

수상 및 수중 운동체의 강인 안정성 해석 및 안정화에 관한 연구

† 김영복 · 최광환*

† 부경대학교 기계시스템공학과 교수, * 부경대학교 냉동공조공학과 교수

A Study on the Robust Stability and Stabilization Problem for Marine Vessel

† Young-Bok Kim · Kwang-Hwan Choi*

† Department of Mechanical System Engineering, Pukyong National University, Busan 608-739

*Department of Refrigeration and Air-Conditioning Engineering, Pukyong National University, Busan 608-739

요 약 : 본 논문에서는 수상 및 수중운동체의 안정성 및 안정화기법에 대해 고찰한다. 선박이 운동을 하게 되면 부가질량이 변하게 되고 대칭인 시스템행렬이 비대칭이 된다. 비대칭성에 따라 시스템의 안정성해석방법도 달라지는데 예를 들어 가속도 피드백을 통해 비대칭요소를 제거하여 대칭으로 변환시키는 것이 가장 대표적인 해석 및 안정화 기법이다. 시스템 모델자체는 어디까지나 모델이기 때문에 대상시스템을 명확하게 수식으로 표현할 수 없으므로 피드백에 의한 비대칭요소를 소거시키는 방법은 타당하지 못하다. 따라서 본 논문에서는 대칭행렬이 비대칭행렬로 변하는 제약에 구애받지 않는, 보다 일반성을 갖는 안정성해석법을 제안하였다. 그리고 시스템 안정성 조건을 행렬부등식으로 변환하여 나타내었다. 이것은 안정성 해석 및 안정화를 위한 제어이득을 효율적으로 계산할 수 있는 방법으로 다양한 제약조건에도 유연하게 대응할 수 있다. 시뮬레이션을 통해 제안한 기법의 유효성을 검증하였다.

핵심용어 : 안정성, 안정화 가능성, 수상 및 수중운동체, 관성행렬, 비대칭, 2차 안정화, 행렬부등식

Abstract : In this paper, the stability and stabilization problems for marine vessels including surface and underwater vehicles are described. In the marine vessels, there are many and strong nonlinear parameters. These give hard design process and difficulties to us. In this article, at first we make a descriptor system representation as a controlled system to preserve the physical parameters of the system as it is. And we propose a new stability and stabilizability conditions based on the quadratic stabilization approach which gives a solution for the unreasonable problems produced by added mass. That is, the proposed conditions are not interfered with the nonsymmetric matrix constraint. And the stability condition is given by an matrix inequality such that it makes us to obtain a solution easily for something.

Key words : stability, stabilizability, marine vessel, inertia matrix, nonsymmetric, quadratic stabilization, matrix inequality

1. 서 론

수상구조물 및 선박 등 수상운동체의 운동특성해석 및 제어문제에 관한 많은 연구결과가 보고되어 있다(김주호 등, 2008; 정재훈 등, 2010; 안병길·이상민, 2010; 김형동 등, 2011). 과거와는 달리, 구조물 및 선박설계분야 뿐 만 아니라 해상환경에서 안전하고 효율적인 운영을 위한 분야에도 많은 국내 연구진의 관심이 집중되고 있다. 이 분야가 그동안 노르웨이 등 선진 연구진에 의해 거의 독점적으로 지배되었던 것이 사실인 점을 감안하면 다소 늦은 감이 있으나 다행스럽다는 표현이 적절할지도 모른다. 아직도 선진연구진에 의해 지배되는 추세가 지속되는 것이 여전한 현실인 점을 인정하고, 이를 개선하기 위한 과감한 도전과 노력이 절실히 필요하다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 인식하고 기본적인 문제부터 접근하

고자 하는 관점에서 운영적인 분야 외, 보다 근원적인 문제를 다루고자 한다. 이것은 시스템의 안정성 해석에 관한 문제로 기존연구결과(Fossen et al., 2002; Fossen, 2002)가 갖는 제약조건을 해소함으로써 제어기 설계에 있어서의 유연성을 확보할 수 있는 새로운 안정성 해석기법을 제안한다. 이를 위해 우선 약간 기초적인 이론에 관한 설명을 기술해 둔다.

제어시스템을 설계하는 문제에 있어서 제어대상을 상태방정식으로 표현하는 것이 대표적인 표현법 중의 하나이다. 그리고 상태방정식으로 표현된 선형 시스템의 강인 안정화의 대표적인 것이 2차 안정화 기법이다(Barmish, 1985; Hollot Pertersen, 1986; Pertersen, 1987; Khargonekar et al., 1990). 이것은 안정성 평가를 위해 대상시스템에 존재하는 불확실성과는 독립인 2차형식의 Lyapunov 함수를 도입하는 방법이다. 이것으로부터 구조적인 불확실성이 존재하더라도 제어대상의

† 교신저자 : 정희원, kpjiwoo@pknu.ac.kr 051)629-6197

* 정희원, choikh@pknu.ac.kr, 051)629-6179

(주) 이 논문은 “수중운동체의 로버스트 안정성 해석 및 안정화에 관한 연구”란 제목으로 “2011 한국항해항만학회 추계학술대회논문집 (부산 벅스코호텔, 2011.11.17.-18, pp.12-13)”에 발표되었음.

강인 안정성을 보장할 수 있다는 것이 특징이다. 그러나 일반적으로 상태방정식은 시스템의 물리적 특성을 그대로 보존할 수 있는 표현법이 아니다. 즉, 동적모델로부터 상태방정식으로 변환시키는 과정을 통해 물리파라미터들이 뒤섞여 버리기 때문이다. 그래서 물리파라미터에 나타나는 불확실성을 다룰 때는 여러 가지 불합리한 부분이 당연히 수반되게 된다. 예를 들어 불확실성이 과도하게 평가되는 것이 그 대표적인 예이다 (Asai and Hara, 1995). 한편 descriptor 방정식은 상태방정식의 관점에서 보면 상태방정식의 확장된 표현의 하나로 볼 수 있는데, 시스템의 물리적 특성이 그대로 보존되어 나타난다는 것이 가장 큰 특징이다. 대부분의 제어대상은 상태방정식으로 잘 표현되나, 필요한 가정을 두거나 제약조건을 완화하는 과정도 상태방정식 표현에 동원되기도 한다. 이것은 모든 시스템을 일반적인 상태방정식으로 표현이 가능하지 않다는 것을 의미하거나 상태방정식 표현법이 항상 유용하지 않다는 의미가 강하게 포함되어 있다.

예를 들어 일반적으로 다음과 같이 표현되는 선박을 포함한 수상 및 수중 운동체를 고려하자.

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{D}(\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{w} \quad (1)$$

여기서 행렬 \mathbf{M} 은 시스템의 관성행렬로 질량 및 관성모멘트 항으로 구성된다. 특히 운동체가 운동함에 따라 부가질량 항이 포함되는데 이것은 운동체의 운동속도에 따라 대칭행렬 \mathbf{M} 의 대칭성이 보장되지 않는다는 것이 일반적인 사실이다. 저속영역에서는 이 행렬은 대칭이기 때문에 일반적인 안정성해석 및 안정화기법을 적용할 수 있으나, 저속영역이외의 경우는 대칭성이 보존되지 않으므로, 다른 방법으로 안정성을 평가하고 안정화시키는 방안을 고려해야 한다. 그 대표적인 것이 가속도 피드백(acceleration feedback)인데, 이 방법은 대칭구조를 깨뜨리는 요소를 피드백 이득을 통해 제거하여 원래의 대칭행렬특성을 복원시킴으로써 시스템의 안정성을 확보하는 방법이다 (Fossen et al., 2002; Fossen, 2002). 그러나 부분적인 정보를 이용하고 계산을 통해 구축된 모델은 어디까지나 모델에 지나지 않는다. 즉, 모델로서 표현된 수식이 실제 시스템과 완전하게 일치할 수 없다. 부정확한 모델의 일부 요소(비대칭요소)를 피드백으로 완전하게 소거시키는 것은 원천적으로 불가능하다는 것을 의미한다. 결국 Fossen(2002) 등이 제안하는 해석법과 안정화 기법은 불합리한 부분이 적지 않음을 의미한다.

따라서 본 논문에서는 보다 일반적인 안정성 이론으로 이 문제를 다루고자 한다. 본 논문에서 제안하는 방법은 시스템 표현에서 물리적 특성을 적극적으로 표현하는 기법이다. 즉, 자연스럽게 표현된 수상 및 수중운동체 시스템에 대한 안정성 해석 및 안정화 기법에 대해 고찰한다. 이를 위해 본 논문에서는 descriptor 형식으로 표현된 시스템의 강인 안정화 가능 조건을 2차 안정화법으로 제시한다. 대상으로 하는 것은 시스템행렬에 불확실성을 포함하는 경우이다. 특히 수상 및 수중 운동체 안정성 해석문제에 있어서의 기존연구결과에 대한 문제점을 제시하고 이 문제를 해결할 수 있는 방안을 descriptor

시스템 해석방법을 이용하여 제안한다.

2. 시스템 안정성 해석 및 안정화 기법 (Fossen et al., 2002; Fossen, 2002)

다음과 같이 표현되는 선박운동모델을 고려한다.

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

여기서 \mathbf{M} 은 부가질량을 포함한 관성행렬, $\mathbf{n}(\boldsymbol{\nu})$ 는 비선형 특성을 나타내는 벡터 항이며 $\boldsymbol{\tau}$ 는 제어입력이다. 선박이 저속 영역에서 운동할 경우에는 $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T > 0$ 라고 둘 수 있다. 즉, 해당행렬의 대칭성이 보존됨을 의미한다. 그러나 그 운동영역에 대한 범위가 불확실하기 때문에 일반적인 운동조건에서 이 가정을 적용하는 것이 적절하지 않다. 따라서 위의 대칭성 조건이 항상 만족되지 않는 일반적인 경우에 대해 고려하자. 식 (2)에서 행렬 \mathbf{M} 은 시스템의 관성행렬로 질량 및 관성모멘트 항으로 구성된다. 이 행렬은 일반적으로 대칭성을 가지나 선박이 운동하게 되면 부가질량 등의 영향으로 더 이상 대칭성이 보존되지 않는다. 그래서 행렬 \mathbf{M} 을 다음과 같이 대칭행렬과 비대칭행렬로 분리하여 표현한다.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A \quad (3)$$

여기서 \mathbf{M}_{RB} 는 rigid-body 관성모멘트로 대칭행렬이고, \mathbf{M}_A 는 유체력 부가관성모멘트를 나타내며 일반적으로 비대칭이다. 즉, $\mathbf{M}_{RB} = \mathbf{M}_{RB}^T > 0$, $\mathbf{M}_A \neq \mathbf{M}_A^T > 0$ 이다. 여기서 선박이 전진방향으로 주행할 경우에는 파도 등의 외력에 의해 수반되는 영향력이 수식에 반영되는데 이러한 영향을 고려하면 운동 에너지를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T \left(\frac{1}{2} (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T) \right) \boldsymbol{\nu} \\ &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, $1/2(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)$ 는 대칭이고, $1/2(\mathbf{M} - \mathbf{M}^T)$ 는 skew-symmetric 이다. 따라서

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{M} - \mathbf{M}^T) \boldsymbol{\nu} = 0, \text{ for all } \boldsymbol{\nu} \quad (5)$$

이고, 궤적 $\boldsymbol{\nu}$ 에 대한 미분을 구하면 다음식과 같다,

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu}^T (\mathbf{M} + \mathbf{M}^T) \dot{\boldsymbol{\nu}} \quad (6)$$

그러나 이 방법은 식 (6)에 포함된 $\mathbf{M}^T \dot{\boldsymbol{\nu}}$ 항 때문에 식 (2)와 같이 표현된 시스템에 대해 직접적으로 적용할 수 없다. 즉, 식 (2)를 식 (6)에 대입하여 해석해야 하나 $\mathbf{M}^T \dot{\boldsymbol{\nu}}$ 항을 직접적으로 대체하여 표현할 방법이 없기 때문이다. 이것은 앞

서 기술한 것과 같이 부가질량의 영향으로 관성모멘트 행렬이 대칭성을 잃게 됨으로써 발생하는 문제이다. 해결방안으로는 대칭성을 상실한 관성모멘트 행렬을 피드백에 의해 새로운 대칭행렬로 변환하는 방법이다(Fossen et al., 2002; Fossen, 2002). 즉, 하나의 피드백 행렬 \mathbf{K}_m 을 도입하여 다음과 같이 새로운 대칭행렬을 구성한다.

$$\mathbf{H} = (\mathbf{M}_{RB} + \mathbf{M}_A) + \mathbf{K}_m \quad (7)$$

여기서 $\mathbf{M}_{RB} = \mathbf{M}_{RB}^T > 0$, $\mathbf{M}_A \neq \mathbf{M}_A^T > 0$ 이기 때문에, 다음과 같은 양의 가속도 피드백(positive acceleration feedback)

$$\mathbf{K}_m = -\mathbf{M}_A < 0 \quad (8)$$

을 도입하면 비대칭행렬 \mathbf{M}_A 가 \mathbf{K}_m 에 의해 식 (7)에서 소거되어 대칭성을 갖는 관성모멘트 행렬로 복원시킬 수 있게 됨을 알 수 있다. 즉,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T = \mathbf{M}_{RB} > 0 \quad (9)$$

그런데 이러한 양의 가속도 피드백이 시스템의 안정성을 완전하게 보장하지 못한다. 부가유체력 관성행렬 \mathbf{M}_A 가 불확실한 경우, 특히 그 크기(norm)가 \mathbf{M}_{RB} 보다 큰 경우에는 피드백 $\mathbf{K}_m = -\mathbf{M}_A$ 에 의해 대칭행렬이 $\mathbf{H} < 0$ 가 되어 결국 시스템이 불안정하게 되는 결과를 초래할 수 있다. 이러한 문제를 회피하기 위한 방법으로 음의 피드백(negative feedback)을 도입하기도 한다. 그러나 이러한 기법은 피드백에 의해 비대칭요소, 비선형특성 혹은 불확실성을 거의 완전하게 제거할 수 있다는 전제에서 성립한다. 일반적으로 모델링을 통해 구축된 시스템 행렬은 불확실성을 포함하고 있다. 즉, 계산 및 추정을 통해 구해진 시스템행렬내의 각 요소행렬 및 파라미터가 정확하지 않다는 것을 의미한다. 이러한 사실을 고려한다면 단순한 피드백에 의해 불확실성을 제거하거나 비선형특성을 완전하게 소거하여 대칭성을 찾는 방법이 타당하다 할 수 없다. 즉, 보다 일반적인 조건을 고려하여 해석해야 한다.

따라서 본 논문에서는 이러한 불합리성을 보완할 수 있는 안정성 해석방법을 제안한다.

3. Descriptor 형식에 의한 안정성 해석법

우선 안정성 해석법에 대한 이해를 돕기 위해 식 (2)의 선박 운동모델을 고려한다. 식 (2)의 각 행렬에는 비선형성 및 불확실성이 포함되어 있다. 해석상의 편의를 도모하기 위해 비선형성 등은 불확실성으로 통합하여 다음과 같이 표현한다.

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} \quad (10)$$

이때 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 는 각 해당행렬에 대한 불확실성을 나타내며, 여기에는 파라미터 변동 뿐 만 아니라 크기에 제한을 갖는 비선형성을 포함하고 있다. $\boldsymbol{\nu}$ 는 n 차원의 descriptor 벡터,

$\boldsymbol{\tau}$ 는 m 차원 제어입력이다. 계수행렬 \mathbf{M} , \mathbf{n} 은 $n \times n$ 행렬이다. 특히 $(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})$ 은 비대칭이라 하더라도 \mathbf{M} 은 대칭이라 둔다. 즉, 식 (10)에서 descriptor 행렬이 비대칭이 되도록 하는 요소들을 $\Delta\mathbf{M}$ 에 모두 포함시킨다.

불확실성 $\Delta\mathbf{M}$ 은 $\Delta\mathbf{M} = \Delta\mathbf{M}_L\mathbf{M} = \mathbf{M}\Delta\mathbf{M}_R$ 과 같이 나타낼 수 있는 것으로 고려한다. 즉,

$$\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M} = (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R) \quad (11)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 또한 불확실성 $\Delta\mathbf{M}_L$, $\Delta\mathbf{M}_R$ 은 식 (11)의 rank를 변화시키지 않도록 다음의 조건을 만족한다고 가정한다.

$$\det(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L) \neq 0, \det(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R) \neq 0 \quad (12)$$

이것은 지수모드와 임펄스모드 수의 합이 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$ 에 의해 변화지 않음을 의미한다.

이와 같은 descriptor 시스템이 일의적으로 해를 갖기 위해서는 $\Delta\mathbf{M} = 0$, $\Delta\mathbf{n} = 0$ 일때의 기준 시스템을 포함하여 다음 조건이 성립한다고 가정한다(Richter and DeCarlo, 1983).

$$\det[s(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) - (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})] \neq 0 \quad (13)$$

즉, 대상 시스템은 임펄스모드를 갖지 않는다고 가정한다. 이 조건을 만족하기 위한 필요충분조건(Cobb, 1981)은 $\Delta\mathbf{M} = 0$, $\Delta\mathbf{n} = 0$ 일 때를 포함하여 다음 조건을 만족해야 한다.

$$\text{rank}(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) = \text{deg det}[s(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) - (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})] \quad (14)$$

이것으로부터 식 (10)의 시스템의 강인 안정성 및 강인 안정화 가능성에 대해 논의하도록 한다.

[정의 1] 식 (10)의 시스템에 대해, 제어입력 $\boldsymbol{\tau} \equiv 0$ 라 가정한다. 이 때 어떤 지정된 범위(크기)의 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 이 존재할 때 아래 식 (15)를 만족하는 모든 근의 실수부가 음이면 식 (10)의 시스템은 강인 안정하다.

$$\det[s(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}) - (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})] = 0 \quad (15)$$

또한 그 크기가 한정되어진 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 이 존재할 때, 선형피드백이득

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}\boldsymbol{\nu} \quad (16)$$

에 의해 다음 식 (17)의 폐루프계가 안정하게 될 때, 식 (10)의 시스템은 식 (16)의 제어압력에 의해 안정화 가능하다고 한다.

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{K})\boldsymbol{\nu} \quad (17)$$

그리고 식 (11) 및 식 (12)로부터 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned} & \det[s\mathbf{M}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R) - (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{K})] \\ &= \det[s\mathbf{M} - (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R)^{-1}] \\ & \quad \times \det(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R) \end{aligned} \quad (18)$$

결국 이것은 식 (17)로 표현된 시스템의 강인 안정성과 다음 식으로 표현된 시스템의 강인 안정성이 등가임을 의미한다.

$$\mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{K})(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_R)^{-1}\boldsymbol{\nu} \quad (19)$$

4. 2차 안정성 해석법의 적용

본 장에서는 시스템의 2차 안정성 해석법에 대해 논의한다. 먼저 식 (14)와 식 (18)로부터 식 (19)의 시스템이 임펄스 모드를 갖지 않는다(Cobb, 1981). 따라서 이 시스템의 다이내믹스는 $\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}$ 에 의해 지배된다고 할 수 있다. 이 때, 식 (19)의 해 $\boldsymbol{\nu}$ 의 거동(behaviour)이 $\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 가 된다는 것은 이 시스템이 안정하다는 것을 의미한다. 따라서 식 (19)의 시스템이 강인 안정하다는 것은 어떤 지정된 범위(크기)의 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 에 대해서도 $\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 가 됨을 의미한다.

그런데 2차 안정성의 기본개념은 불확실성을 고려하지 않는 2차 형식의 Lyapunov 함수가 존재하는가의 여부로 안정성을 보증하는 것이다. 따라서 식 (10)은 이미 불확실성이 포함되어 있으므로 이것이 2차 안정하다면 이 시스템은 당연히 강인 안정하고, 식 (17)의 시스템도 강인 안정하다.

본 논문에서는 식 (19)로 표현되는 선박운동모델에 대해, 시스템행렬이 대칭이어야 하는 제약(Fossen et al., 2002; Fossen 2002)을 갖지 않는 2차 안정성 조건을 제안한다. 따라서 식 (19)의 시스템에 대한 2차 안정성 조건을 다음과 같이 정의한다.

[정의 2] 식 (19)의 descriptor 시스템에 대해 행렬 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 와 정수 $\alpha > 0$ 가 존재하고, 2차 형식의 다음 식

$$V(\boldsymbol{\nu}) = \boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} \quad (20)$$

의 시간미분인 $\dot{V}(\boldsymbol{\nu})$ 가 어떤 허용된 범위의 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 과는 독립적으로 아래 식 (21)의 조건을 만족하게 되면 식 (19)의 시스템은 2차 안정하다고 한다.

$$\dot{V}(\boldsymbol{\nu}) \leq -\alpha \|\mathbf{M}\boldsymbol{\nu}\|^2 \quad (21)$$

여기서 $\mathbf{M}\boldsymbol{\nu} \neq 0$ 가 되는 $\boldsymbol{\nu}$ 에 대해 $\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{M}^T \mathbf{P} \mathbf{M} \boldsymbol{\nu} > 0$ 를 만족하는 $n \times n$ 의 정수의 대칭행렬 \mathbf{P} 전체를 \mathbb{R} 라 둔다.

5. 강인 안정화 가능조건 및 제어이득 계산

4장의 결과를 바탕으로 하여 불확실성을 고려한 시스템의 안정화 가능조건 및 제어이득을 계산하는 문제에 대해 고찰한다. 일반성을 고려하여 식 (10)에서 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ 로 치환하여 다음과 같이 나타낸다.

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\dot{\boldsymbol{\nu}} = (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\boldsymbol{\nu} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (22)$$

여기서 \mathbf{u} 는 제어입력을 나타낸다.

[정의 3] 정의 2로부터, 지정된 범위의 불확실성 $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{n}$ 에 대해 부등식

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{L}\}(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})^T \\ & + (\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\{(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{L}\}^T \\ & + \alpha(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})^T \leq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

을 만족하는 행렬 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, \mathbf{L} 과 정수 $\alpha > 0$ 가 존재하면 식 (22)의 시스템은 강인 안정화 가능하다.

[증명] 식 (11)의 조건하에 식 (23)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \{(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\mathbf{P}\mathbf{M}^T + \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{M}^T\}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)^T \\ & + (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)\{(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n})\mathbf{P}\mathbf{M}^T + \mathbf{B}\mathbf{L}\mathbf{M}^T\}^T \\ & + \alpha(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)\mathbf{M}\mathbf{M}^T(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)^T \leq 0 \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 행렬 \mathbf{M} 을 각 각 열(row) full rank, 행(column) full rank인 \mathbf{U}, \mathbf{W} 의 곱인 다음 식으로 정의한다.

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{W} \quad (25)$$

이것으로부터 식 (23)에서 $\mathbf{L}\mathbf{M}^T$ 는

$$\begin{aligned} \mathbf{L}\mathbf{M}^T & = \mathbf{L}\mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^T)^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^T\mathbf{U}^T \\ & = \mathbf{L}\mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^T)^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{M}\mathbf{P}\mathbf{M}^T \end{aligned} \quad (26)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 제어이득을

$$\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{W}^T(\mathbf{W}\mathbf{P}\mathbf{W}^T)^{-1}(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{M} \quad (27)$$

라 두면 식 (24)는

$$\begin{aligned} & (\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{P}\mathbf{M}^T(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)^T \\ & + (\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)\mathbf{M}\mathbf{P}(\mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} + \mathbf{B}\mathbf{K})^T \\ & + \alpha(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)\mathbf{M}\mathbf{M}^T(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{M}_L)^T \leq 0 \end{aligned} \quad (28)$$

과 같이 정리된다. 따라서 식 (23)의 조건을 만족하는 행렬 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, \mathbf{L} 과 정수 $\alpha > 0$ 를 구하면 식 (22)의 시스템을 강인 안정화 가능하도록 하는 제어이득 \mathbf{K} 를 구할 수 있게 된다.

6. 시뮬레이션

5장의 결과를 기초로 하여 제어대상을 선정하고, 피드백 시스템이 강인 안정하기 위한 제어이득을 계산한다. 즉, 불확실성을 포함한 시스템이 안정하기 위한 제어이득을 정의 3에 따라 구하고 시뮬레이션을 통해 그 유효성을 확인한다.

먼저 그림 1과 같이 4개의 제어력이 작용하는 간이화된 선형모델(Fossen, 2002)을 제어대상으로 하고 그것을 식 (29)로 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{n}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\tau} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \mathbf{R}(\varphi)\boldsymbol{\nu} \approx \boldsymbol{\nu} \text{ (if } \varphi \text{ is small)} \end{aligned} \quad (29)$$

식 (29)를 정리하면 다음 식과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\nu}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \quad (30)$$

여기서 $\mathbf{M} \in R^{3 \times 3}$ 은 관성행렬이고, $\mathbf{n} \in R^{3 \times 3}$ 은 댐핑행렬로 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m - X_u & 0 & 0 \\ 0 & m - Y_v - Y_r \\ 0 & -N_v & I_z - N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{n} &= \begin{bmatrix} -X_u & 0 & 0 \\ 0 & -Y_v & 0 \\ 0 & 0 & -N_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

그리고 $\boldsymbol{\eta} = [x, y, \varphi]^T \in R^3$ 는 지구고정좌표(Earth Fixed Frame)에서의 위치 (x, y) 와 각도 φ 에 대한 관성위치를 나타낸다. $\boldsymbol{\nu} = [u, v, r]^T \in R^3$ 는 선체고정좌표(Body Fixed Frame)에서의 서지(surge), 스웨이(sway) 및 요우(yaw)방향 속도를 나타낸다. 그리고 $\mathbf{R}(\varphi)$ 는 선박좌표를 관성좌표로 변환시키는 변환행렬로 다음 식과 같다.

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

액추에이터에 의해 선박에 작용하는 서지, 스웨이 및 요우 방향의 외력 및 모멘트 $\boldsymbol{\tau} = [X, Y, N] \in R^3$ 는 그림 1과 같은 힘의 조합으로 구성된다.

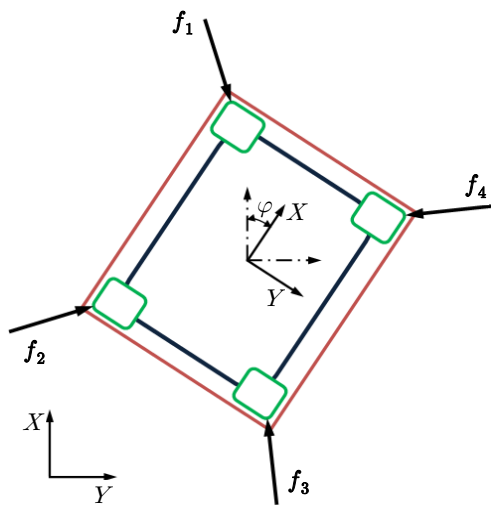


Fig. 1 System description for barge ship

그림 1에서 $f_i (i=1, \dots, 4)$ 는 추진장치 및 무어링 윈치장치 등에 의해 선박에 작용하는 힘을 나타낸다.

여기서, 제어대상에 존재하는 파라미터 변동 등의 불확실성을 고려한다. 먼저 식 (31)에서 행렬의 공칭값(nominal value)은 각각 다음과 같다.(Fossen, 2002)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 19.0 & 0 & 0 \\ 0 & 35.2 & -0.7 \\ 0 & -0.7 & 0.98 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 4.0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

그리고 위의 관성행렬 및 댐핑행렬이 공칭값을 기준으로 다음과 같이 각각 변환한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} -0.9 &\leq M_{23}(-0.7) \leq -0.5, \\ -0.9 &\leq M_{32}(-0.7) \leq -0.5, \\ 0.8 &\leq n_{33}(1.0) \leq 1.2 \end{aligned} \quad (34)$$

이와 같이 변동하는 파라미터가 많고, 변동범위가 다양한 경우에는 제어칙 계산이 용이하지 않다. 따라서 수치적 계산법을 이용하여 효율적으로 제어칙을 구하는 것이 타당하다. 그 대표적인 방법이 Matlab LMI Tool을 이용하는 방법이다. 그래서 본 논문에서는 식 (23)의 부등식을 다음과 같이 행렬 부등식(Matrix Inequality)으로 나타낸다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \alpha(\tilde{\mathbf{M}} + \Delta\tilde{\mathbf{M}}) \\ \alpha(\tilde{\mathbf{M}} + \Delta\tilde{\mathbf{M}})^T & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (35)$$

$$\mathbf{P} > 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \{(\tilde{\mathbf{n}} + \Delta\tilde{\mathbf{n}})\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{L}\}(\tilde{\mathbf{M}} + \Delta\tilde{\mathbf{M}})^T \\ &+ (\tilde{\mathbf{M}} + \Delta\tilde{\mathbf{M}})\{(\tilde{\mathbf{n}} + \Delta\tilde{\mathbf{n}})\mathbf{P} + \mathbf{B}\mathbf{L}\}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \Delta\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta\mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad \Delta\tilde{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta\mathbf{n} \end{bmatrix}$$

이다. 이것으로부터 LMI Tool을 이용하여 식 (35)의 행렬 부등식을 만족하는 각각의 이득을 구하였다. 이것은 식 (34)와 같이 각 파라미터가 변동하는 경우 만들어지는 8 개의 단점(vertices)에 대한 모든 부등식을 만족하는 공통해이다. 결국 식 (34)로 주어진 파라미터 변동범위에서는 제어대상의 안정성이 항상 보장됨을 의미한다.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 9.1197 & 0 & 0 & -1.9725 & 0 & 0 \\ 0 & 7.5496 & -0.1036 & 0 & -1.0136 & -0.0561 \\ 0 & -0.1036 & 9.6806 & 0 & -0.0080 & -5.7515 \\ -1.9725 & 0 & 0 & 0 & 0.4811 & 0 \\ 0 & -1.0136 & -0.0080 & 0 & 0.1972 & 0.1303 \\ 0 & -0.0561 & -5.7515 & 0 & 0.1303 & 6.0854 \end{bmatrix} \times 10^6 \quad (37)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$\alpha = 5.1$$

따라서 식 (25)에서 $U=I$ 라 두면 결국 식 (27)의 제어이득은 다음과 같이 계산된다.

$$K = \begin{bmatrix} 27.77 & 0 & 0 & 128.40 & 0 & 0 \\ 0 & 4.73 & -0.79 & 0 & 35.38 & -1.46 \\ 0 & -0.18 & 0.48 & 0 & -1.46 & 0.81 \end{bmatrix} \quad (38)$$

이것으로부터 파라미터 변동에 대한 시스템의 안정성을 확인하기 위해 시뮬레이션을 수행하였고 그 결과를 그림 2에 나타내었다. 그림 2는 시스템의 초기값 응답(initial response)을 나타낸다. 즉, 기준좌표를 기준으로 선박의 (X , Y) 초기 위치 및 요우각도가 각각 (3.0[m], -2.0[m]), 0.5[rad]로 주어졌다고 가정했을 경우, 제어력의 작용으로 원래 정지상태(원점)로 복귀시키는 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. 그리고 그림 3은, 불확실성이 식 (34)과 같이 변하는 영역 중, $M_{23}=-0.9$, $M_{32}=-0.9$, $n_{33}=0.8$ 일때의 초기응답시뮬레이션에서의 제어입력을 나타내고 있다. 시뮬레이션결과로부터 알 수 있듯이 파라미터 변동이 존재함에도 불구하고 시스템의 안정성이 확보되면서 신속하게 원래상태로 복귀되고 있다.

본 논문에서는 시스템의 안정성 문제에 주안점을 두고 새로운 해석법을 제시하였다. 제어시스템의 제어성능문제 등을 고려해야 할 경우에는, 본 논문에서 제시하는 안정화 기법을 참고로 하여 도입하고자 하는 제어계설계기법에 따라 제어를 설계하면 된다.

7. 결 론

본 논문에서는 2차 안정화 기법 및 안정성 해석법을 이용하여 수상 및 수중 운동체의 안정성 문제에 대한 새로운 해석 방법을 제안하였다. 수상 및 수중 운동체는 근본적으로 다양한 비선형성을 포함한 대표적인 비선형 시스템이다. 여러 가지 방법으로 신뢰성 높은 모델을 구축하였다 하더라도, 예측하기 어려운 해상환경 등, 운항조건변화에 따라 수반되는 불확실성을 시스템에 모두 반영하여 표현하는 것이 거의 불가능하다. 특히 운항속도에 따라 시스템 행렬의 특성이 변하는 것도 선박 등의 수상 및 수중 운동체가 갖는 대표적인 특징 중의 하나이다. 예를 들어 시스템 행렬의 대칭적 구조가 운동체의 운항속도에 따라 변하게 되므로 이에 따른 안정성 해석에 주의를 기울여야 한다. 대칭행렬과 비대칭 행렬을 분리하여 표현하고, 단순 피드백에 의해 비대칭 행렬을 소거하는 방법이 가장 대표적인 대안으로 제안되어 있으나, 이것은 시스템 행렬이 명확하게 표현되어 있다는 조건에서나 적용이 가능하다. 즉, 어떠한 방법으로도 시스템 행렬의 일부 혹은 전부를 완전하게 대치, 혹은 소거할 수 없다. 따라서 보다 일반성을 고려한 안정성 해석법을 도입하여 해석하고 평가하는 것이 당연하다. 따라서 본 논문에서는, 제어대상의 물리적 특성을 그대로 표현 할 수 있는 descriptor 시스템 해석기법을 도입하였다. 이것은 시스템 행렬의 일부 혹은 전부가 대칭성을 가져야 한다는 제약조건을 고려하지 않아도 된다. 기본적으로는

시스템 행렬에서 명확하게 계산되고 추정되는 부분과, 불명확한 변수를 포함한 모든 불확실성을 별도로 분리하여 표현하였다. 불확실성을 나타내는 행렬을 피드백 이득으로 소거하는 것이 아니라 그 표현 그대로 시스템의 안정성을 해석하는 일반적인 방법을 제시하였다. 이것은 해당 행렬이 대칭성을 보존해야 하는 제약에 독립적이다. 또한 비대칭성을 소거해야 하는 제약 때문에 제어기 설계 시에 발생하는 문제를 근본적으로 해결할 수 있다. 그리고 시스템의 안정성 조건을 행렬부등식(LMI)으로 변환하여 나타내었다. 이것은 불확실한 파라미터가 다수 존재하고, 그 변동범위가 다양할 경우에도 수치적으로 제어이득을 구할 수 있는 방법이다. 시뮬레이션을 통해 제안하는 기법의 유효성을 검증하였다.

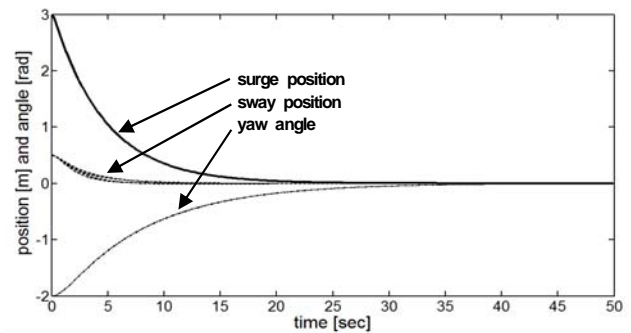


Fig. 2 Initial responses when the parameter variations are considered

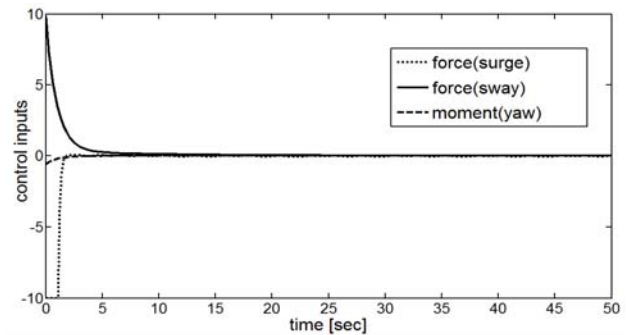


Fig. 3 Control inputs (surge, sway forces and yaw moment)

후 기

이 논문은 2011년 국토해양부의 재원으로 한국해양과학기술진흥원의 지원을 받아 수행된 연구임.(해양플랜트 거주용 부선의 계류 위치 제어시스템 개발)

참 고 문 헌

- [1] 김주한, 이승건, 이상의, 배철한(2008), "만타형 UUV의 심도제어와 충돌회피에 관한 연구", 한국항해항만학회지, 32권, 6호, pp. 407-452.

- [2] 김형동, 김준영, 김시홍, 이승건(2011), "만타형 UUV의 제어기 설계에 관한 연구", 한국항해항만학회지, 35권, 5호, pp. 359-363.
- [3] 안병길, 이상민(2010), "부선의 파랑 중 저항 증가에 관한 연구", 한국항해항만학회지, 34권, 10호, pp. 741-746.
- [4] 정재훈, 이승건, 이창훈(2010), "모바일하버의 조종운동 수학적모델 구축 및 조종 시뮬레이션 개발에 관한 연구", 한국항해항만학회지, 34권, 8호, pp. 629-634.
- [5] Asai, T. and Hara, S.(1995), "Quadratic Stabilization by the Descriptor Form Representation with Structured Uncertainties", Transaction of the SICE, Vol. 31, No. 8, pp. 1037-1046.
- [6] Barmish, B.R.(1985), "Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System", Journal of Optimization Theory and Application, Vol. 46, No. 4, pp. 399-408.
- [7] Cobb, D.(1981), "Feedback and Pole Placement in Descriptor Variable Systems", International Journal of Control, Vol. 33, No. 6, pp. 1135-1146.
- [8] Fossen, T.I., Lindegaard, K.P. and Skjetne, R.(2002), "Inertia Shaping Techniques for Marine Vessels using Acceleration Feedback", Proceedings of the IFAC World Congress, Elsevier Science, Barcelona.
- [9] Fossen, T. I.(2002), "Marine Control Systems", Marine Cybernetics.
- [10] Khargonekar, P.P., Pertersen, I.R. and Zhou, K.(1990), "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems : Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-35, No. 3, pp. 356-361.
- [11] Pertersen, I.R. and Hollot, C.V.(1986), "A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems", Automatica, Vol. 22, No. 4, pp. 397-411.
- [12] Pertersen, I.R.(1987), "A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems", Systems & Control Letters, Vol. 8, No. 4, pp. 351-357.
- [13] Richter, S.L. and DeCarlo, R.A.(1983), "Continuation Methods : Theory and Applications", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-28, No. 6, pp. 660-665.

원고접수일 : 2012년 02월 06일
 심사완료일 : 2012년 05월 17일
 원고채택일 : 2012년 05월 21일