http://dx.doi.org/10.7236/JIWIT.2012.12.3.63
JIWIT 2012-3-9

화랑 문제의 최소 이동 경비원 수 알고리즘

The Minimum number of Mobile Guards Algorithm for Art Gallery Problem

이상운*, 최명복**

Sang-Un Lee, Myeong-Bok Choi

요 약 n개의 정점으로 구성된 화랑 P에 대한 최대 이동 경비원 수는 단순 다각형은 $\lfloor n/4 \rfloor$, 직각 다각형은 $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$ 이며, 최소 경비원수를 구하는 다항시간 알고리즘은 알려져 있지 않아 **NP-난제 (NP-Hard)**이다. 본 논문은 화랑 문제의 최소 이동 경비원 수를 구하는 다항시간 알고리즘을 제안하였다. 첫 번째로, 모든 정점에서 볼 수 있는 다른 정점으로 간선을 그린 가시성 그래프를 얻는다. 두 번째로 $\Delta(G)$인 정점 u와 $N_G(u)$에 있는 $\Delta(G)$ 정점 v를 선택하고 가시성 간선과 부속 간선을 삭제한다. 세 번째로, 남아 있는 부분 그래프 각각에 대해 정점 w_i를 선택하여 이동 경비원이 위치할 간선을 선택하였다. 제안된 알고리즘을 다양한 단순 다각형과 직각 다각형 화랑 문제에 적용한 결과 선형시간으로 최소 이동 경비원 수를 얻었다.

Abstract Given art gallery P with n vertices, the maximum (sufficient) number of mobile guards is $\lfloor n/4 \rfloor$ for simple polygon and $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$ for simple orthogonal polygon. However, there is no polynomial time algorithm for minimum number of mobile guards. This paper suggests polynomial time algorithm for the minimum number of mobile guards. Firstly, we obtain the visibility graph which is connected all edges if two vertices can be visible each other. Secondly, we select vertex u with $\Delta(G)$ and v with $\Delta(G)$ in $N_G(u)$ and delete visible edges from u,v and incident edges. Thirdly, we select w_i in partial graphs and select edges that is the position of mobile guards. This algorithm applies various art galley problems with simple polygons and orthogonal polygons art gallery. As a results, the running time of proposed algorithm is linear time complexity and can be obtain the minimum number of mobile guards.

Key Words : Art Gallery Problem, Polygon, Orthogonal Polygon, Stationary Guard, Mobile Guard

Ⅰ. 서 론

정점 (꼭지점 또는 모서리, n)과 간선 (벽, m)으로 구성된 평면상의 닫힌 볼록 다각형 (convex polygon, P) 화랑 (art gallery)에 대해 벽에 걸린 고가의 그림을 동시에 모두 감시하기 위해 몇 명의 이동 경비원 (guards)으로 충분한가? 이 문제를 이동경비 (mobile guard) 화랑 문제 (art gallery problem)라 한다.[1-4] 이 문제는 화랑 형

*정회원, 강릉원주대학교, 멀티미디어공학과
**종신회원, 강릉원주대학교 멀티미디어공학과
접수일자 2012년 4월 10일, 수정완료 2012년 5월 26일,
게재확정일자 2012년 6월 8일

Received: 10 April, 2012, Revised: 26 May, 2012,
Accepted: 8 June, 2012
Corresponding Author:cmb5859@gmail.com
Dept. of Multimedia Engineering, Gangnung-Wonju National University Wonju Campus, Korea

태에 따라 다각형 (polygon)과 직각형 (orthogonal)으로 구분되며, 다각형 공간 내부에 장애물 (hole)이 없는 단순 다각형 (simple polygon or a polygon without holes)으로 한정시킨다. 이동 경비는 경비원을 연속되는 2개 정점의 간선에 한정시켜 이동을 허용하는 경우 간선 경비 (edge guards), 연속되지 않는 2개 정점이 상호 볼 수 있는 가시성 간선인 대각선에 한정시켜 이동을 허용하는 대각 경비 (orthogonal guard)와 다각형 내부의 임의의 2개 지점 간에 이동하면서 순찰을 허용하는 선 경비 (line guard)로 분류된다.[5] 또한, 임의의 출발점에서 시작하여 다각형 내부의 모든 벽을 순찰하고 출발점으로 되돌아오는 최단경로를 찾는 최소 순찰원 경로 (watchman route)의 변형도 있다.

일반적으로 다각형에 대한 이동경비 문제는 충분한 인원 (상한 값)에 대해서는 $\lfloor n/4 \rfloor$ 으로 알려져 있으며, 최소 인원수를 찾는 문제는 NP-난제 (NP-Hard)로 다항시간으로 구하는 정확한 알고리즘이 제시되지 않고 있다.[6-8] 따라서 본 논문에서는 간선 또는 대각 경비에 한정시켜 최소 이동 경비원 수를 구하는 다항시간 알고리즘을 제안한다. 2장에서는 화랑 문제의 경비 유형과 이동 경비의 충분한 경비원수를 찾는 방법을 고찰한다. 3장에서는 최소 이동 경비원수를 찾는 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 제안된 알고리즘의 적합성을 검증한다.

II. 화랑 경비원 수 문제

화랑 경비원 수를 구하는 문제는 그림 1과 같이 크게 고정된 위치를 경비하는 고정식 (stationary)과 이동을 허용하는 이동식 (mobile)으로 분류된다. 고정식에는 정점 (모서리, 꼭지점)에 위치하는 정점 경비 (vertex guard)와 임의의 점에 위치하는 점 경비 (point guard)로 구분된다. 이동식에는 연속된 2개 정점간의 간선 (벽)에만 이동을 허용하는 간선 경비, 연속되지 않으면서 서로 볼 수 있는 두 정점간의 대각선에만 이동을 허용하는 대각선 경비, 다각형 내부의 임의의 두 지점을 잇는 선분 상에서 이동을 허용하는 선 경비가 있다. 또한, 출발점 s 에서 시작하여 다각형의 모든 벽을 감시하면서 순찰하고 다시 출발점으로 되돌아오는 최단 경로 사이클을 찾는 최단 순찰원 경로 문제가 있다.

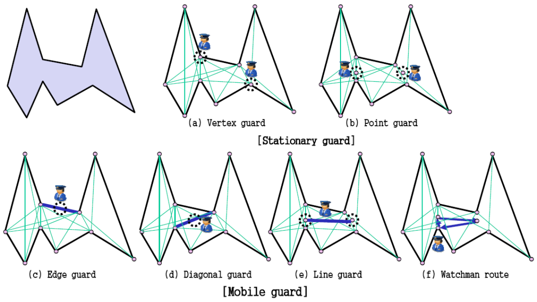
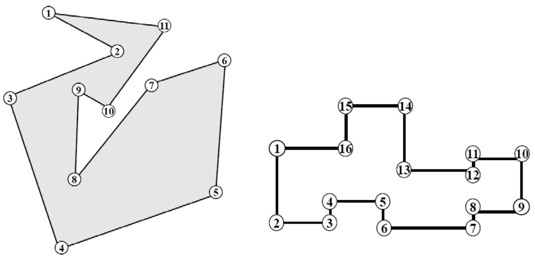


그림 1. 화랑 경비원 문제
Fig. 1. Art Gallery Guard Problem

본 장에서는 이동 경비의 간선, 대각선과 선 경비 중에서 간선 또는 대각선의 이동을 허용하는 이동경비에 한정한다. 이동 경비는 연속된 두 정점 u,v를 이동하면서 다각형 P의 벽을 볼 수 있으면 이 간선에서 경비할 수 있는 벽으로 간주한다. 즉, 정점 경비는 임의의 정점 u에서 볼 수 있는 모든 벽 $e_v(u)$을 대상으로 하는데 반해 이동 경비는 간선 또는 대각선 $\{u,v\}$의 임의의 지점에서 볼 수 있는 벽으로 $e_v(u) \cup e_v(v)$가 감시 대상이 된다.

n개의 정점으로 구성된 단순 다각형의 경우 Chvátal 정리에 따르면 정점 경비원은 $\lfloor n/3 \rfloor$의 인원으로 충분하며, 이따금 필요로 한다. 이동경비 문제에 대해서는 Toussaint[9]가 제안하였으며, O'Rourke[10]에 따르면 몇몇 다각형을 제외하고는 일반적으로 이동 경비 (간선 또는 대각선)를 수행하는데 충분한 인원은 $\lfloor n/4 \rfloor$이면 충분하다. 또한 직각 다각형에 대해서는 $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$ 이면 충분하다. 그러나 최소로 필요로 하는 인원 수를 구하는 다항시간 알고리즘은 알려져 있지 않아 NP-난제 (NP-Hard)이다.[6-8]

그림 2는 단순 다각형 P_1과 단순 직각 다각형 P_2 화랑을 보여주고 있다. P_1은 Wikipedia[1]에서, P_2는 Urrutia[4]에서 인용되었다. O'Rourke[10]의 정리에 따르면 P_1은 3명, P_2는 4명의 이동 경비원으로 충분하다. 그러나 우리가 찾고자 하는 궁극적인 목표는 최소 경비원수이며, 최소 경비원 수는 이보다 적을 수 있다. 따라서 3장에서는 최소 이동 경비원 수를 찾는 다항시간 알고리즘을 제안한다.



(a) P_1 단순 다각형 (b) P_2 단순 직각 다각형

그림 2. 화랑 사례
Fig. 2. Art Gallery Examples

Ⅲ. 화랑 문제의 최소 이동 경비원수 알고리즘

본 장에 적용되는 그래프 알고리즘 개념은 다음과 같다. 그래프 $G=(V,E)$에서 정점 v의 차수 (부속 간선 수)를 $d_G(v)$라 한다. 그래프의 최소 차수 정점을 $\delta(G)$, 최대 차수 정점을 $\Delta(G)$라 하며, 이웃하는 정점을 $N_G(v)$라 한다. 최소 이동 경비원 수 알고리즘은 다음과 같이 수행된다.

(1) n개의 정점을 가진 다각형 P에 대해 각 정점 (모서리, 꼭지점)을 u, 인접한 2개 정점을 e_w(벽 간선), 각 u에서 다각형 내부에서 대각선으로 볼 수 있는 모든 다른 정점 v로 연결한 간선을 e_v(가시성 대각선 간선)로 하는 가시성 그래프 G_v를 그린다.

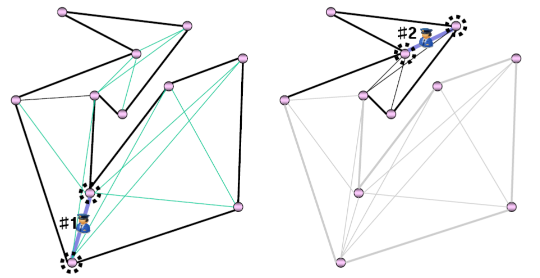
(2) G_v에서 $\Delta(G)$ 정점 u와 $N_G(u)$의 $\Delta(G)$ 정점 v 선택.

 u,v의 $N_G(u)\cap N_G(v)$ 간선 삭제.
 u,v의 부속 간선 삭제.
 if $e_w=\phi$ then $G\leftarrow\{u,v\}$, 알고리즘 종료
 else (3) 수행.

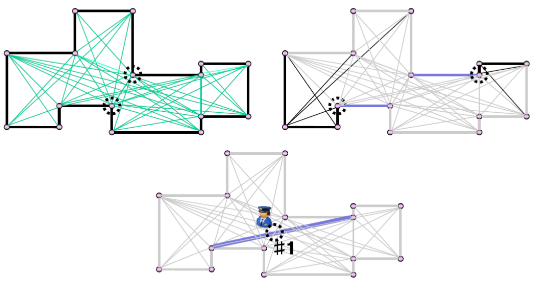
(3) 독립된 부분 그래프 G_i 각각에 대해 해당 부분 그래프의 모든 정점을 볼 수 있는 정점 w_i를 선택한다. 선택 우선순위: ① $N_G(u)$ or $N_G(v)$인 e_w, ② $N_G(u)$ or $N_G(v)$인 e_v, ③ $\Delta(G)$.

 if $\{w_1,w_2\}\in e_v$ then $G\leftarrow\{w_1,w_2\}$
 else if $w_i\not\in N_G(u)$ and $w_i\not\in N_G(v)$ then
  w_i와 $N_G(w_i)$의 $\Delta(G)$ 정점 x 선택
  w_i,x의 $N_G(w_i)\cap N_G(x)$ 간선 삭제
  w_i,x의 부속 간선 삭제
 else if $w_i\in N_G(u)$ and $w_i\in N_G(v)$ then /* K_3
  $G\leftarrow\{w_i,u\}$
  $N_G(w)$간의 간선과 w의 부속 간선 삭제
 else if $w_i\in N_G(u)$ and $w_i\not\in N_G(v)$ then /* 1개 부분집합
  w_i와 $N_G(w_i)$의 $\Delta(G)$ 정점 x 선택
  $G\leftarrow\{w_i,x\}$, $\{u,v\}$
  $N_G(w)$간의 간선과 w의 부속 간선 삭제.
 G에 있는 간선에 이동 경비원 배치.

P_1과 P_2에 제안 알고리즘을 적용하면 그림 3과 같다. P_1에 대해 첫 번째로, $\Delta(G)$인 ④와 $N_G(4)$중 $\Delta(G)$인 ⑧이 선택되고 남은 정점들의 부분 그래프를 모두 볼 수 있는 정점은 $\Delta(G)$인 ②이며, $2\not\in N_G(4), 2\not\in N_G(8)$로 ④와 ⑧에서는 감시를 할 수 없는 지점으로 독립되어 있다. 따라서 $\{4,8\}$과 $\{2,11\}$이 선택된다. 결국, 이동 경비원이 위치하는 간선은 $\{4,8\}$과 $\{2,11\}$로 최소 2명의 이동 경비원이 필요하다.



(a) P_1 단순 다각형



(b) P_2 직각 다각형

그림 3. 제안 알고리즘 적용 화랑의 최소 이동 경비원 수
Fig. 3. Minimum Number of Mobile Guards with the Proposed Algorithm

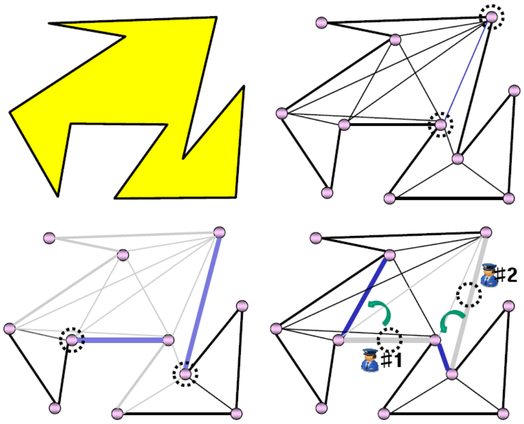
P_2에 대해 첫 번째로, ⑤와 ⑬이 선택된다. 좌측 부분 그래프에서 ①과 ④는 ⑤, ⑬과 인접하고 있으며, ①은 ⑤, ⑬과 e_v이며, ④는 ⑤와 e_w로 ④가 우선하여 선택된다. 또한, 우측 부분 그래프에 있는 ⑩과 ⑫에 대해서도 동일한 방법으로 ⑫가 선택된다. 마지막으로 ④와 ⑫의 간선 $\{4,12\}$가 존재하여 이 간선이 이동 경비원 간선으로 선택된다. 결국, 이 다각형 화랑은 최소 1명으로 경비가 가능함을 알 수 있다.

제안된 알고리즘은 부분 그래프의 개수만큼 수행되며, 각 부분 그래프에서 $N_G(v)$간 간선과 부속 간선을 삭제하는 과정은 인접 행렬 (adjacency matrix)을 적용할 경우 복잡도는 $O(n)$으로 알고리즘의 수행 복잡도는 $O(n)$인 선형 다항시간 알고리즘이 된다.

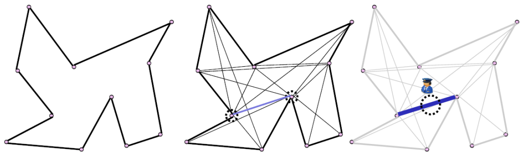
Ⅳ. 알고리즘 적용 결과 분석

본 장에서는 다각형, 직각 다각형과 사각형 방에 대해 제안된 알고리즘을 적용하여 본다. P_3는 Peterson[11]에서, P_4, P_{11}은 Barrow[2]에서, P_5, P_7, P_8, P_{15}는 Urrutia[4]에서, P_6은 Do[12]에서, P_9는 Ghosh[3]에서, P_{10}은 Shermer[13]에서, P_{12}, P_{13}은 Shermer, Urrutia와 Ghosh에서, P_{14}는 Shermer, Do, Urrutia와 Barrow에서, P_{16}은 Ghosh와 Urrutia에서, P_{17}은 Wikipedia[1]에서 인용되었다.

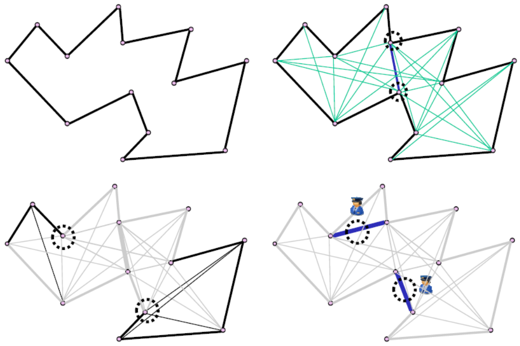
다각형의 경우 제안된 알고리즘을 적용하여 최소 경비원 수를 구한 결과는 그림 4에 제시되어 있다.



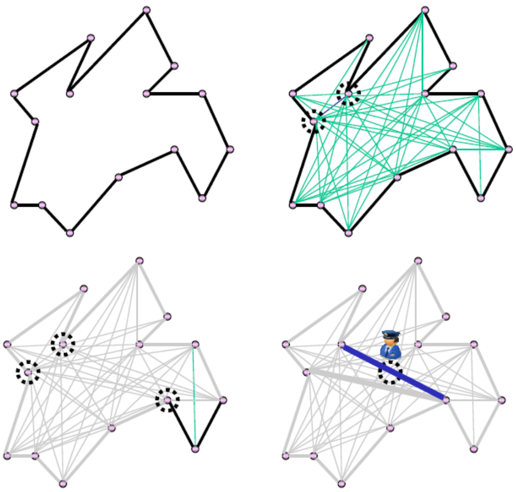
(a) P_3



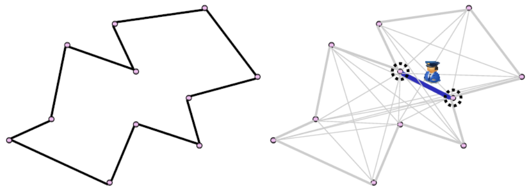
(b) P_4



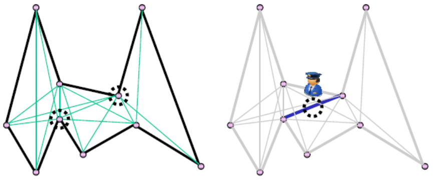
(c) P_5



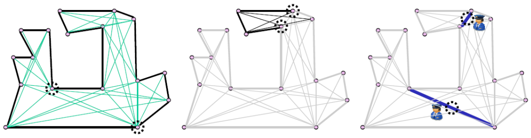
(d) P_6



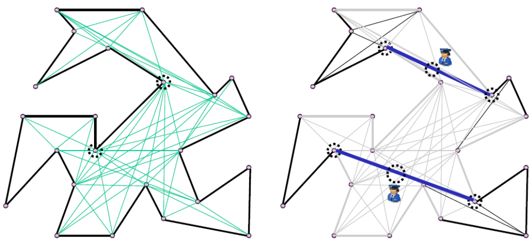
(e) P_7



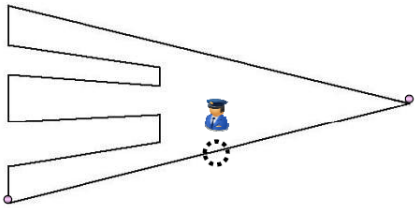
(f) P_8



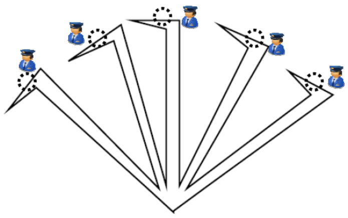
(g) P_9



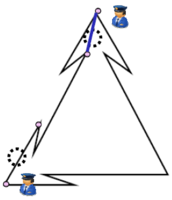
(h) P_{10}



(i) P_{11}



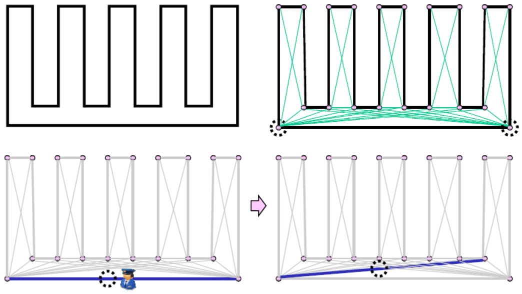
(j) P_{12}



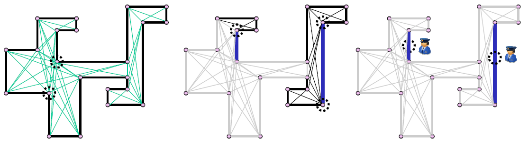
(k) P_{13}

그림 4. 다각형 화랑의 최소 경비원 수
Fig. 4. Minimum Number of Guards of Polygon Art Gallery

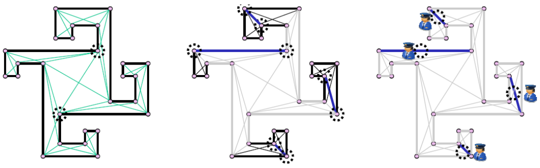
직각 다각형의 경우 제안된 알고리즘을 적용한 결과는 그림 5에 제시하였다.



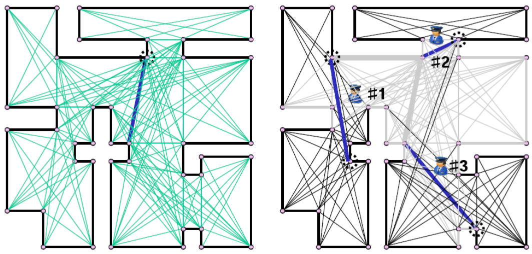
(a) P_{14}



(b) P_{15}



(c) P_{16}



(d) P_{17}

그림 5. 직각 다각형 화랑의 최소 경비원 수
Fig. 5. Minimum Number of Guards of Orthogonal Polygon Art Gallery

그림 4와 그림 5는 어느 간선에 경비원이 위치해야 최소경비원수로 전체 영역을 경비할 수 있는지를 알고리즘으로 찾아내 표현한 것이다.

V. 결론

본 논문은 화랑의 최소 이동 경비원 수를 구하는 알고리즘을 제안하였다. 지금까지 화랑의 최대 이동 경비원 수를 구하는 공식은 다각형에 대해서는 $\lfloor n/4 \rfloor$, 직각 다각형에 대해서는 $\lfloor (3n+4)/16 \rfloor$으로 알려져 있다. 본 논문에서는 n을 고려하지 않고 최소 이동 경비원 수를 구하였다. 제안된 알고리즘은 첫 번째로, 주어진 다각형 P의 각 정점에서 가시성 간선을 모두 연결한 가시성 그래프를 그린다. 두 번째로 $\Delta(G)$인 정점 u와 $N_G(u)$에서 $\Delta(G)$인 정점 v를 선택하고 u와 v에서 가시적인 간선들을 모두 삭제한다. 세 번째로, 남은 부분 그래프 각각을 모두 볼 수 있는 정점들 w_i을 선택하여 w_i 상호간에 볼 수 있으면 (가시성 간선 존재) 이 간선을 선택하고, 볼 수 없으면 u 또는 v와의 가시성 간선을 선택하는 방법을 적용하였다.

제안된 알고리즘은 n개의 간선에 대해 최대로 경비할 수 있는 간선을 선택하는 방법으로 최대 n회 수행하면 알고리즘이 종료되기 때문에 알고리즘의 수행 복잡도는 O(n)이다. 제안된 알고리즘을 다양한 단순 다각형과 직각 다각형들에 적용한 결과 선형시간 복잡도 O(n)으로 최소 이동 경비원 수를 구할 수 있었다.

참 고 문 헌

[1] Wikipedia, "Art Gallery Problem," http://en.wikipedia.org/wiki/Art_gallery_problem, 2010.

[2] J. Barrow, "The Maths of Pylons, Art Galleries and Prisons Under the Spotlight," Gresham College, http://www.gresham.ac.uk/event.asp?Pageid=45&Eventid=819, 2008.

[3] S. K. Ghosh, "Art Gallery Theorems and Approximation Algorithms," School of Technology & Computer Science, Teta Institute of Fundamental Research, Mumbai, India, http://www.tcs.tifr.res.in/~ghosh/artgallery.pdf, 2010.

[4] J. Urrutia, "Art Gallery and Illumination Problems," Handbook of Computational Geometry, Department of Computer Science, University of Ottawa, Canada, www.matem.unam.mx/~urrutia/online_papers/Art-Galleries.ps, 1996.

[5] I. Bjorlings-Sachs, "Edge Guards in Rectilinear Polygons," Computational Geometry, Vol. 11, pp. 111-123, 1998.

[6] E. Johnson, "A Survey of Mobile Guards in Art Galleries," http://eric.gruver.net/ArtGalleryProblems.html, 2010.

[7] I. Bjorling-Saxhs and D. L. Souvaine, "A Tight Bound for Edge Guards in Monotone Polygons," DIMACS Technical Report 92-52, 1992.

[8] A. Deshpande, T. Kim, E. D. Demaine, and S. E. Sarma, "A Pseudopolynomial Time $O(\log n)$-Approximatiom Algorithm for Art Gallery Problems," Proc. Workshop Algorithms and Data Structures, Lecture Notes in Computer Science, 4619, Springer-Verlag, pp. 163-174, 2007.

[9] G. Toussaint, "Pattern Recognition and Geometrical Complexity," Proceeding 5th International Conference Pattern Recognition, pp. 1324-1347, 1980.

[10] J. O'Rourke, "Galleries need Fewer Mobile Guards: A Variation to Chvátal's Theorem," Geometriae Dedicate, Vol. 14, pp. 273-283, 1983..

[11] I. Peterson, "Problem at the Art Gallery," http://www. maa.org/mathland/mathland_11_4.html, 1996.

[12] N. Do, "Art Gallery Theorems," www.austms.org.au/Publ/Gazette/2004/Nov04/mathellaneous.pdf, 2004.

[13] T. C. Shermer, "Recent Results in Art Galleries," Proceedings of the IEEE, Vol. 80, No. 9, 1992.

[14] J. H. Ryu, J. H. Kim, C. G. Lee, "The navigation method of mobile robot using a omni-directional position detection system," Journal of Korean Institute of Information Technology, v.10, no.2, pp.237-242, February 2009.

[15] M. G. Oh, "Tracking of Single Moving Object based on Motion Estimation," Journal of Korean Institute of Information Technology, v.6, no.4, pp.349-354, August, 2005.

저자 소개

이 상 운(정회원)

- 1983년~1987년 : 한국항공대학교 항공전자공학과 (학사)
- 1995년 ~ 1997년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (석사)
- 1998년 ~ 2001년 : 경상대학교 컴퓨터과학과 (박사)
- 2003년 : 강원도립대학 컴퓨터응용과 전임강사
- 2004년 ~ 2007.2 : 국립 원주대학 여성교양과 조교수
- 2007.3 ~ 현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 부교수

<주관심분야 : 소프트웨어 프로젝트 관리, 신경망, 뉴로-퍼지, 그래프 알고리즘 등>

최 명 복(종신회원)

- 1992년 : 호서대학교 전자계산학과 (학사)
- 1994년 : 아주대학교 컴퓨터공학과 (석사)
- 2001년 : 아주대학교 컴퓨터공학과 (박사)
- 1997~현재 : 강릉원주대학교 멀티미디어공학과 교수
- 2004. 1~현재 : 한국인터넷방송통신학회 이사

<주관심분야 : 지능형 정보검색, 소프트웨어 공학, 알고리즘 등>