한국초등수학교육학회지 16(1) 1-19. Journal of Elementary Mathematics Education in Korea 16(1) 1-19.
2012. 04. 30 April 30. 2012.

「순수이성비판」에 나타난 수학적 인식의 특성: 개념의 구성[1]

임재훈[2]

칸트는 「순수이성비판」에서 수학적 인식과 철학적 인식의 차이를 개념에 의한 인식과 개념의 구성에 의한 인식의 차이로 설명한다. 이 논문에서는 칸트가 주장한 수학적 인식의 특성인 '개념의 구성'의 의미를 「순수이성비판」에 나타난 감성과 지성에 관한 칸트의 이론을 바탕으로 고찰한다. 개념의 구성은 개념을 직관에 나타내는 것으로, 상상력의 종합에 의해 개념의 역동적인 도식을 형성하는 과정이다. 개념의 구성에 관한 칸트의 이론은 수학적 개념 학습 지도에서 경험에서의 추상화를 통한 개념 형성을 넘어 주어진 표상을 개념의 도식으로 보는 관점의 형성을 요청하는 것으로 해석될 수 있다.

주제어: 수학적 인식, 구성, 직관, 개념, 도식

Ⅰ. 서 론

칸트는「순수이성비판」에서 수학에서 선험적 종합판단이 가능한 것처럼 형이상학에서 선험적 종합판단이 가능한지를 탐구하였다. 수학에서 선험적 종합판단의 가능성을 받아들이고 철학에서 그와 같은 선험적 종합판단의 가능성을 모색했다는 점에서, 칸트가 수학과 형이상학의 유사점을 강조했을 것으로 예상할 수 있다. 그러나 이러한 예상과 달리, 칸트는 순수이성비판의 여러 곳에서 수학과 형이상학의 유사성보다 차이점에 주목한다. 칸트는 형이상학적 인식과 수학적 인식은 다른 종류의 것이어서 수학의 방법을 빌려 형이상학을 구축하려는 시도는 성립할 수 없다고 강조한다.

> 모든 이성 인식은 개념에 의한 인식이거나 개념의 구성에 의한 인식이다. 전자를 철학적이라 하고, 후자를 수학적이라고 한다. (B865)[3]
> 선험적인 근원에 관해서는 형이상학과 수학은 서로 친족적이다. 그러나 수학적 인식은 선험적인 개념의 구성에 의한 인식인데 비하여, 형이상학적 인식은 개념에 의한 인식이다. 수학적 인식과 형이상학적 인식의 이 차이로부터, 두 인식이 서로 다른 종류의 것임이 결정적으로 드러난다. (B872)

---

1) 이 논문은 2010학년도 경인교육대학교 학술연구비에 의하여 연구된 것임.
2) 경인교육대학교
3) 관례에 따라 순수이성비판의 1판은 A, 2판은 B로 표기한다. 1판과 2판의 내용이 같은 경우 2판을 참고하였으며, 순수이성비판으로부터의 인용은 백종현(2006)의 번역서를 기초로 하였다.

칸트에 의하면 인식론적으로 수학과 형이상학의 결정적 차이는 개념에 의한 인식인가 개념의 구성에 의한 인식인가에 달려 있다. 여기서 구성이라는 단어에 주목할 필요가 있다. 구성은 구성주의의 영향으로 널리 퍼진, 그러나 그 구체적인 의미는 상대적으로 덜 분명하고 다양한 단어이다. 이 논문에서는 칸트가 수학적 인식을 규정할 때 언급한 '구성'이 무엇을 의미하는지를 구체적으로 고찰한다.

칸트 철학에 관련된 최근의 교육적 연구에는, 칸트의 이론 전체를 마음에 관한 이론으로 보고 이를 교육 이론으로 해석하려고 시도한 연구(장발보, 2003; 정혜진, 2004; 신춘호, 2005), 칸트의 철학을 구성주의 수학교육철학의 배경 이론으로 논한 연구(홍진곤, 1999; 남진영, 2008), 칸트의 선험 철학으로부터 심성 함양이나 인격 형성을 위한 수학교육에의 시사점을 도출하려 한 연구(강현영, 2007, 유충현 2008)가 있다. 이 연구의 관심은 칸트 철학 전체를 교육 이론의 관점에서 해석하거나 칸트 철학과 구성주의의 일반적 관련성을 논하거나 칸트의 선험 철학에서 수학교육의 일반적 목적론을 도출하는 데에 있지 않다. 선행연구와 비교할 때, 칸트가 순수이성비판에서 수학적 지식의 본질적 특성으로 거론한 '개념의 구성'이 무엇인지를 밝히고 이로부터 얻을 수 있는 시사점을 탐색하려는 이 연구의 관심은 매우 한정되고 특수한 것이라고 할 수 있다.

순수이성비판에서 칸트는 감성, 지성, 이성[4]의 작용으로 인식을 설명한다. 감성, 지성, 이성은 세 가지 종류의 인식 능력으로 인간의 지적 이해에서 각각 고유한 기능을 수행한다. 감성과 지성의 기능은 순수이성비판 전반부의 초월적 감성학과 초월적 논리학에서, 이성의 기능은 후반부의 초월적 변증학에서 논의된다. 이성은 자연의 합목적성, 절대적 무조건성, 최고존재자와 같은 이념으로 개별 인식들 상호간의 체계적 통일을 지향하는 기능을 하며, 개별 인식은 이성의 규제 하에서 감성과 지성이라는 마음의 두 원천으로부터 성립한다. 이 논문은, 이성 및 이념의 역할과 그 수학교육적 시사점은 다루지 않으며, 개별 인식과 관련된 순수이성비판 전반부의 감성과 지성에 관한 칸트의 논의를 토대로 수학적 인식의 구성적 특징에 초점을 맞춘다.

Ⅱ. 수학적 인식의 근원

칸트는 수학적 인식의 특성에 대하여 다음과 같이 말한다.

> 수학적 고찰은 순전한 개념만 가지고서는 아무것도 얻을 수 없고, 곧장 직관으로 서둘러 나가, 거기에서 개념을 구체적으로 고찰한다. 그러하되 경험적으로 고찰하는 것이 아니고, 그가 선험적으로 제시한, 다시 말해 선험적으로 구성한 직관에서 고찰한다. (B743-744)
>
> 수학적 인식은 개념의 구성에 의한 이성 인식이다. 개념을 구성한다는 것은 그 개념에 상응하는 직관을 선험적으로 나타내는 것을 말한다. 그러므로 개념의 구성을 위해서는 비경험적인 직관이 필요하다. (B741)

개념의 구성은 개념에 상응하는 대상을 선험적인 직관에 나타내는 것이라는 말의 의미

4) 감성, 지성, 이성을 비롯하여, 직관, 잡다, 상상력, 도상, 도식과 같은 칸트 철학 용어의 번역어는 백종현(2006)의 순수이성비판 번역서에 제시된 것을 사용한다.

를 이해하기 위해서는, 선험적인 직관이 무엇인지를 분명히 할 필요가 있다. 세 인식 능력 중 감성은 사물에 촉발되어 표상을 얻는 마음의 수용적 능력으로, 사물은 감성의 순수 형식을 매개로 하여 현상으로 우리에게 주어진다. 칸트에 의하면, 감성의 선험적인 순수 직관에는 공간과 시간의 두 가지가 있다.

1. 선험적 직관

공간을 우리 밖에 있는 어떤 것으로 여기기 쉽지만, 칸트는 공간이 우리 밖의 어떤 것이 아니라, 우리가 우리 안에 선험적으로 지니고 있는 인식의 틀, 감성의 형식이라고 본다. 공간은 외적 경험들로부터 추출된 경험적 개념도 아니고, 사물 자체의 속성도 아니다. 공간은 외부의 사물로부터 유래하는 것이 아니라, 우리가 사물을 현상으로 수용할 때 불가피하게 필연적으로 부여할 수밖에 없는 형식, 현상들을 가능하게 하는 선험적인 조건이다. 그러므로 외적 경험 자체가 공간이라는 선험적인 직관을 통해 비로소 가능하다(B 38).

우리는 공간에서 이런 저런 대상을 제거하여 공간에 아무 것도 없는 것은 생각할 수 있지만, 공간 자체를 제거하여 공간 자체가 없는 것을 표상할 수는 없다(B39). 우리에게 대상들 그 자체는 알려지지 않으며, 우리가 외적 대상이라고 부르는 것은 공간이라는 선험적 형식에 의해 포착된 순전한 현상일 뿐이다. 우리는 사물 그 자체를 있는 그대로 대면할 수 없으며, 오직 공간이라는 감성의 형식을 거쳐서 포착된 현상을 대면한다.

감성의 또다른 순수 직관은 시간이다. 칸트에 의하면, 시간은 내감의 형식으로, 모든 현상 일반의 선험적 조건이다(B50). 모든 표상은 마음의 내적 상태에 속하는 것으로, 시간이라는 내적 직관의 형식적 조건 아래에서 가능하다. 우리의 마음에 나타나는 모든 표상은 어느 것 하나 빠짐없이 시간이라는 틀 속에서 나타난다. 외적 현상이 공간 속에서 공간 관계에 따라 규정되듯, 모든 현상 일반은 시간 속에서 규정된다. 시간이라는 틀을 벗어난, 시간 밖의 현상이라는 것은 인간에게 있을 수 없다.

시간은 절대적 실재성을 지니지 않으며, 오직 주관적 실재성만을 지닌다. 시간은 대상에 속한 것이 아니라, 그것을 직관하는 주관에 속한 것으로, 선험적인 필연성을 지니는 감성의 순수 형식이다. 우리가 시간 속에서 현상들을 제거할 수 있다고 하더라도, 현상을 가능하게 하는 보편적인 조건인 시간 자체를 제거할 수는 없다(B46). 시간은 경험의 산물이 아니라, 오히려 경험 그 자체가 가능하기 위해 경험에 앞서 있다고 가정할 수밖에 없는 선험적인 조건이다. 공간이 현상을 '인접해 있음'으로 표상한다면, 시간은 현상을 '동시에 또는 잇달아 일어남'으로 표상한다. 시간이라는 순수 직관을 선험적으로 지니고 있기 때문에, 인간은 현상들을 같은 때에 (동시에) 또는 서로 다른 때에 (잇따라) 있는 것으로 표상할 수밖에 없다.

칸트에 의하면, 감성의 순수 형식에는 공간과 시간 외에 다른 것은 없다. 현상으로부터 경험적인 것을 다 들어내고 나면 남는 것, 곧 주관에게 속한 감성의 선험적 형식은 공간과 시간 뿐이다(B58). 이를테면 변화나 운동은 지각을 전제로 하는 경험적인 것이므로 감성의 순수 형식이 아니다. 시간이나 공간 그 자체는 내적인 순수 형식으로 변화하지 않으며, 시간과 공간 속에 나타난 현상이 변화할 뿐이다.

칸트의 이와 같은 견해는 인간 인식의 특수성을 말하는 것으로 볼 수 있다. 다른 생명체나 신과 같은 존재가 사물을 공간이라는 틀 속에서 인접성이라는 관점에서 현상으로 수용하는지 알 수 없다. 칸트의 관심은 순수이성으로서 우리 인간의 보편적 인식에 있다. 인간은 사물을 공간과 시간이라는 틀을 벗어나 인식할 재간이 없으며, 이것은 우리 밖에 실

지로 시간이나 공간이라는 실체가 있어서가 아니라, 시간과 공간이 우리 안에 감성의 형식으로 붙박혀 있어서 모든 대상이 시간과 공간 속의 현상으로 우리 앞에 나타나기 때문이다. 시간과 공간이라는 우리의 주관에 근원적으로 속해 있는 선험적 틀을 통해 수용된 것만을 현상으로 수용하는 것이 인간의 인식 방식이다.

2. 선험적 직관과 수학

칸트가 선험적 직관을 지식의 중요한 근원으로 삼은 것이 타당한 것인지에 대하여 학자들 사이에 논란이 있다. 칸트 시대의 논리학이 현대에 비해 제한된 것이었기 때문에 불가피하게 칸트가 직관에 의존한 것이라고 보는 견해도 있고, 칸트가 직관이라는 비논리적인 근원을 상정한 것은 현대 논리학의 틀 속에서도 여전히 타당하다는 견해도 있다(Major, 2006). 이와 같은 논의는 수학이 논리로 환원될 수 있는 것인가와 연결되어 있으며, 칸트의 직관 이론이 수학과 밀접하게 연결되어 있음을 시사한다.

실지로 순수이성비판에서 선험적 직관인 시간과 공간은 수학과 불가분의 관계를 맺고 있다. 칸트는 감성적 직관의 순수 형식인 시간과 공간은 순수 수학이 종합적 인식을 선험적으로 길어낼 수 있는 두 인식 원천이라고 한다(B55). 시간은 현상을 '잇달아 있음'으로 파악하는 것이며, 공간은 현상을 '인접해 있음'으로 파악하는 것이다. '잇달아 있음'은 자연수로, '인접해 있음'은 기하적 관계로 형식화될 수 있다. 칸트의 직관 이론은 기하와 산수의 원초적인 존재 근거는 무엇인가라는 물음에 대해서 인간의 감성 속에 공간과 시간이라는 선험적 직관이 붙박혀 있기 때문이라고 답하는 것과 같다. 인간의 세계 수용 방식 자체가 본질상 수학적이며, 수학의 근원이 인간 외부가 아닌 마음 속에 선험적으로 붙박혀 있다는 것이다.

공간과 시간의 속성을 선험적으로 규정하는 기하와 산수의 지식은 선험적 종합 판단이다. 명제 또는 판단이 선험적이라는 것은 경험 및 모든 감각 인상으로부터 독립적이라는 것으로, 후험적 인식, 곧 인식의 원천이 경험에 있는 경험적 인식과 대비된다(B2). 명제가 종합적이라는 것은 'A는 B이다'에서 술어 B가 주어 A에 개념적으로 포함되어 있지 않은 판단을 말한다. 이와 대비되는 것이 분석적 판단인데, '아들은 남자이다'와 같이 단순히 A를 개념적으로 분석하는 것만으로 B를 끌어낼 수 있다. 종합 명제는 주어의 개념 분석으로는 알 수 없는 새로운 내용이 술어를 통해 주어에 덧붙여진다는 점에서 확장 판단으로, 분석 명제는 술어를 통해 주어에 대해 새롭게 알게 되는 것은 없고 주어에 이미 들어 있는 것을 끄집어 설명할 뿐이라는 점에서 설명 판단이라고 불리기도 한다(B11). 칸트가 보기에, 수학적 인식은 경험에 의존하지 않으면서 새로운 내용이 추가되는 인식이다.

기하나 산수의 이러한 명제에 이르기 위해 우리가 의지할 것은 개념 아니면 직관뿐이다. 개념이나 직관은 선험적이거나 후험적으로 주어지므로, 다음 네 가지를 생각할 수 있다: 선험적 개념, 후험적 개념, 선험적 직관, 후험적 직관. 그런데 후험적인 것은 필연성이나 보편성을 지니지 못하는 종합 명제만 제공하므로, 후험적 개념이나 후험적 직관으로부터 기하나 산수의 보편적인 명제들이 나오지 못한다. 또 오로지 순전한 선험적인 개념만 가지고는 분석 판단은 얻을 수 있어도 종합 판단을 얻을 수 없다. 따라서 수학적 인식은 선험적 직관에 의존한다는 단 하나의 가능성만이 남는다.

Ⅲ. 수학적 구성의 의미

이 장에서는 순수 직관에 관한 칸트의 논의를 바탕으로, 개념의 구성의 의미를 자세히 고찰한다.

1. 개념의 구성

직관과 분리된 개념은 공허하므로, 대응하는 직관이 없는 개념은 제대로 된 인식을 제공하지 못한다. 수학적 개념은 우리 마음의 자유로운 구성에 의해서 만들어진 개념이지만, 아무 개념이나 다 구성될 수 있는 것은 아니다. 직관이 없는 개념이 인식을 제공하지 못한다는 것을 이각형과 삼각형을 예로 하여 살펴 보자. 직선이라는 개념과 둘이라는 개념으로부터 두 직선으로 둘러싸인 도형이 성립할 수 없다는 종합 판단을 도출하는 것은 불가능하다. (마찬가지로, 직선이라는 개념과 셋이라는 개념으로부터 세 직선으로 둘러싸인 도형이 성립할 수 있다는 종합 판단을 도출하는 것 역시 불가능하다.) 이각형, 곧 두 직선으로 둘러싸인 도형이라는 개념 안에는 그 자체로서는 어떤 모순도 없다. 그것의 불가능성은 개념 그 자체에서 기인하는 것이 아니라, 공간 및 공간 규정의 조건에 기인한다(B268).

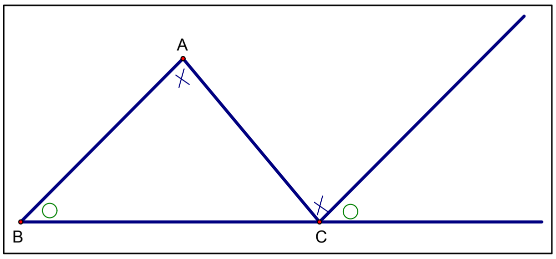
이것은 칸트가 논리적 가능성과 수학적 가능성을 동일시하지 않았다는 것을 시사한다. 수학적 가능성을 결정하는 것은 구성가능성이다. 구성가능성은 논리적 가능성보다 좁은 범위의 수학적 가능성의 기준을 제공한다(이종권, 2005). 구성가능한 개념이란 직관에 나타내어질 수 있는 개념을 말한다. 두 직선으로 둘러싸인 도형은 직관에 나타날 수 없지만, 세 직선으로 둘러싸인 도형은 나타난다. 순수 직관에 나타내어질 수 있는 개념은 수학적 인식을 산출하지만, 그렇지 못한 개념은 공허하므로 수학적 인식을 산출하지 못한다. 수학적 인식의 형식이 양적인 것에 상관할 수 있는 것은 양의 개념이 구성, 곧 선험적 직관에서 제시될 수 있기 때문이다. 원뿔의 형태라는 양적 측면은 일체의 경험적 보조 없이도 순전히 개념에 의지하여 직관에 나타날 수 있지만, 원뿔의 색깔과 같은 질적 측면은 경험적 보조 없이는 나타날 수 없다.

2. 기하와 산수(대수)에서의 구성

칸트는 기하에서의 구성을 삼각형의 내각의 합을 예로 하여 설명한다. 철학자에게 삼각형의 내각의 합을 구하는 문제가 주어진다면, 그들은 세 직선으로 둘러싸인 도형의 개념과 이 도형에 있는 3개의 각이라는 개념을 붙들고 분석하려 하겠지만, 이렇게 해서는 직선, 각, 3의 개념을 분해하고 분명하게 할 수는 있어도, 삼각형의 내각의 합에 대한 성질에는 이르지 못한다. 그것은 철학자들은 개념의 구성이 아닌 개념 그 자체만을 붙들고 고찰하기 때문이다. 칸트는 수학자의 방법이 철학자의 방법과 어떻게 다른지를 다음과 같이 말한다.

> 기하학자가 이 도형을 다룬다고 해 보자. 그는 곧장 하나의 삼각형을 구성하는 일부터 착수할 것이다. 그는 직선 위의 한 점에서 작도할 수 있는 두 이웃한 각의 합이 2직각과 같다는 것을 알기 때문에, 삼각형의 한 변을 연장하여 합이 2직각이 되는 두 이웃한 각을 만든다. 다음에 그는 이 두 이웃한

각의 꼭지점(C)에서 삼각형의 맞은편 변(AB)과 평행한 선을 그어, 외각을 둘로 나눈다. 그리고 곧바로 외각을 나누어 생긴 각 중 하나가 삼각형의 한 내각과 크기가 같음을 알아차린다. 그는 이런 방식으로 계속해, 항상 직관의 인도를 받으면서, 추리의 연쇄를 통해, 명료하고 보편적으로 타당한 문제의 해결에 이른다. (B 744)



[그림 1] 삼각형의 내각의 합 (1)

이와 같은 구성을 통하여 수학은, 삼각형의 개념 그 자체만을 분석해서 알 수 없는, 삼각형의 내각의 합은 2직각이다 와 같은 생산적인 종합 판단을 얻는다.

한편, 기하에서의 개념의 구성이 결과적으로 그 개념에 속하는 구체적인 도형의 모습으로 직관에 나타내어지는 것과 달리, 산수(또는 대수)의 개념은 그와 같은 방식으로 직관에 나타낼 수 없다. 칸트는 기하적 구성과 대수적 구성의 차이를 다음과 같이 비교하여 말한다.

대수학은 양 일반(즉 수들)의 모든 구성, 예를 들어 덧셈, 뺄셈, 제곱근 구하기 등 양 일반의 모든 구성을 표시하기 위해 일정한 기호를 선택한다. 대수학은 양의 보편적 개념을 양의 서로 다른 관계를 따라 기호화한 후에, 그 양에 의해 산출되고 변경되는 모든 조작을 일정한 보편적 규칙에 따라 직관에서 제시한다. 예를 들어, 한 양을 다른 양으로 나눌 때, 대수학은 그 둘의 상징을 나누기 기호법에 의해 결합한다. 그러므로 대수학은 기호적 구성에 의해 기하학이 (대상들 자신에 대한) 시각적 또는 기하학적 구성에 의해 이르는 것과 똑같은 것에 이른다. (B745)

기하적 구성에서는 개념의 예가 구성되는데 비하여, 산수의 구성에서는 양이 기호의 형태로 구성된다(Rechthe, 2006). 기하에서의 구성이 개념의 구체적인 형태를 직관에 나타내는 시각적 구성인데 비해, 산수에서의 구성은 개념을 기호를 통해서 직관에 나타내는 기호적 구성이라는 점에서 다르다.

Ⅳ. 수학적 구성의 역동성

수학의 가능성은 수용적인 감성의 기능만이 아닌 어떤 능동적인 기능에서 비롯된다(김진형, 2003). 감성만으로는 인식이 성립할 수 없으며, 직관과 개념이 결합될 때에 인식이 가능하다. 감성이 없이는 우리에게 사고의 대상이 주어지지 않고, 지성이 없이는 아무 대상도 사고되지 않는다. 따라서 개념을 감성화하는 작업과 직관을 지성화하는 작업이 모두 필요하다(B75). 이 장에서는 개념으로 직관의 잡다를 통일하는 지성의 기능에 대해 살펴보고, 이를 바탕으로 수학적 구성의 역동적인 성격에 대하여 고찰한다.

1. 순수 지성 개념

감성에 주어진 현상들은 잡다(雜多, manifold), 곧 아직 정돈되지 않은 모호한 덩어리와 같은 것이다. 아직 명확한 대상으로 통일되지 않은 감각의 잡다를 정돈하는 임무를 수행하는 것이 지성이다. 지성은 순수 개념을 사용하여 규정되지 않은 감각의 잡다를 통일한다.

직관의 잡다를 의식에서 종합적으로 통일하기 위해서는 직관의 대상 일반을 사고하는 사고의 형식이 필요하다. 칸트는 지성에 붙박혀 있는 일반적인 사고의 형식, 곧 감각의 잡다의 종합적 통일을 가능하게 하는 선험적인 조건인 순수 지성 개념 12개를 찾아 내어 이를 범주라고 불렀다. 직관의 대상들 일반에 선험적으로 관계하는 순수 지성 개념인 범주는 다음과 같이 넷으로 분류된다(B106).

양의 범주 : 하나(단위), 여럿(다수), 모두(전체)
질의 범주 : 실재성(~임), 부정성(~아님), 제한성(~이지는 않음)
관계의 범주 : 내속성과 자존성(實體와 偶有性)의 관계, 원인성과 의존성의 관계, 상호성(능동자와 수동자 사이의 상호작용)의 관계
양태의 범주 : 가능성-불가능성, 현존-부재, 필연성-우연성

하나, 여럿, 모두와 같은 범주들이 사물의 속성이 아니라(B114), 감성에 주어진 현상을 사고하는 우리의 지성에 붙박혀 있는 사고의 기준이라는 칸트의 견해에 주목할 필요가 있다. 감성의 순수 직관인 시간은 '지금'과 '지금'이라는 동종적인 부분 시간으로 표상되고 이 '지금'과 '지금'은 상상력에 의해 결합되어 마치 직선인 것처럼 표상되는 시간을 산출한다. 수가 동종적인 단위를 연속해서 보태는 것은 지금과 지금을 연속해서 보태는 것과 같다. 양 범주의 도식인 수는 시간 계열을 나타낸다(B184). 수는 순수지성개념인 범주가 현상과 관계할 수 있게 하기 위한 조건이며, 현상은 단위, 다수, 또는 전체로 규정된다. 단위, 다수, 전체가 사물의 성질이 아니라 인간 사고의 기본 형식이라는 것은, 수의 근원이 사물이 아닌 인간에게 있다는 것이다. 이는 수의 기원은 사물이 아니라 사물에 대한 인간의 지적 활동에 있다는 Dewey와 Mclellan(1895)이나 Piaget(1977)를 비롯한 구성주의자들의 주장과 통한다.

칸트가 제시한 순수 지성 개념들은 수학과 밀접한 관련이 있다. 칸트는 네 부류의 범주들 중에 처음 두 부류, 곧 양의 범주와 질의 범주를 수학적 범주라 하고, 나머지 둘을 역학적 범주라고 부른다(B110). 칸트는 모든 현상들의 수학적 전체와 이것들의 종합의 전체

성을 '세계'라 칭하고, 동일한 세계가 역학적인 전체로 고찰될 때 이를 '자연'이라고 부른다(B446).

2. 상상력의 형상적 종합

칸트에 의하면, 직관의 잡다가 한 의식 안에서 통일되기 위해서는 세 겹의 종합 작용이 필요하다. 그것은 직관에서 표상들을 포착하는 종합, 그것들을 상상에서 재생하는 종합, 그리고 그것들을 개념에서 인지하는 종합이다.

포착의 종합은 잡다를 일별(一瞥)하고 그것을 총괄 또는 합성하는 작용을 말한다(A99). 모든 현상은 포착의 종합 곧 부분에서 부분으로의 계속적인 종합에 의해서 잡다로 성립할 수 있다. 포착의 종합이 없이는, 각각의 인상은 각각의 순간에 속한 것으로 서로 분리되어 한 덩어리로서의 잡다를 이루지 못한다. 포착의 종합을 통해서, 직관은 각각의 인상의 종합으로 하나의 잡다를 만든다. 공간에서 무엇인가를 인식하기 위해서 우리는 주어진 잡다의 일정한 결합을 종합적으로 수행해야만 한다(B138). 삼각형을 그릴 때, 각각의 선분이 하나로 종합되지 못하고 따로따로 분리되어 있다면, 세 선분이 모여 이루어지는 하나의 삼각형이라는 잡다는 우리의 직관 속에 주어지지 못할 것이다.

재생의 종합은 상상력(想像力, imagination)의 작용이다. 상상력은 현상을 우리가 마음 속에서 재생하는 것을 가능하게 한다. 우리가 한 삼각형을 생각 속에서 긋거나, 어떤 수를 생각할 때, 잡다한 표상을 순차적으로 하나하나 생각 속에서 되살려내야 한다(A101). 만일 선행한 것들, 곧 처음에 그린 부분이나 선행한 수를 생각 속에서 놓치면, 곧 후속하는 것으로 나아가면서 선행하는 것들을 재생하지 못한다면, 하나의 전체 표상으로서 삼각형이나 수는 생길 수 없다.

그 다음으로 인지의 종합이 있다. 우리가 지금 생각하고 있는 것이 한순간 전에 생각했던 바로 그것과 동일하다는 의식이 없다면 표상의 재생은 의미가 없을 것이다. 지금 재생한 것이 이전에 했던 것과 동일한 것이라는 의식은 어느 때에서든 하나의 새로운 전체를 형성하도록, 순차로 재생된 것을 하나의 표상으로 통일하게 해준다(A103). 이를테면, 수를 셀 때에, 3을 셀 때나 이어서 4를 셀 때나 동일한, 하나에다 하나를 순차적으로 덧붙이는 동일한 작용에 의해 양을 산출하고 있다는 의식이 없이는 수 자체를 인식하지 못할 것이다. 수의 개념은 이 종합의 통일 의식에서 성립한다. 대상이 필연적으로 이루는 통일성은 표상들의 잡다의 종합에서의 의식의 형식적 통일성이며, 대상을 인식한다는 것은 직관의 잡다에서 종합적 통일을 성취하는 것이다(A105).

이와 같이 잡다를 종합하는 능동적인 힘을 칸트는 상상력이라고 부른다(A120). 상상력은 대상이 지금 여기에 있지 않아도 그것을 직관에 표상하는 능력이다(B151). 상상력이 지각에 직접적으로 그 힘을 행사하여 직관의 잡다를 하나의 상으로 만드는 것이 포착의 종합이고, 상상력이 지각들의 전 계열을 마음 속에 그려주는 작용이 재생의 종합이다. 표상들이 아무 규칙 없이 재생된다면 그것은 무규칙적인 표상들의 집적일 뿐 통일적인 인식이 되지 못하므로, 표상들의 재생은 하나의 규칙을 가져야 하며, 이 규칙에 따라서 표상들은 상상력 안에서 서로 결합된다.

3. 개념의 구성과 도식

칸트는 도식(圖式, schema)과 도상(圖像, image)을 구분한다. 상상력의 종합은 개별적인 직관이 아니라 통일적 규정을 지향하는 만큼, 개별적인 도상은 일반적인 도식과 구별된다.

이를테면 ● ● ● ● 은 수 4의 도상이다. 반면에 주어진 수가 무엇이든지간에, 그 수를 도상으로 나타내는 절차 또는 방법의 표상은 도식이다. 칸트는 개념에 그것의 도상을 제공하는 상상력의 보편적인 작용 방식의 표상을 그 개념에 대한 도식이라고 부른다. 칸트는 다음과 같이 말한다.

> 우리의 순수한 감성적 개념의 기초에는 대상의 도상이 아니라 도식이 놓여 있다. 삼각형이라는 개념 일반에 적합한 어떠한 도상도 있을 수 없다. 삼각형 개념은 모든 삼각형, 곧 직각삼각형, 예각삼각형 등을 모두 포괄하는 것인데, 어떤 형상도 이 개념의 보편성에는 미치지 못하고, 단지 그것의 일부에 국한된다. 삼각형의 도식은 다른 곳이 아닌 사유 속에서만 실존할 수 있고, 그것은 공간상의 순수한 형태들에 관한 상상력의 종합의 규칙을 뜻한다. (B 180)

종이 위에 또는 머릿 속에 그려진 구체적인 삼각형은 그 자체로는 삼각형의 도식이 아니다. 도식은 삼각형의 개념에 종속하는 절차의 표상이다. 그려진 삼각형을 도식의 관점에서 파악할 때, 우리는 보편적인 삼각형 개념에 따른 구성 활동에만 주목한다. 곧 그려진 개별적 삼각형의 성질들을 고려하는 것이 아니라, 구성의 보편적 조건들에 의해 규정된 삼각형에 대해 보편적으로 타당한 특성만을 고려한다. 도식으로서의 삼각형을 직관 중에 구성함으로써, 우리는 삼각형 개념의 보편성을 손상시키지 않고 삼각형 개념을 직관 중에서 선험적으로 인식할 수 있다. 도식의 구성을 통하여 수학은 대상에 관한 선험적 인식에 이른다.

도식은 보이지 않는 개념에 보이는 형상을 제공하는 규칙 또는 절차의 표상이다. 규칙 또는 절차의 표상으로서 도식은 필연적으로 역동적인 성격을 지닌다. 이것은 개념을 직관에 나타내는 수학적 구성이 정적인 것이 아니라 역동적인 과정임을 시사한다. 수는 하나에 동종적인 하나를 연속적으로 보태어 가는 절차 또는 규칙을 포괄하는 표상이다(B182). 산수나 대수의 기호를 통해서 구성되는 것 역시 도상이 아니라 개념의 규칙, 곧 도식이다. 1, 2, 3, 4,...는 잇달아 같은 방식으로 계속하여 다음 것이 생겨난다는 규칙의 표상이다.

칸트는 도식이 순수한 선험적 상상력의 생산물이라고 한다(B181). 도식은 개념에 형상을 제공하는 상상력의 보편적 절차의 표상이다. 개념에는 모종의 규칙이 수반되며, 개념을 안다는 것은 그 개념에 포섭되는 모든 대상의 대표로 간주될 수 있는 도상을 산출할 수 있는 규칙 또는 절차를 안다는 것을 뜻한다.

선험적 구성은 경험적 구성의 논리적 가정 또는 선험적 조건이라고 할 수 있다. 삼각형의 경험적 구성이 가능한 것은, 지성 속에서 삼각형 개념의 도식이 선험적으로 구성되기 때문이다. 칸트에 의하면, 삼각형의 개념에 대응하는 대상을 순수 직관 내에서 상상력에 의해 그려내거나 경험적 직관 안에서 순수 직관에 준해서 종이 위에 그려내거나, 그 두 경우 모두 도형의 본보기를 경험에서 빌려오지 않기 때문에 선험적인 것은 마찬가지이다(B741). 선험적인 도식에 따라 경험 속에서 삼각형을 산출했다면, 이것은 선험적으로 순수 직관 속에 구성된 삼각형의 도식을 경험에서 복제한 것이라고 할 수 있을 것이다.

한편, 선험적 구성은 경험적 구성을 통해 객관적 실재성을 부여받는다. 칸트는 선험적 구성이 일체의 경험적인 것으로부터 순수하고 완전히 선험적으로 마음에서 표상된다는 것이 확실하다고 해도, 이것들의 필연적인 사용이 경험의 대상에서 제시되지 않는다면 객관적인 타당성을 지니지 못할 것이라고 한다. 공간과 시간의 표상은 경험의 대상들을 불러

오는 재생적 상상력과 관계 맺는 순전한 도식으로서, 경험의 대상들이 없으면 아무 의미도 갖지 못하며, 이런 사정은 다른 모든 개념에 대해서도 마찬가지라는 것이다(B195). 수학은 비록 선험적으로 성립된 것이기는 하지만, 감관에 현전하는 현상인 형태를 구성함으로써, 이를테면 크기를 나타내는 수를 손가락이나 주판알의 형태로 경험 속에서 나타냄으로써 객관적 실재성의 요구를 충족하려 한다(B299).

경험적 구성의 결과물, 이를테면 종이 위에 그려진 삼각형이 자동으로 삼각형의 도식의 표상으로 인식되는 것은 아니라는 것에 주의할 필요가 있다. 주어진 하나의 삼각형은 단순한 도상으로 파악될 수도 있다. 이때는 주어진 삼각형의 보편적 특성과 고유한 개별적 특성이 모두 관심의 대상이 된다. 주어진 삼각형을 도식의 표상으로 해석할 때, 그것은 구성 가능한 모든 삼각형을 대표하는 패러다임으로 간주되며, 그 도형 고유의 개별적 특성은 무시된다.

4. 개념의 구성과 수학적 인식의 보편성 및 필연성

칸트는 수학적 인식이 보편성과 필연성을 지닌 인식, 곧 인식 주체에게 주관적인 확실성을 지니는 인식이라고 본다. 칸트에게 인식이 보편성과 필연성을 지닌다는 말은 인식의 근거가 경험에 있지 않다는 것을 함의한다. 칸트에 의하면, 경험은 우리에게 무엇이 현존하는가를 가르쳐 주지만, 그것이 반드시 그러해야만 하며 다르게 있을 수 없다는 것을 가르쳐 주지는 않는다(A1). 내적 필연성을 갖는 보편적인 인식은 경험으로부터 독립적으로 자명하고 확실해야 한다(A2). 경험은 판단에 엄밀한 보편성을 주지 못하고 귀납에 의거하여 상대적인 보편성만을 준다. 단 하나의 예외 가능성도 인정되지 않는 것으로 생각된다면, 그 판단은 경험에서 도출된 것이 아니다(B4). 보편성과 필연성은 경험적 인식이 아닌 선험적 인식의 특성이다.

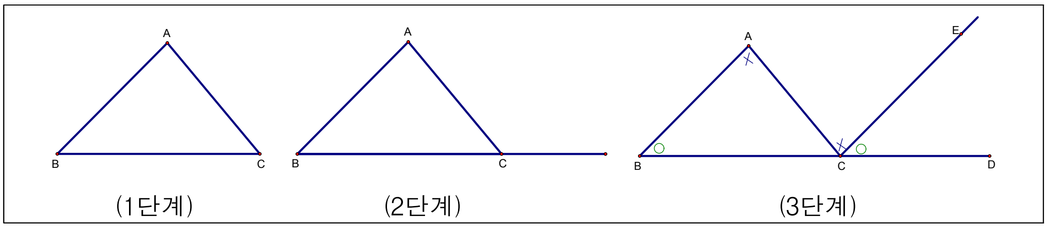
수학의 확실성은 정의, 공리, 증명이라는 수학 고유의 방법과 밀접한 관련이 있다. 증명에 의해 정리는 그 전제가 되는 공리들과 같은 정도의 확실성을 지니는 것으로 간주되어 왔다. 칸트는 정의, 공리, 증명은 수학적 인식이 개념의 구성에 의한 인식이기에 가능한 수학 고유의 방법적 특징이라고 본다. 여기서 수학 고유의 특징이라고 하는 것은, 다른 학문들은 그와 같은 방법적 특징을 지닐 수 없다는 것이다. 서양사에서 정의, 공리, 증명이라는 수학적 방법은 지식의 확실성을 확보하는 일반적인 방법으로 여겨져 왔다. 중세에 신학자들은 이와 같은 방법으로 신의 존재를 입증하려고 시도하기도 하였고, 스피노자의 「기하학적 질서에 따라 증명된 윤리학」과 같이 수학의 방법론을 차용하여 주장의 확실성을 확보하려 하기도 하였다(Grabiner, 1988). 칸트는 수학의 정의, 공리, 증명의 방법은 개념의 구성에 바탕을 둔 수학 고유의 방법으로 그 본래의 의미에서는 철학에서 수행될 수도 모방될 수도 없다고 한다(B755).

먼저, 정의에 대해서 살펴보자. 정의는 한 사물의 상세한 개념을 그것의 한계들 내에서 근원적으로 제시하는 것이다(B755). 여기서 '상세함'은 징표들이 명료하고 충분한 것을 뜻하고, '한계'는 개념에 속하는 것 이외의 것이 그 가운데에 있지 않다는 엄밀함을 뜻하고, '근원적'은 이 한계 규정이 무엇인가로부터 파생된 것이 아니어서 별도의 증명을 필요로 하지 않음을 뜻한다. 경험적 개념은 그 한계가 엄밀하게 규정되지 않으므로 이러한 요구를 만족하는 방식으로 정의될 수 없다. 그러므로 정의가 가능한 것은 선험적 개념뿐이다. 그런데 실체, 원인과 같은 선험적인 철학적 개념도 직관에 분명하게 구성될 수 없으므로, 주어진 개념의 분명한 표상이 상세하게 전개될 수 있는 것인지 알 수가 없다. 결

국 정의할 수 있는 개념으로 남는 것은 선험적으로 구성될 수 있는 종합을 함유하는 수학적 개념뿐이다. 수학은 개념을 선험적으로 직관에 나타내는 것으로, 수학에서의 정의는 다른 별도의 설명으로부터 도출된 것도 아니며, 직관에 제시된 개념의 표상은 개념보다 더 많은 것을 포함하지도 더 적은 것을 포함하지도 않는다(B759). 수학에서의 정의는 직관에서의 구성을 바탕으로 한 개념의 결합을 통해 이루어지며, 이 점에서 종합적 정의(synthetic definition)라고 할 수 있다(Carson, 2006). 수학적 정의의 이러한 성격으로부터, 칸트는 수학적 정의가 표현 형식상으로는 정밀성에 있어서 결함이 있을 수 있지만 내용상으로는 원칙상 그 안에 아무 오류를 지니지 않는다고 한다. 수학적 정의의 확실성은 개념의 구성이라는 수학적 인식의 특성에 기원한다.

둘째로, 공리에 대한 칸트의 견해를 살펴 보자. 공리는 '직접적으로 확실한 선험적인 종합 원칙'을 말한다. 한 개념은 다른 개념과 종합적이면서 직접적으로 결합되지 않는다. 한 개념을 넘어서서 다른 개념으로 갈 수 있으려면 그 둘을 매개하는 제3의 무엇인가가 필요하다. 철학은 순전히 개념에 의한 이성 인식이므로, 이와 같은 제3의 무엇인가를 상정할 수 없다. 따라서 철학에서는 공리라는 명칭을 사용하는 어떤 원칙도 마주칠 수 없다. 그러나 수학은 직관에서 개념의 구성을 매개로 하여 대상의 술어를 선험적으로 그리고 직접적으로 결합할 수 있다(B760). 이를테면 '세 점은 항상 한 평면 위에 있다'와 같이, 직관의 구성을 바탕으로, 세 점과 평면을 직접적으로 연결할 수 있다. '두 점 사이에는 단 하나의 직선이 있다'는 공리도 그 자체로 원리로부터 인식되는 것이 아니라 순수 직관에서 인식될 뿐이다(B 357). 그러므로 공리의 바탕 역시 개념의 구성에 있다.

끝으로 증명에 대해 살펴보자. 경험적인 근거들은 아무런 명증적인 증명을 제공할 수 없다. 또 철학에서 하는 것과 같은 순전히 개념에 의한 논변에서는 직관적인 확실성이 나올 수 없다. 결국, 수학에서만 정의가 가능했던 것과 마찬가지로, 수학만이 증명을 포함할 수 있다. 수학은 개념으로부터가 아니라, 개념의 구성, 곧 개념에 대응해서 선험적으로 주어질 수 있는 직관으로부터 인식을 도출하기 때문이다.



[그림 2] 삼각형의 내각의 합 (2)

예를 들어, [그림 2]가 나타내는 바와 같은, 구성을 통하여 삼각형의 내각의 합은 2직각이라는 종합 판단에 이르게 되는데, 이 구성의 과정이 증명의 바탕이 된다.

① 삼각형 ABC를 작도한다.
② 삼각형 ABC의 한 꼭지점 C에서 변 BC의 연장선을 긋는다.
③ 점 C에서 변 AB에 평행한 직선을 긋는다.
④ ∠ABC=∠ECD이고, ∠BAC=∠ECA이다.
⑤ ∠ABC+∠BAC+∠ACB=∠ECD+∠ECA+∠ACB=∠DCB=2직각.

이와 같은 증명에 사용되는 삼각형의 작도 가능성, 변 BC의 연장선의 작도 가능성, 변 AB에 평행한 직선의 작도 가능성, 엇각과 동위각이 같다는 원리는 선험적 직관에 그 기원을 두고 있는 자명한 공리나 요청으로 받아들여진다. 위의 경우에 증명은 본질상 개념의 구성 과정, 곧 개념의 직관에의 나타남의 과정, 직관의 안내를 받은 추리의 연쇄(B745)를 차례로 기술한 것과 본질상 다르지 않다. 증명이 개념의 직관에의 나타남에 바탕을 두고 있다는 것은, 도형이 기하학의 증명에서 필수적임을 뜻한다.

앞에서 기하적 구성을 시각적 구성이라고 한다면, 산수(대수)적 구성은 기호적 구성이라고 하였다. 칸트에 의하면, 방정식을 풀 때 등식의 성질에 의해 식을 변형하여 참값을 구해 내는 과정도 기호로 양의 관계에 대한 개념을 직관에서 제시하는 특수한 구성이다(B762). 결국, 기하든 산수든, 수학에서 종합을 이끄는 것은 선험적 구성이고, 거기서 모든 추론은 직접적으로 순수 직관에 의해 인도될 수 있다. 그러므로 증명의 바탕은 다름 아닌 개념의 구성이다.

Ⅴ. 논 의

이 장에서는 앞에서 고찰한 칸트의 감성론과 지성론, 그리고 수학 인식론이 수학교육과 관련하여 지닌 의의를 인간의 교육에서 수학교육의 필연성과 개념 학습 지도의 문제와 관련하여 살펴본다.

수학교육의 근본적인 질문의 하나인 수학적 개념을 이해하는 일과 인격의 완성을 추구하는 일의 관계 또는 수학적 지식의 구성과 인간 본성의 회복의 관계는, 강현영(2007), 유충현(2008), 남진영(2008)의 연구에서 볼 수 있는 바와 같이, 마음과 수학의 관계에 대한 포괄적이고 종합적이고 심층적인 분석을 필요로 한다. 이것은 칸트의 감성론과 지성론을 넘어서 이념에 의한 순수이성의 작용, 실천이성, 판단력 일반에 대한 칸트 이론에 대한 심층적인 분석을 요하는 것으로 보인다. 특히 무조건적 통일, 자연의 합목적성, 최고존재자와 같은 이념을 가지고 이성이 수행하는 기능의 분석은 이와 같은 문제 해명에 단서를 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 그러나 이 논문에서 살펴본 칸트의 감성과 지성에 대한 이론만으로, 도덕성을 포함한 인성교육과 수학교육의 관련을 구체적으로 설명하기 어렵다.

칸트의 감성과 지성에 대한 이론으로 인성교육과 수학교육의 관련을 해명하기는 어렵지만, 이로부터 인간이 수와 도형의 교육을 할 수 밖에 없는 한 가지 설명을 찾을 수는 있다. 칸트에 의하면, 인간은 시간과 공간이라는 순수 직관을 가지고 현상을 수용하고 그것을 수학적인 양과 질의 범주로 인식하는 존재이다. 우리의 이성은 사물 그 자체와 접하여 시간과 공간 직관에 현상의 세계를 구성하고 이를 수학적인 범주로 종합한다. 시간 직관으로 수용된 현상에 대한 지성의 종합으로부터 수와 산수가 생겨나고, 공간 직관에 수용된 현상에 대한 지성의 종합으로부터 도형과 기하가 생겨난다. 인간의 세계 인식과 수와 도형은 불가분의 관계에 있으므로, 세계 인식 능력 곧 사고력의 도야를 교육의 목적으로 삼는 한, 인간은 수와 도형의 교육을 하지 않을 도리가 없다. 그것이 인간이 세계를 인식하는 방식이요 사고하는 방식이기 때문이다.

플라톤의 철학이 엘리트 교육, 고등 교육에서 수학교육의 중요성과 필연성을 뒷받침하는 철학으로 해석될 수 있다면(임재훈, 1998), 칸트의 철학은 모든 인간을 대상으로 한 교육, 아동 교육에서 수학교육의 중요성과 필연성을 뒷받침하는 철학으로 해석될 수 있다.

칸트의 감성론과 지성론은 전문가 양성을 위한 전문교육이나 직업교육이 아닌 모든 인간을 대상으로 한 사고력 도야를 위한 교육에서, 수와 도형이 필수적인 교육 내용이 될 수밖에 없는 사정을 해명한다. 인류의 교육사 속에서 아동교육에서 수와 도형의 교육이 기초교과로서 강조되어 온 것에는 그럴 수밖에 없는 인식론적인 이유가 있는 것이다. 이 점에서, 교육에 관한 한 칸트보다 더 훌륭한 칸트주의자(Boyd, 2008)라는 평을 받는 페스탈로찌가 모든 인간의 보편적 교육으로서 아동 교육을 설계하면서 수학을 사고력을 도야하는 정신 체조로서 만인의 도야재로 쓰기에 부족함이 없는 교과로 보고, 수, 형, 어를 기초 교과로 삼은 것은 주목할 만하다. 국어로 대표되는 언어와 산수와 기하로 대표되는 수학은, 아동들이 배워야 하는 여러 교과 중의 두 교과가 아니라, 아동의 사고 형식의 교육을 이끄는 쌍두마차에 비유할 수 있는 것이다. 수와 도형과 인간 사고의 선험적 형식은 불가분의 관계에 있으므로, 모든 인간을 대상으로 한 사고 교육은 원칙상 수와 도형의 교육과 분리될 수 없다.

한편, 칸트와 구성주의자들은 존재론적 실재에 별로 관심을 두지 않고 인간의 능동적인 활동을 수학적 인식에서 매우 중요한 것으로 본다는 점에서 공통적이다. 이를테면, 칸트의 도식과 도상의 구분은 Piaget의 사고의 조작적 측면(schème)과 형상적 측면(schéma)의 구분과 매우 유사하다. 우정호(2000)에 따르면, schème과 schéma는 Piaget의 지적 구조의 질적인 발달에 대한 전체적인 이론의 핵심적인 생각과 밀접하게 연결되어 있으며 풍부하고 포괄적인 의미를 내포하고 있는 관념이다. 칸트의 도식과 도상의 구분과 유사하게, Piaget의 schème은 조작의 일반적 구조를 뜻하고, schéma는 조작의 결과의 단순화된 표상을 나타낸다. 행동의 일반적인 조정으로부터 반영적 추상화에 의한 조작적 schème의 형성은 수학적 사고 구조 발달의 핵심이며, 표상적 schéma는 사고에 있어서 부차적인 의미를 지닐 뿐이다. 이와 같은 Piaget의 관점은 수학적 구성의 핵심이 도상이 아닌 도식의 구성에 있다는 칸트의 견해와 매우 유사하다. 이와 같은 공통성에 주목해 보면, 구성주의는 칸트의 인식론에 그 근거를 두고 발전된 것으로 볼 수 있다.

그러나 양자의 차이점에 주목해서 보면, 구성주의는 칸트 철학과 대립적인 관계에 있는 것으로 파악될 수 있다(남진영, 2008; 우정호, 2000; 유충현, 2008; Campbell, 2000). 이를테면 상대주의적인가 그렇지 않은가, 선험적인 영역을 인정하는가 그렇지 않은가를 판단 기준으로 삼을 때 양자는 대립되는 것으로 파악된다. 시간과 공간이 인간에게 선험적으로 주어지는 것인지 아니면 이또한 인간이 만들어낸 것인지, 순수직관이나 순수지성이 인식의 궁극적인 전제인지 아니면 기억 또는 재생 능력, 감각 운동 능력 또는 감각 인상으로부터 무엇인가를 추상하는 능력이 궁극적인 전제인지에 대해서도 칸트와 구성주의자, 이를테면 Glasersfeld(1995, 1996)의 견해 사이에 차이가 있다. 그러나 이와 같은 차이점의 상당부분, 이를테면 시간이 선험적인 순수 직관인지 아니면 인간이 구성한 일종의 관념인지는 인식론의 심각한 문제일지 모르나, 양자 모두 시간 자체나 시간과 수의 관계를 부정하는 것이 아닌 이상, 시간이 순수 직관인가 아닌가에 대한 양자의 견해 차이가 산수 교육에서 인식론에서와 같은 정도로 심각한 차이를 파생하는지는 그다지 분명하지 않다.

선험적 구성이든 경험적 구성이든 그 구성 과정에서 주체의 능동적 기능은 부정할 수 없다. 삼각형의 개념에 붙박혀 있는 규칙에 따라 실제로 삼각형을 그리는 절차는, 또 삼각형의 내각의 합에 관한 앎에 이르기 위해 한 삼각형을 그린 후 한 꼭짓점에서 연장선과 평행선을 그리는 절차는, 그것이 내적 직관 속에서 이루어지든 종이 위에서 이루어지든 본질상 다르지 않다. 이렇게 보면, 선험적 구성과 경험적 구성은, 직관 속에서 수행되는가 종이 위에서 수행되는가의 차이가 있을 뿐, 그 과정 자체가 다르지는 않다.

칸트의 개념의 구성, 곧 개념을 직관 속에 나타내는 것은 개념을 출발점으로 삼는다. 개념에서 출발하여 개념에 내재된 규칙이나 절차에 따라 개념의 도식을 직관 속에 제시하는 것이다. 칸트가 순수이성비판에서 수행한 작업은, 인식이 일어나는 시간적인 심리적 과정을 밝혀내려 한 것이라기보다, 인식이 일어나기 위해서 어떤 조건이 논리적으로 선행해야 하는가를 분석한 것이다. 경험 속에서 인간은 현상을 시공간 속에서 파악하는데, 이것이 가능하려면 시간과 공간이라는 틀이 논리적인 선행 조건으로 인간의 감성 속에 있어야 한다는 식이다.

이와 달리 구성주의 교육론자들의 주된 관심은, 이미 주어진 경험의 논리적 분석을 통한 선험적 조건의 해명보다, 실제로 일어나는 경험의 과정 자체, 경험에서 일어나는 인식의 과정 자체에 초점이 맞추어져 있다. 이를테면, Steffe(2002, 2003, 2004)의 연구에서 볼 수 있는 바와 같이, 아동 개개인의 분수 관념을 이해하고 아동들이 어떤 상황 속에서 어떻게 그것을 형성, 변화시켜 가는지를 알아보는데 주된 관심이 있다. 개념에서 출발하여 그것을 직관 속에 구성하는 것보다, 아동이 자신의 현재 인지 구조를 출발점으로 하여 주어진 상황 속에서 능동적으로 활동하면서 경험하는 앎의 과정에 더 관심을 둔다고 할 수 있다. 이때 교사가 아동이 형성하기를 바라는 개념은, 출발점이 아니라 일종의 기대되는 도착점으로 여겨진다.

이와 같은 개념 형성의 경험적 과정은 개념을 전제하고 시작하는 개념의 구성 과정과 동일하지 않으며 어느 하나가 다른 하나로 환원되지도 않는다. 개념 형성의 경험적 과정에서는, 감각 인상들 속에서 무엇인가를 추출하는 경험에서의 추상화 과정이 중시된다. 이를테면, 여러 가지 삼각형 모양의 사물을 관찰하고 거기서 얻은 감각 인상들로부터 공통성과 같은 무엇인가를 추상하여 삼각형 개념을 형성하는 과정을 중시하게 된다. 이와 같은 경험적 과정의 해명은 칸트의 철학적 작업의 주된 관심이 아니다. 수학적 지식의 필연성과 보편성을 받아들이고 그것이 그러한 이유를 선험적으로 해명하려 한 칸트는, 삼각형의 내각의 합에 대하여 각의 측정에 의해서는 단지 경험적 명제를 얻게 되는데 이런 명제는 아무런 보편성이나 필연성을 함유하지 못할 것이므로, 이런 것에 대해서는 "전혀 이야기할 것이 없다(B746)"고까지 말한다.

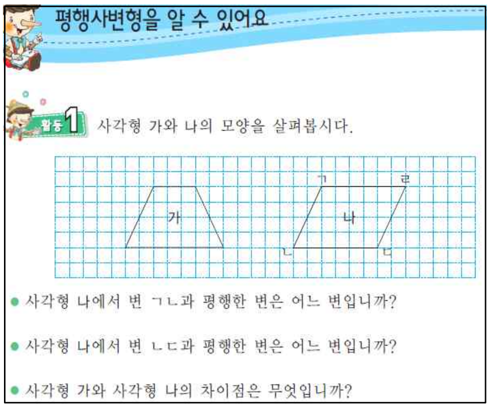
개념에서 출발하여 직관에 개념을 나타내는 선험적 구성과 감각 인상으로부터의 추상화를 통한 개념 형성의 경험적 과정은 서로 다른 평면에 속한다. 그러므로 칸트의 선험적 관심과 구성주의 교육론자들의 경험적 관심은, 어느 한 쪽이 다른 쪽 평면을 부정하지 않는 한, 한없이 복잡하고 복합적인 총체로서의 인간의 인식을 더 종합적으로 이해하는 데 기여하는 양립가능한 보완적 관계로 파악될 수 있다.

칸트의 논의가 경험의 과정보다 그것의 선험적 근거를 해명하는데 있다면, 수학적 인식에 대한 그의 견해로부터 경험 속에서 이루어지는 교육의 과정에 어떤 시사를 얻을 수 있을 것인가? 수학적 인식은 개념의 구성이라는 칸트의 견해가 지니는 함의를 학교수학의 몇 가지 예를 통해 살펴보겠다. 학교수학에는 감각 인상으로부터 추상화에 의해 개념을 형성하는 과정이 포함된다. 이를테면 초등학교 1학년 교과서에 나오는 [그림 3]은 개념에서 출발하여 그 개념을 직관에 나타내는 선험적 구성보다 감각 인상으로부터의 추상화를 통한 개념 형성에 더 부합하는 것으로 보인다.

학교수학에는, 이러한 일차적인 개념 형성 활동과 더불어, 그 이후에 이 일차적으로 형성된 개념을 바탕으로 한 심화된 후속 탐구도 포함된다. 이와 관련하여 개념을 출발점으로 하는 선험적 구성에 대한 칸트의 견해는 시사하는 바가 있다. 선험적 구성은 구성의 결과로 나타난 그림에서 오로지 개념 구성의 절차에 붙박혀 있는, 개념 그 자체에만 속하는

일반적인 속성에 주목할 것을, 달리 말해 그 그림이 지닌 개별적인 고유한 속성에 주목하지 않을 것을 요청한다. 그런데 아동들이 눈앞에 주어진 그림을 도식으로 보지 못하고 도상으로 볼 위험성이 있다. 그러므로 교사는 아동들이 주어진 그림을 도상이 아닌 도식으로 파악하는 마음의 습관을 기르도록 하는데 주의를 기울일 필요가 있다. 이를 다음의 예를 통하여 살펴보자.

[그림 3] 도형 개념의 형성
(수학 1-1, p. 37)



[그림 4] 사다리꼴과 평행사변형
(수학 4-2, p. 52)

초등학교 4학년에서는 사다리꼴, 평행사변형, 마름모의 개념을 차례로 학습하고, 그 과정에서 사각형의 포함관계, 이를테면 직사각형은 사다리꼴에 포함된다는 것을 학습한다. 사다리꼴 개념을 형성한 후, 뒤이어 평행사변형 개념 형성을 도모하면서, 교과서에서는 [그림 4]와 같은 활동을 제시한다.

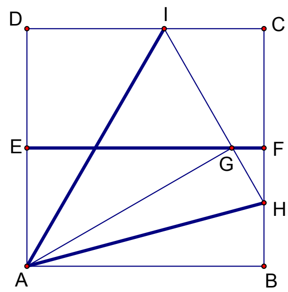
이때 ‘사각형 가’는 이전 차시에 학습한 사다리꼴 개념의 도식 또는 사다리꼴 개념의 패러다임으로 제시된 것으로 보인다. 아동이 세 번째 질문 ‘사각형 가와 사각형 나의 차이점은 무엇입니까?’를 탐구하는 과정에서, 사각형 가를 사다리꼴 개념의 도식으로 본다면 차이점으로 평행한 변의 쌍의 개수의 차에 주목하게 된다. 그러나 사각형 가를 도식으로 보지 못하면, 사각형 가가 지니고 있는 개별적인 특수한 속성에 주목하게 된다. 이 경우 아동은 ‘사각형 가는 아랫변과 위변의 길이가 다르지만, 사각형 나에서는 아랫변과 윗변의 길이가 같다.’, ‘사각형 가는 두 옆변이 가운데 쪽으로 기울어져 있지만 사각형 나는 그렇지 않다.’, ‘사각형 가는 두 밑각의 크기가 같지만 사각형 나는 그렇지 않다.’, ‘사각형 가는 점점 뾰족해지지만 사각형 나는 그렇지 않다.’, ‘사각형 가는 안정감이 있지만 사각형 나는 쓰러질 것 같다.’와 같이, 지각적 차이를 사각형 가와 사각형 나의 차이점으로 생각할 수 있다. 개념을 도식으로 보는 관점의 형성은 경험적 추상화를 통한 초기 개념 형성으로 완결되는 것이 아니라, 그 개념이 사용되는 이후의 모든 맥락에서 주어진 개념의 예를 개념의 전형으로 파악하는 학습 경험을 통해서 이루어질 수 있다. 이렇게 볼 때, 개념의 구성이라는 칸트의 견해는, 수학 학습 지도와 관련하여 경험적 추상화를 통한 개념의 일차적인 형성을 넘어서서 개념을 도식으로 보는 관점의 형성을 요청하는 것으로 해석될 수 있다.

감각 지각을 바탕으로 한 경험적 판단을 넘어선 선험적 구성이 필요한 상황은 이 외에

도 많다. 초등 수학 영재 교육에서 활용되기도 하는 다음 종이접기를 통한 도형 탐구 활동도 그러한 상황의 예가 될 수 있다.

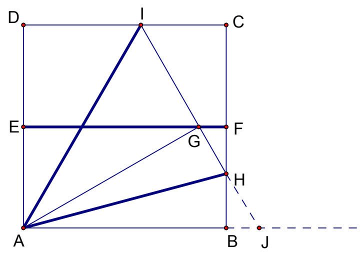
> 정사각형 모양의 색종이를 다음과 같이 접는다.
> (i) 가로로 변 AB가 변 DC에 겹치게 접는다(접힌 선 EF),
> (ii) 점 B가 선 EF 위에 오도록 접는다(접힌 선 AH),
> (iii) 점 D가 선 EF 위에 오도록 접는다(접힌 선 AI).
> (iv) 점 I와 점 H를 잇는다.

∠HGI의 크기를 구하라고 하면, 단순히 종이가 접혀 있는 모양을 보고 180° 라고 답하는 학생들이 있다. 또 ∠AIG의 크기를, 선분 CI가 선분 IA 위에 겹쳐지게 접어 ∠DIA, ∠AIG, ∠CIG가 포개어지는지 눈으로 관찰하고 60° 라고 답하는 학생들이 있다. 초등 수학 영재 교육을 받는 학생들 중에도 개념의 구성, 곧 개념에 붙박힌 규칙과 절차에 따라서 생각하지 않고, 감각 지각에 의존한 경험으로부터의 추상화로 60° 라는 답을 구하고 마는 경우들을 본다. 이것은 감각 지각에 바탕한 경험으로부터의 추상화에 해당하며, 이렇게 얻어낸 60° 라는 답은, 칸트의 관점으로는, 경험적 명제일 뿐이다.



[그림 5] 종이접기

이와 같은 지각적 관찰에 의해 경험적 명제를 얻어낸 것 자체는 그릇된 것이 없다. 지각적 관찰을 바탕으로 추측하는 경험은 수학적으로나 교육적으로나 건전하고 필요한 것이다(Polya, 1962). 그러나 선험적 구성이 결여된 채, 감각 지각으로부터 추상화에 의한 경험적 명제의 구성으로 탐구가 끝난다면 불충분할 것이다. 주어진 규칙 또는 절차에만 주목하면서 감각 지각에서 얻어지는 특수한 성질을 무시하는 선험적 도식 구성의 관점에서 볼 때, ∠CIG가 ∠AIG와 같다는 것은 감각 지각에 의해 정당화되는 것이 아니라 주어진 도형을 만드는 규칙으로부터 끌어내어야 할 것이다. [그림 6]에서와 같이 주어진 도형 구성의 규칙에 의존하여 AB의 연장선, IH의 연장선을 구성하고, △ADI, △AGI와 합동인 △AGJ를 구성함으로써 평행선의 성질에 의해 ∠CIG가 ∠AIG와 같음을 입증할 수 있다.



[그림 6] △AGJ의 구성

칸트에 의하면, 수학적 인식은 개념의 구성, 곧 개념을 직관에 나타내는 것이다. 이와 같은 칸트의 견해는 수학 학습 지도와 관련하여, 경험에서의 추상화를 넘어서서, 주어진 대상을 개념의 도식으로 보는 마음의 습관을 형성하도록 학습자를 이끌 것을 요청하는 것으로 해석될 수 있다.

참 고 문 헌

강현영 (2007). **심성 함양으로서의 수학교육-F. Klein의 함수적 사고 교육을 중심으로.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

교육과학기술부 (2011). **수학 1-1.** 서울: 두산동아.

교육과학기술부 (2011). **수학 4-2.** 서울: 두산동아.

김진형 (2003). 칸트의 직관과 수학의 기초. **철학탐구**, 15, 65-93.

남진영 (2008). **수학적 지식의 구성.** 서울: 경문사.

박갑현 (2001). **칸트에서 순수 지성의 수학적 원칙과 의식의 인식 활동.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

신춘호 (2005). **교육이론으로서의 칸트 철학: 판단력 비판 해석.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

우정호 (1995). Radical constructivism versus Piaget's operational constructivism in mathematics education. **대한수학교육학회 논문집,** 5(1), 1-17.

우정호 (2011). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울대학교 출판문화원.

유충현 (2008). **칸트의 선험철학과 수학교육.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이상헌 (2006). 수학적 구성과 선험적 종합판단. **칸트연구,** 18, 249-278.

이종권 (2005). 칸트에서의 직관과 구성. **철학탐구,** 17, 285-327.

임재훈 (1998). **플라톤의 수학교육철학 연구.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

장발보 (2003). **판단에 의한 자연과 자유의 연결.** 서울대학교 대학원 석사학위논문.

정혜진 (2004). **칸트 철학과의 관련에서 본 프뢰벨의 교과 이론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

홍진곤 (1999). **반영적 추상화와 조작적 수학 학습 지도.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Boyd, W. (1964). The history of western education. London: Adam & Charles Black. 이홍우, 박재문, 유한구 공역 (2008). **서양교육사.** 서울: 교육과학사.

Campbell, S. R. (2002). Constructivism and the limits of reason: Revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education, 21*, 421-445.

Carson, E. (2006). Locke and Kant on mathematical knowledge. In E. Carson & R. Huber (Eds.) *Intuition and the axiomatic method* (pp. 3-19). Dordrecht: Springer.

Dewey, J. & Mclellan, J. A.(1895). *The psychology of number and its application to methods of teaching arithmetic.* NY: D. Appleton and company.

Grabiner, J. V. (1988). The centrality of mathematics in the history of western thought. *Mathematics Magazine, 61*(4), 220-30.

Kant, I. (2009). The critique of pure reason. (J. M. D. Meiklejohn Trans.).

eBooks@Adelaide. Retrieved January, 11, 2012 at http://ebooks.adelaide.edu.au/k/kant/immanuel/k16p/

Kant, I. (1781). Kritik der reinen vernunft. 최재희 역 (1972). **순수이성비판.** 서울: 박영사.

Kant, I. (1781). Kritik der reinen vernunft. 백종현 역 (2006). **순수이성비판.** 서울: 아카넷.

Major, U. (2006). The relation of logic and intuition in Kant's philosophy of science, particularly geometry. In E. Carson & R. Huber (Eds.) *Intuition and the axiomatic method* (pp. 47-66). Dordrecht: Springer.

Piaget J. (1977). *Psychology and epistemology: towards a theory of knowledge.* (A. Denoël, Rosin, Trans.). NY: Penguin Books.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving.* NY: Wiley & Sons, Inc.

Rechter, O. (2006). The view from 1763: Kant on the arithmetical method before intuition. In E. Carson & R. Huber (Eds.) *Intuition and the axiomatic method* (pp. 21-46). Dordrecht: Springer.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 267-307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5, *Journal of Mathematical Behavior, 22,* 237-295.

Steffe, L. P. (2004), On the construction of learning trajectories of children: the case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: a way of knowing and learning.* London: The Falmer Press.

von Glasersfeld, E. (1996). Aspects of radical constructivism and its educational recommendations. In L. P. Steffe, P. Nesher, G. A. Goldin & B. Greer, (Eds.) *Theories of mathematical learning* (pp. 307-314). Mahwah: Lawrence Erbaum Associates.

<Abstract>

Mathematical Cognition as the Construction of Concepts in Kant's Critique of Pure Reason

Yim, Jaehoon[5)]

Kant defines mathematical cognition as the cognition by reason from the construction of concepts. In this paper, I inquire the meaning and the characteristics of the construction of concepts based on Kant's theory on the sensibility and the understanding. To construct a concept is to exhibit or represent the object which corresponds to the concept in pure intuition apriori. The construction of a mathematical concept includes a dynamic synthesis of the pure imagination to produce a schema of a concept rather than its image.

Kant's transcendental explanation on the sensibility and the understanding can be regarded as an epistemological theory that supports the necessity of arithmetic and geometry as common core in human education. And his views on mathematical cognition implies that we should pay more attention to how to have students get deeper understanding of a mathematical concept through the construction of it beyond mere abstraction from sensible experience and how to guide students to cultivate the habit of mind to refer to given figures or symbols as schemata of mathematical concepts rather than mere images of them.

Kew words: mathematical cognition, construction, intuition, concept, schema.

논문접수: 2012. 02. 29
논문심사: 2012. 03. 31
게재확정: 2012. 04. 14

5) jhyim@ginue.ac.kr