 307명의 대학생 중에서 8%의 정도가 그래프에 대한 표현을 할 수 있는 것으로 나타났다. 함수의 그래프에 대한 연구는 많이 이루어져 왔다. Knuth(2000)의 연구에 따르면 학생들은 그래프를 해석하는 기술이 부족하고 대수와 기하 사이의 관계를 보이는데 실패하였다. 특히, 낮은 능력을 가진 학생들이 함수의 그래프를 어려워한다는 연구결과가 나와 있다(Dreyfus & Eisenberg, 1982). 국내에서 대학 수학교육에 관한 연구(김성옥, 2005)등이 있었지만 고등학교 수학에서 함수 개념과 그래프의 오류 데이터 분석에 관한 연구는 매우 더 물다. 본 연구에서는 고등학교 수학 교과서 고등학교 수학(황선욱 외, 2008)와 수학 I 교과서(우무하 외, 2010)를 분석하여 개발하였으며, 교과 전문가의 내용 타당도 검증을 거쳤다. 오류가 발생 할 수 있는 함수를 개발하기 위하여 학생들이 평소 접할 수 있는 일반화된 문제를 중심으로 선택하였으며 문항 자체 결함, 이해가 모호한 함수 등은 수정 보완하였다. 전문가의 검토를 바탕으로 개발한 함수는 고등학교 3학년에 적용되었고 학생들이 제출한 검사지를 연구자가 한데 모아서 채점한 후 분석하였다.

## 1. 연구문제

본 연구에서는 00 고등학교 3학년 인문반 2개반(64명)과 자연반 2개반(64명)을 대상으로 고등학교에서 배운 함수의 모양의 개형을 학생들이 어느 정도 이해하고 그릴 수 있는지 조사 분석 하였다.

## 2. 연구의 제한점

본 연구는 00고등학교를 대상으로 하였다. 따라서 본 연구의 결과를 전국 고등학교의 상황을 대표한다고 할 수는 없다. 하지만 현 시점에서 각 고등학교가 처하고 있는 상황은 수준의 차이가 있을 뿐 비슷한 상황에 있다고 할 수 있다.

## 3. 연구도구

연구대상에서 고등학교에서 배운 함수의 모양을 어느 정도 그릴 수 있고 그것에 담겨진 간단한 정보를 어느 정도 알고 있는지 조사하기 위하여, 고등학교 1학년 수학과 수학 I 과목에서 함수의 모양을 그리는 문제를 선정하여 13문항으로 구성 하였다. 고등학교에서 배운 이차함수, 유리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수에 대한 그래프 그리기, 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 어느 정도 구할 수 있는지, 기본적인 함수에서 평행 이동한 그래프를 어느 정도 그릴 수 있는지를 조사하기 위하여 아래와 같은 내용들로 구성하였다.

| 함수 | 형태 | 내용 |
|---|---|---|
| 이차함수 | $y=x^2-2x+2$ | 그래프 그리기, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값 |
| 유리함수 | $y=\frac{1}{x+2}$ | 그래프 그리기, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값 |
| | $y=\frac{1}{x+2}-2$ | 그래프 그리기 |
| 무리함수 | $y=\sqrt{2x}$ | 그래프 그리기, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값 |
| 지수함수 | $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=2^{x-2}$ | 그래프 그리기 |
| 로그함수 | $y=\log_2 x$, $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ | 그래프 그리기 |
| 삼각함수 | $y=\sin 2x$ | 그래프 그리기, 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값, 주기 |
| | $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ | 그래프 그리기 |

## 4. 분석

자료의 처리는 SPSSWIN 12.0 프로그램을 사용하여 빈도분석, 상관분석을 하였고 그 분석의 결과는 다음과 같다.

### 1) 이차함수에 대한 학생들의 반응

> 이차함수의 최대 최소
>
> 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 는 정의역이 실수전체의 집합일 때
>
> (1) $a>0$ 이면 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최솟값 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 를 갖고, 최댓값은 없다.
>
> (2) $a<0$ 이면 $x=-\frac{b}{2a}$ 에서 최댓값 $-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 를 갖고, 최솟값은 없다.

### (1) 이차함수 $y=x^2-2x+2$ 의 그래프 그리기

이차함수 $y=x^2-2x+2$은 $y=(x-1)^2+1$ 이므로 그 그래프는 꼭지점의 좌표가 $(1,1)$이고, 아래로 볼록한 포물선이다. 따라서 $x=1$ 에서 최솟값 1을 갖고 최댓값은 없다. 이차함수의 그래프 그리기에서 학생들의 반응을 9가지로 분류하여 보았다 (<표 4-1>). 계열별로 보면 인문반 2개반 학생(64명)중에서 20명, 자연반 2개반 학생(64명)중에서 33명이 그래프의 개형을 맞게 그린 것으로 나타났다.

전체 학생을 대상으로 보면 84명이 그래프 개형을 그린 것으로 나타났다. 그 외 반응에서는, 그래프를 하나도 그리지 않은 학생이 14명, 꼭지점이 틀린 학생이 6명, $x$축 또는 $y$축으로만 평행이동을 한 학생이 12명, $x$축과 $y$축으로 평행이동을 잘못한 학생이 1명, 그래프를 뒤집어서 그린 학생이 5명, 그래프 개형을 이차곡선과 전혀 다른 형태인 3차 곡선 등으로 그린 학생이 6명으로 나타났다.

<표 4-1> 이차함수의 그래프 그리기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 그래프를 하나도 그리지 않음 | | 10 | 4 | 14 |
| | 맞음 | 그래프를 정확히 그림 | 30 | 39 | 69 |
| | | 그래프를 맞게 그렸으나 (1, 1)을 표시 하지 않음 | 7 | 8 | 15 |
| | 오류 | 꼭지점이 틀림 | 2 | 4 | 6 |
| | | $x$축 으로만 평행이동 | 5 | 2 | 7 |
| | | $y$축 으로만 평행이동 | 3 | 2 | 5 |
| | | 그래프가 뒤집어짐 | 1 | 4 | 5 |
| | | 평행이동이 잘못됨 | 1 | 0 | 1 |
| | | 그래프의 개형이 다름 | 5 | 1 | 6 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

### (2) 이차함수 $y=x^2-2x+2$의 정의역 구하기

이차함수의 정의역 구하는 문제에서 다음과 같은 반응을 보였다(< 표 4-2>). 자연반 학생들 중에서 이차함수의 정의역을 구하는 문제에서 조건제시법으로 표시한 학생이 15명, 서술식으로 표시한 학생이 23명, $x$를 생략하고 제시한 학생이 13명으로 나타났다. 그리고 정의역을 하나도 구하지 않은 학생이 10명, 정의역을 전혀 다르게 표시한 학생이 14명이다. 이로서 24명이 정의역을 모르고 있음을 알 수 있다. 인문반 학생은 29명이 정의역을 구하지 못하였다.

<표 4-2> 이차함수의 정의역 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 정의역을 하나도 구하지 못함 | | 19 | 10 | 29 |
| | 맞음 | 정의역을 맞게 구함 | 6 | 15 | 21 |
| | | 서술식으로 표시함 | 23 | 12 | 35 |
| | | $x$를 생략 | 6 | 13 | 19 |
| | 오류 | 풀이과정이 잘못됨 | 10 | 14 | 24 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

### (3) 이차함수 $y=x^2-2x+2$ 의 치역 구하기

이차함수의 치역 구하는 문제에서 다음과 같은 반응을 보였다(< 표 4-3>). 자연반 학생들 중에서 이차함수의 치역을 구하는 문제에서 조건제시법으로 표시한 학생이 14명, 서술식으로 나타낸 학생이 12명, $y$를 생략하고 제시한 학생이 15명으로 나타났다. 그리고 그래프를 하나도 그리지 않은 학생이 10명, 치역을 전혀 다르게 표시한 학생이 13명으로 나타났다.

<표 4-3> 이차함수의 치역 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 치역을 하나도 구하지 못함 | | 16 | 10 | 26 |
| | 맞음 | 치역을 맞게 구함 | 13 | 14 | 27 |
| | | 서술식으로 표시함 | 19 | 12 | 31 |
| | | $y$를 생략 | 7 | 15 | 22 |
| | 오류 | $x$로 표시함 | 3 | 7 | 10 |
| | | 풀이과정이 잘못됨 | 2 | 6 | 8 |
| | | $y>1$과 같은 유형 | 4 | 0 | 4 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

## (4) 이차함수 $y=x^2-2x+2$ 의 최댓값, 최솟값 구하기

이차함수의 최댓값을 구한 학생이 인문반이 35명, 자연반이 39명으로 나타났다. 그리고 최솟값을 구한 학생은 인문반이 31명, 자연반이 33명으로 나타났다. 최댓값을 $\pm\infty$ 라고 응답한 학생은 인문반이 9명으로 자연반이 5명으로 나타났다.

<표 4-4> 이차함수의 최댓값 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최댓값을 하나도 구하지 않음 | | 8 | 4 | 12 |
| | 최댓값을 맞게 구함 | | 35 | 39` | 71 |
| | 오류 | 0 | 11 | 11 | 22 |
| | | $\pm\infty$ | 9 | 5 | 14 |
| | | 기타 | 1 | 5 | 6 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-5> 이차함수의 최솟값 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최솟값을 하나도 구하지 않음 | | 10 | 3 | 13 |
| | 최솟값을 맞게 구함 | | 31 | 33 | 64 |
| | 오류 | 0 | 11 | 10 | 21 |
| | | $\pm\infty$ | 9 | 5 | 14 |
| | | 기타 | 3 | 13 | 16 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

## 2) 유리함수에 대한 학생들의 반응

| |
|---|
| 유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q \quad (k\neq 0)$ 의 그래프 |
| (1) 정의역은 $\{x : x\neq p\text{인실수}\}$, 치역은 $\{y : y\neq q\text{인실수}\}$ 이다. |
| (2) 점 $(p,q)$ 에 대하여 대칭인 쌍곡선이다. |
| (3) 점근선은 두 직선 $x=p, \quad y=q$ 이다. |

### (1) 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}, \quad y=\dfrac{1}{x+2}-2$ 에 대한 그래프 그리기

자연반 학생 중에서 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 그래프 그리기에서 정확히 그린 학생이 15명 점근선의 $x$축위의 점을 표시하지 않은 학생이 9명으로 나타났다.

인문반 학생 중에서 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 의 그래프를 그린 학생이 20명으로 나타나 자연반과 인문반의 학생 간에는 많은 차이를 보이고 있다.

전체 학생을 대상으로 살펴보면 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 그래프를 맞게 그린 학생이 44명 $y=\dfrac{1}{x+2}-2$의 그래프를 맞게 그린 학생이 38명으로 나타났다 (<표 4-6>, <표 4-7>). 그리고 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 그래프 그리기는 $y=\dfrac{1}{x+2}-2$의 그래프 그리기와 강한 상관(.847)이 있는 것으로 나타난다 (<표 4-7-1>). $y=\dfrac{1}{x+2}$ 의 그래프를 그린 학생들 중 대부분이 $y$축으로 평행이동 할 수 있음을 의미하고 있다.

<표 4-6> 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 그래프를 하나도 그리지 않음 | | 25 | 16 | 41 |
| | 맞음 | 그래프를 맞게 그림 | 13 | 15 | 28 |
| | | 점근선의 $x$축 위의 점 표시하지 않음 | 7 | 9 | 16 |
| | 오류 | 점근선의 $x$축의 점 표시가 잘못됨 | 3 | 3 | 6 |
| | | $x$축으로 2만큼 평행이동 | 1 | 2 | 3 |
| | | $x$축으로 -2만큼 $y$축으로 2만큼 평행이동 | 4 | 7 | 11 |
| | | $x$축으로 2만큼 $y$축으로 -2만큼 평행이동 | 4 | 5 | 9 |
| | | 그래프 개형이 반대로 됨 | 3 | 4 | 7 |
| | | 그래프 개형이 전혀 다름 | 1 | 3 | 4 |
| | | 왼쪽이나 오른쪽 한 쪽 그래프만 그림 | 3 | 0 | 3 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-7> 유리함수 $y=\frac{1}{x+2}-2$에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 그래프를 하나도 그리지 않음 | | 21 | 16 | 37 |
| | 맞음 | 그래프를 맞게 그림 | 11 | 13 | 24 |
| | | 점근선의 $x$축의 점을 표시하지 않음 | 4 | 8 | 14 |
| | 오류 | 점근선의 $x$축의 점 표시가 잘못됨 | 4 | 3 | 7 |
| | | $x$축으로 2만큼 평행이동 | 6 | 6 | 12 |
| | | $x$축으로 -2만큼 $y$축으로 2만큼 평행이동 | 5 | 4 | 9 |
| | | $x$축으로 2만큼 $y$축으로 -2만큼 평행이동 | 5 | 2 | 7 |
| | | 그래프의 개형이 반대로 됨 | 3 | 3 | 6 |
| | | 그래프 개형이 전혀 다름 | 3 | 2 | 5 |
| | | 왼쪽이나 오른쪽 한 쪽 그래프만 그림 | 2 | 5 | 7 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-7-1> 유리함수 $y=\frac{1}{x+2}$와 $y=\frac{1}{x+2}-2$의 상관 관계

| 함수 | $y=\frac{1}{x+2}$ | $y=\frac{1}{x+2}-2$ |
|---|---|---|
| $y=\frac{1}{x+2}$ | 1 | . 847 |

## (2) 유리함수 $y=\frac{1}{x+2}$의 정의역 구하기

유리함수 $y=\frac{1}{x+2}$에 대한 정의역을 구하는 문제에서 다음과 같은 반응을 보였다 (<표 4-8>).

자연반 학생들 중 유리함수의 정의역을 구하는 문제에서 서술식으로 나타낸 학생은 15명, 기호를 생략하고 나타낸 학생은 12명, $x$를 생략하고 제시한 학생이 12명으로 나타났다. 정의역을 전혀 구하지 못한 학생이 14명, 정의역을 전혀 다르게 표시한 학생이 11명으로 나타났고 25명이 정의역을 모르고 있는 것으로 분석되었다. 인문반의 학생은 35명이 정의역을 구하지 못하였다.

<표 4-8> 유리함수 $y=\frac{1}{x+2}$의 정의역에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 정의역을 전혀 구하지 못함 | | 18 | 14 | 32 |
| | 맞음 | 정의역을 맞게 구함 | 9 | 15 | 24 |
| | | 서술식으로 표시함 | 9 | 12 | 21 |
| | | $x$를 생략함 | 11 | 12 | 23 |
| | 오류 | 풀이과정이 잘못됨 | 17 | 11 | 28 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

### (3) 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 치역 구하기

유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$에 대한 치역을 구하는 문제에서 다음과 같은 반응을 보였다 (<표 4-9>). 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$에 대한 치역을 구하는 문제에서 맞은 학생은 자연반이 13명, 인문반이 11명으로 나타났다. 치역을 구하지 못한 학생은 자연반이 19명, 인문반이 10명으로 나타났다. 이러한 결과들로 보아 유리함수의 치역을 구하는 문제에서 인문반과 자연반 학생들 간의 차이가 많음을 알 수 있다.

<표 4-9> 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 치역에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 치역을 전혀 구하지 못함 | | 26 | 13 | 39 |
| | 맞음 | 치역을 맞게 구함 | 11 | 13 | 24 |
| | | 서술식으로 표시함 | 8 | 9 | 17 |
| | | $y$를 생략 | 9 | 10 | 19 |
| | 오류 | $x$로 표시함 | 6 | 8 | 14 |
| | | 그래프를 잘못 그림 | 4 | 11 | 15 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

### (4) 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$의 최댓값, 최솟값 구하기

각 계열별 학생들을 대상으로 하였을 때, 최댓값을 구하는 문제에서, 자연반 학생들은 30명, 인문반 학생들은 23명이 풀었다. 그리고 최솟값을 구하는 문제에서 자연반 학생들은 30명, 인문반 학생은 23명이 풀었다. 계열별로 큰 차이를 보이고 있다.

전체 학생들을 대상으로, 최댓값을 구한 학생이 53명, 최솟값을 구한 학생이 53명으로 나타났으며 (<표 4-10>, <표 4-11>), 최댓값 최솟값 구하기의 상관계수가 .913이다. 이로 보아 최댓값을 구한 학생 대부분이 최솟값을 구하였다고 볼 수 있다(<표 4-11-1>).

<표 4-10> 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 의 최댓값 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최댓값을 전혀 구하지 못함 | | 25 | 13 | 38 |
| | 최댓값을 맞게 구함 | | 23 | 30 | 53 |
| | 오류 | 0 | 5 | 7 | 12 |
| | | $\pm\infty$ | 6 | 4 | 10 |
| | | 기타 | 5 | 10 | 15 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-11> 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 의 최솟값 구하기에 대한 학생활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최솟값을 전혀 구하지 못함 | | 22 | 20 | 42 |
| | 최솟값을 맞게 구함 | | 23 | 30 | 53 |
| | 오류 | 0 | 6 | 4 | 10 |
| | | $\pm\infty$ | 6 | 6 | 12 |
| | | 기타 | 7 | 4 | 11 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-11-1> 유리함수 $y=\dfrac{1}{x+2}$ 의 최댓값과 최솟값 구하기의 상관

| 분류 | 최댓값 | 최솟값 |
|---|---|---|
| 최댓값 | 1 | .913 |
| 최솟값 | .913 | 1 |

## 3) 무리함수에 대한 학생들의 반응

무리함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$ 의 그래프

(1) $a>0$ 일 때 정의역은 $\{x : x\geq 0\}$, 치역은 $\{y : y\geq 0\}$ 이다.
$a<0$ 일 때 정의역은 $\{x : x\leq 0\}$, 치역은 $\{y : y\geq 0\}$ 이다.

(2) 그래프는 함수 $y=\dfrac{x^2}{a}$ $(x\geq 0)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

### (1) 무리함수 $y=\sqrt{2x}$ 에 대한 그래프 그리기

$y=\sqrt{2x}$ 그래프의 개형을 그리는 문제에서 자연반 학생은 30명, 인문반 학생은 15명이 정확하게 그렸다. 자연반 학생 19명, 인문반 학생 20명은 그래프의 개형에서 점 0을 표시 하지 않고 그린 것으로 조사 되었다.

자연반 학생 중에서 그래프 방향은 일치하지만 평행 이동된 점에서 그래프를 그렸거나, 그래프 방향이 반대, 이차함수의 그래프나 로그 함수의 그래프등 으로 그린 학생들도 있었다.

<표 4-12> 무리함수에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 그래프를 하나도 그리지 않음 | | 13 | 10 | 23 |
| | 맞음 | 그래프를 맞게 그림 | 15 | 30 | 45 |
| | | 원점을 표시하지 않음 | 20 | 19 | 39 |
| | 오류 | 그래프의 방향은 일치하지만 평행이동 된 점에서 그래프를 그림 | 7 | 3 | 10 |
| | | 그래프의 방향이 반대로 그림 | 4 | 1 | 5 |
| | | 이차함수, 로그함수 등으로 그림 | 5 | 1 | 6 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

## (2) 무리함수의 정의역 구하기

무리함수에 대한 정의역을 구하는 문제에서 다음과 같은 반응을 보였다(<표 4-13>). 자연반 학생들 중 유리함수의 정의역을 구하는 문제에서, 조건제시법을 사용하여 나타낸 학생은 11명, 서술식으로 나타낸 학생은 16명, $x$를 생략하고 제시한 학생이 9명으로 나타났다. 그리고 그래프를 하나도 그리지 않은 학생이 10명, 정의역을 전혀 다르게 표시한 학생이 18명으로 나타나 28명이 정의역을 모르는 것으로 분석 되었다. 인문반 학생중 41명은 정의역을 구하지 못하였다.

<표 4-13> 무리함수의 정의역에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 정의역을 전혀 구하지 못함 | | 21 | 10 | 31 |
| | 맞음 | 정의역을 맞게 구함 | 9 | 11 | 20 |
| | | 서술식으로 표시함 | 7 | 16 | 23 |
| | | $x$를 생략 | 7 | 9 | 16 |
| | 오류 | $y$로 표시 | 9 | 14 | 20 |
| | | $x>0$ | 11 | 4 | 18 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

## (3) 무리함수의 치역 구하기

자연반 64명, 인문반 64명을 대상으로 하였을 때 무리함수의 치역을 구하는 문제에서 맞은 학생은 자연반이 46명, 인문반이 31명으로 나타났다. 연구 대상 전체 128명을 대상으로 하였을 때 틀린 학생들 중에는 치역을 전혀 구하지 못하는 학생이 21명, 전혀 틀리거나 $y>0$로 답한 학생이 30명으로 나타났다. 치역에 대하여 이해를 잘못하고 있는 학생이 전체적으로 51명이나 되었다.

<표 4-14> 무리함수의 치역에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 치역을 전혀 구하지 못함 | | 14 | 7 | 21 |
| | 맞음 | 치역을 맞게 구함 | 12 | 25 | 37 |
| | | 서술식으로 나타냄 | 10 | 11 | 21 |
| | | $x$를 생략 | 9 | 10 | 19 |
| | 오류 | 그래프가 잘못됨 | 10 | 6 | 16 |
| | | $y > 0$ | 9 | 5 | 14 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

## (4) 무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 최댓값, 최솟값 구하기

각 계열별 학생들을 대상으로 하였을 때, 최댓값을 구하는 문제에서, 자연반 학생들은 40명, 인문반 학생들은 31명이 풀었다. 그리고 최솟값을 구하는 문제에서 자연반 학생들은 39명, 인문반 학생은 30명이 풀었다.

<표 4-15> 무리함수의 최댓값 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최댓값을 전혀 구하지 못함 | | 14 | 10 | 24 |
| | 최댓값을 맞게 구함 | | 31 | 40 | 71 |
| | 오류 | $\pm\infty$ | 9 | 5 | 14 |
| | | 기타 | 10 | 9 | 19 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

<표 4-16> 무리함수의 최솟값 구하기에 대한 학생 활동

| 분류 | | | 인문반 | 자연반 | 전체 |
|---|---|---|---|---|---|
| 학생 활동 | 최솟값을 전혀 구하지 못함 | | 11 | 10 | 21 |
| | 최솟값을 맞게 구함 | | 30 | 39 | 69 |
| | 오류 | 1 | 9 | 5 | 14 |
| | | $\pm\infty$ | 10 | 9 | 19 |
| | | 기타 | 4 | 1 | 5 |
| 합계 | | | 64 | 64 | 128 |

### 4) 삼각함수에 대한 반응

| 삼각함수 $y=\sin ax$의 성질 |
|---|
| (1) 정의역은 실수 전체의 집합이다.<br>치역은 $\{y : -1 \le y \le 1\}$, 즉 $-1 \le \sin ax \le 1$ 이다. |
| (2) 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉 $\sin(-ax) = -\sin ax$ |
| (3) 주기는 $\dfrac{2\pi}{a}$ 인 주기함수이다. |

#### (1) $y=\sin 2x$ 에 대한 분석

연구 대상 전체 학생 128명중에서 $y=\sin 2x$의 그래프, 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 모두 구한 학생은 12명으로 나타났다. 그리고 $y=\sin 2x$의 그래프의 개형과 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 학생은 40명 이었다. 이 40명을 대상으로 다음과 같은 결과가 분석되었다.

첫째, 그래프의 개형은 맞았지만 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 모두 구하지 못한 학생은 20명 이었다.

둘째, 정의역을 구하지 못하고 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 학생은 10명, 정의역과 치역을 구하지 못하고 주기, 최댓값, 최솟값을 구한 학생은 18명으로 나타났다.

그래프 개형을 그리지 못한 학생을 대상으로 분석하여 다음과 같은 결과가 나왔다.

첫째, 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 모두 구한 학생은 16명으로 나타났다.

둘째, 주기는 구하지 못하였지만 정의역, 치역, 최댓값, 최솟값을 구한 학생은 12명으로 나타났다.

셋째, 정의역, 치역을 구하지 못하였지만 주기, 최솟값, 최댓값을 구한 학생은 8명으로 나타났다.

<표 4-17> $y=\sin 2x$에 대한 정답 인원수

| 내용 | | | | | | | 인원수 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 분류 | 그래프 | 정의역 | 치역 | 주기 | 최댓값 | 최솟값 | |
| 1 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 12 |
| 2 | ○ | × | ○ | ○ | ○ | ○ | 10 |
| 3 | ○ | × | × | ○ | ○ | ○ | 18 |
| 4 | ○ | × | × | × | × | × | 20 |
| 5 | × | × | ○ | ○ | ○ | ○ | 16 |
| 6 | × | × | × | ○ | ○ | ○ | 8 |
| 7 | × | ○ | ○ | × | ○ | ○ | 12 |
| 8 | ○ | × | × | × | ○ | ○ | 20 |
| 9 | × | △ | | | | | 12 |

○ : 맞음, × : 틀림, △ : 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값 중 하나라도 구한 학생

### (2) $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ 에 대한 분석

<표 4-18> $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ 그래프에 대한 분석

| 내용 | | | | | | | | 정답 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 분류 | $y=\sin 2x$ 그래프 그리기 | 정의역 | 치역 | 주기 | 최댓값 | 최솟값 | $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$의 그래프 그리기 | 인원수 |
| 1 | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | ○ | 8 |
| 2 | ○ | × | ○ | ○ | ○ | ○ | × | 6 |
| 3 | | | | | | | ○ | 28 |

○ : 맞음, × : 틀림, 표시가 없는 것 : 맞았거나 틀린 경우와 관계없는 것을 뜻함

함수 $y=\sin 2x$ 와 $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$의 그래프, 정의역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 모두 구한 학생은 8명 이었다. 그리고 $y=\sin 2x$의 그래프, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값을 구하였으나 $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ 의 그래프를 그리지 못한 학생은 6명이나 되었다. 그리고 $y=\sin 2x$ 의 그래프와 $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$의 그래프 그리기는 약한 상관(상관 계수 .489)을 보였다 <표 4-19>. 이러한 결과는 학생들이 함수 $y=\sin 2x$의 그래프는 그릴 수 있더라도 평행이동, 주기, 최댓값, 최솟값을 정확히 모르고 있는 것으로 해석된다.

<표 4-19> 삼각함수의 그래프 그리기

| 함수 | $y=\sin 2x$ | $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ |
|---|---|---|
| $y=\sin 2x$ | 1 | .489 |
| $y=2\sin\frac{1}{2}x+2$ | .489 | 1 |

## 5) 지수함수와 로그 함수의 그래프 그리기

| 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$에 대하여 |
|---|
| (1) 정의역은 실수전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.<br>(2) 그래프는 점 (0, 1)을 지나고, 점근선은 $x$축이다.<br>(3) $a>1$일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하고,<br>$0<a<1$ 일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 감소한다. |

| |
|---|
| 로그함수 $y=\log_a x \quad (a>0,\ a\neq 1)$에 대하여<br>(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.<br>(2) 그래프는 점 (1, 0)을 지나고, 점근선은 $y$축이다.<br>(3) $a>1$일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 증가하고<br>$0<a<1$ 일 때 $x$의 값이 증가하면 $y$의 값도 감소한다. |

지수함수와 로그함수의 그래프 그리기에서 나타난 상관관계는 다음과 같다.

(1) $y=2^x$의 그래프 그리기는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 및 $y=2^{x-2}$ 의 그래프 그리기와 상관을 보이고 있다.

(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 그리기는 $y=2^{x-2}$의 그래프 그리기와 상관을 보이고 있다.

(3) $y=\log_2 x$의 그래프 그리기는 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프 그리기와 상관을 보이고 있다.

지수함수나 로그함수를 그릴 때 $x$축 방향으로 평행이동한 그래프를 그릴 수 있는 학생들 중 많은 학생들이 $y$축 방향으로 평행이동한 그래프를 그릴 수 있는 것으로 해석된다. 그러나 약한 상관을 보이고 있으므로 지수함수와 로그함수의 그래프에서 평행이동에 대한 학습이 통합적으로 이루어져야 한다.

<표 4-20>에서 지수함수를 그릴 수 있는 학생과 로그함수를 그릴 수 있는 학생 사이에는 약한 상관을 보이고 있다. 이러한 결과는 학생들에게 지수함수와 로그함수의 학습은 통합하여 지도하여야함을 나타내고 있다.

<표 4-20> 지수함수와 로그함수의 그래프 그리기 분석

| 분류 | $y=2^x$ | $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | $y=2^{x-2}$ | $y=\log_2 x$ | $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=2^x$ | 1 | .793 | .729 | .572 | .511 |
| $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | .793 | 1 | .723 | .617 | .552 |
| $y=2^{x-2}$ | .729 | .723 | 1 | .579 | .527 |
| $y=\log_2 x$ | .572 | .617 | .579 | 1 | .890 |
| $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ | .511 | .552 | .527 | .890 | 1 |

## III. 결론

본 연구는 고등학생이 함수의 모양을 어느 정도 그릴 수 있는지 조사하여 함수영역에서의 지도 방법과 대학 교양수학 교재 개발의 방향을 모색 하고자 한다. 조사 결과를 바탕으로 한 결론은 다음과 같다.

첫째, 함수의 모양을 그릴 때 정의역, 공역, 치역, 주기, 최댓값, 최솟값은 기본적으로 필요한 요소이다. 그러므로 이러한 내용과 그래프를 그리는 것을 관련지어 학습 할 수 있도록

해야 한다. 그러므로 기초 개념부터 지도할 필요성이 있다.

둘째, 본 연구에서의 학생들의 오류는 기초적 개념 부족에서 많이 나타나고 있다. 이는 교사는 언제나 학생의 시각과 입장에서 수학적 개념을 이해하고, 문제를 해결하려는 노력이 필요함을 알 수 있다.

셋째, 본 연구에서 알 수 있듯이 그래프를 그리거나 함수가 지니고 있는 성질에 대한 이해도에서 인문반과 자연반 학생들 간의 차이가 많이 난다. 이러한 학습부진 차이를 줄일 수 있는 교수・학습방안을 마련해야 할 것이다.

넷째, 함수의 기본적인 모양을 그리고 이들 함수들의 합이나 곱, 이들 함수의 합성이나 유리함수의 형태 등 다양한 형태의 함수에 대한 모양의 개형을 그릴때는 Maple이나 Mathematica등의 시각적으로 표현할 수 있는 도구 사용을 권장한다.

다섯째, 고등학교 때의 함수 단원의 수학 학습 정도를 영역별로 세밀하게 분석하여 수학 학습 정도를 고려한 대학 교양수학 교재의 구성이 필요하다.

여섯째, 대학 수학교육에는 함수의 모양을 그리고 기하학적인 의미를 이해하고 이를 전공분야에 적용할 수 있는 문제들이 많이 있다. 그러므로 대학생들은 고등학교에 나오는 함수 모양의 개형은 그릴 수 있어야 한다. 이를 위해서 대학 교양수학 교재의 구성에는 고등학교의 함수영역에 대한 내용을 강화할 필요성이 있다.

## 참고문헌

교육과학기술부 (2009). 교육인적자원부 고시 제 2006-75호 및 제 2007-79호 초등학교 교육과정 해설

김성옥 (2005). 사회 과학 전공을 위한 대학 수학교육, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집>, 19(4), pp. 587-597.

김용호 (2001). 일차부등식의 문제해결 과정에서 발생하는 오류유형 분석-중학교 교육과정을 중심으로, 공주대학교 대학원, 석사학위논문.

김종명・김상래 (2006). 수열의 극한과 무한급수의 문제해결에서 발생하는 오류유형 분석, 교육과학논문집 제12집 1권, pp. 17-35, 관동대학교 출판부.

안성훈・김은옥・고대돈 (2004). 초등학생의 ICT 활용 오류처치 방안 연구, 컴퓨터교육학회 논문지, 7(2), pp. 35-46.

우무하 외 4인 (2009). 고등학교 수학 I, 박영사

이대현・박배훈 (2001). 수학교육에서 직관과 그 오류에 관한 고찰, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 40(1), pp. 15-25.

황선욱 외 2인 (2008). 고등학교 수학, 좋은책 신사고.

황해익・고은미 (2006). 유아의 수학학습 잠재력 측정과정에서 나타난 오류 및 전략 유형 분석, 열린유아교육학회 <열린유아교육연구>, 11(4), pp. 265-285.

Knuth, E. J. (2000). Understanding the connection between equations and graphs. Mathematics Teacher, 93(1), 48-53.

Dreyfus, Tommy. & Eisenberg, Theodore. (1982). Intuitive functional concepts : A baseline study on intuitions. Journal for Research in Mathematics Education, 13(5), 360-380.

Maurer, S. H. (1987). New knowledge about errors and new views about learners : What they msucators and more educators would like to know (pp. 165-188). In Schoenfeld, A. H. (Ed.), cognitive science and mathematics education, London : Lawrence erlbaum associates, publishers hillsdale, Newjerse.

NCTM. (2000). Principles and standards for school mathematics : An overview National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA : Author.

Vinner, S. Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for concept of function. Journal for Research in Mathematics Education, 20(4), 356-366.

안종수

# Analysis of the ability to interpret and draw a graph of the function to high school students

An, Jong Su[2)]

## Abstract

In this paper, we examine high school in order to know their ability for understanding about fundamental functions, such as polynomial, trigonometric, logarithm and exponential functions which have learned from high school. The result of this study shows as follows. More than half students are not able to draw shape of given functions, except polynomial. More students do not fully understand about function properties such as domain, codomain, range, maximum and minimum value.

Key Words : polynomial, trigonometric function, logarithm function, exponential function.

2) Pusan National University, Graduate School (jsan63@hanmail.net)