

## 확률적 구간이동 기법을 활용한 동적 포트폴리오 선정 문제에 관한 고찰

### An Investigation on Dynamic Portfolio Selection Problems Utilizing Stochastic Receding Horizon Approach

박주영\*† · 정진호\*\* · 박경욱\*\*

Jooyoung Park<sup>†</sup>, Jinho Jeong, Kyungwook Park

\*고려대학교 과학기술대학 제어계측공학과

\*\*고려대학교 경상대학 경영학부

#### 요 약

최근에 금융공학 분야에 보고된 바 있는 확률적 구간이동 기반 포트폴리오 선정기법은, 최적 포트폴리오 선정을 수행하는 과정에서 부(wealth)의 변화에 대한 동적 특성 및 여러 제약조건(constraints)을 명시적으로 고려할 수 있는 방법이다. 확률적 구간이동 최적화 기반 포트폴리오 선정기법은, 그동안 구간이동 최적화 기법이 다수의 공학 문제에서 성취하였던 이론적 가치, 범용성 및 효율 등을 고려할 때 현대 포트폴리오 이론 분야에서 또 하나의 주요한 기술혁신이 될 가능성을 가지고 있다. 이에 본 논문에서는 이론적 고찰을 바탕으로 단순화된 SDP 기반 동적 포트폴리오 선정이 가능함을 관찰하고, 이를 한국 주식시장에 적용하는 시뮬레이션 연구를 수행하여 결과 수익률에 관한 의미 있는 성과를 거두었다.

**키워드:** 동적 포트폴리오 선정, 투자론, 확률적 구간이동 기법

#### Abstract

Portfolio selection methods based on stochastic receding horizon approach, which were recently reported in the field of financial engineering, can explicitly consider the dynamic characteristics of wealth evolution and various constraints in the process of performing optimal portfolio selection. In view of the theoretical value, versatility, and effectiveness that receding horizon approach has achieved in many engineering problems, dynamic portfolio selection methods based on stochastic receding horizon optimization technique have the possibility of becoming an important breakthrough. This paper observes through theoretical investigations that the SDP(semi-definite program)-based portfolio selection procedure can be simplified, and has obtained meaningful performance on returns from simulation studies applying the simplified version to Korean financial markets.

**Key Words:** Dynamic portfolio selection, Investment theory, Stochastic receding horizon approach

#### 1. 서 론

주식 시장에서 어떤 것이 합리적 투자인가 하는 것은, 여러 가지 다양한 관점에서 풀이를 시도해볼 수 있는 어려운 문제 중 하나이다. 수익률을 높이는 동시에, 위험을 관리하는 차원에서 수익률의 변동성을 낮추는 것이 합리적인 투자가 취하는 대표적인 전략 중 하나라고 할 수 있는데[1], 이러한 전략에 따라 매 시간 최적의 분산 투자를 위한 해를 구하는 작업은 주식시장이 불확

실성을 가지고 끊임없이 변하는 동적 시스템을 고려하면 결코 쉽지 않은 작업임이 분명하다. 널리 알려진 바와 같이, 현대 포트폴리오 이론(modern portfolio theory)의 출발은 마코위츠(Harry M. Markowitz)의 “포트폴리오 선택(portfolio selection) 이론[2]”이라고 할 수 있다. 마코위츠는 특히 공매도(short sale)가 허용되지 않는 경우 효율적 포트폴리오들이 코너 포트폴리오(corner portfolio)의 선형결합으로 구성될 수 있음을 보이고, 이러한 코너 포트폴리오를 결정하는 기법(critical line method)을 개발함으로써 포트폴리오 이론의 창시자로 여겨지고 있다.

이후 마코위츠 포트폴리오 이론에서 포트폴리오 구성의 기본 모수인 기대수익률, 분산-공분산 행렬 추정 등의 부분에 관하여 다양한 방면에서 발전을 거듭하였다. 그러나 이러한 포트폴리오 이론은 기본적으로 정적 포트폴리오(static portfolio)의 구성에 대한 이론이라는 한계를 가지고 있다. 즉, 투자기간을 일기간(single

접수일자: 2012년 1월 5일

심사(수정)일자: 2012년 5월 11일

게재확정일자 : 2012년 5월 23일

† 교신 저자

이 논문은 2011년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업 지원을 받아 수행된 것임(2011-0021188)

period)으로 보고 포트폴리오를 구성하고 있다는 것이다. 그런데 투자자들은 실제로는 다기간에 걸쳐 포트폴리오를 구성하여야 하므로 다기간에 걸친 소위 동적 포트폴리오(dynamic portfolio)구성에 대한 포트폴리오 이론이 필요하게 마련이다. Merton[3]은 최초로 연속시간 포트폴리오 이론(continuous time portfolio theory)을 제시함으로써 이러한 동적 포트폴리오 이론의 개발과 응용의 돌파구를 마련하는 공헌을 하였다. 이후 동적 포트폴리오 이론은 부(wealth)와 이자율과 같은 상태변수(state variables)의 동적 변화를 다양하게 고려함으로써 더욱 진화하였다. Samuelson [4]은 투자자의 효용함수가 CARA(constant relative risk aversion)이고 자산 가격이 기하브라운 운동(geometric Brownian motion)을 따르는 경우 이자율이 일정하다면 최적의 동적 포트폴리오는 정적 포트폴리오를 유지하는 것임을 증명하였다. Besnainou-Jordan-Portait[5]은 HARA(hyperbolic absolute risk aversion) 효용함수를 가정하는 경우 최적 동적 포트폴리오 모형(closed form solution)을 제시하였다. 이와 같은 동적 포트폴리오 이론은 부(wealth)와 상태변수의 동적인 변화를 고려하여 다기간 혹은 연속시간상에서 포트폴리오 최적화 문제를 다루고 있다고 할 수 있다. 이와 같은 연속시간 포트폴리오 이론과 모형들은 연속시간을 기반으로 최적 포트폴리오 구성이나 자산배분(asset allocation)문제에 대한 이론적 접근을 가능하게 해 주었다는 면에서 그 의의가 크다고 할 수 있다.

한편 다양한 유형의 펀드를 구성하거나 운용하는 투자자들(기관 투자자 혹은 개인 투자자)은 일정한 투자기간(investment horizon)내에서 최적 포트폴리오를 구성, 운용해야 하는 경우가 많은데 이와 같은 경우의 포트폴리오 최적화 문제는 유한 구간내의 이산시간(discrete time) 포트폴리오 모형의 문제로 동적 포트폴리오 문제의 한 유형이라고 할 수 있을 것이다.

한편, 최근에는 투자효과의 극대화를 위하여 유전자 알고리즘, 특징추출기법 등의 공학적 방법론을 도입하는 방안이 주목을 끌고 있다(e.g., [6][7]). 이와 같이 공학적 기법에 의존하는 전략들 중 본 논문에서 주목하는 투자기법은 구간이동 최적화(receding horizon optimization)를 활용하는 방법론[8][9]이다. 구간이동 최적화 기법[10]은 일반적으로 입출력 또는 상태변수에 존재하는 제약조건(constraints)을 만족시키면서 긴 시간간격 위에서 정의되는 성능지수(performance index)를 최적화시키는 해를 구할 때 짧은 유한 구간만을 고려하여 쓸모 있는 해를 구하여 활용하는 실용적 해법으로 다양한 공학문제에 널리 쓰이고 있다(e.g., [11]), 이 기법의 특징은, 시스템의 모델을 기반으로 하여 일정한 구간의 미래 출력 값을 예측하고 이를 바탕으로 일정한 구간 위에서 정의되는 성능지수에 관한 최적화 문제를 풀어 준최적 입력(suboptimal input)을 구하는 과정을 매 시간 반복한다는 점이다. Primbs 등에 의해 관련학계에 보고된 바 있는 확률적 구간이동 최적화 기반 포트폴리오 선정 기법[8][9]은 전형적인 구간이동 최적화 전략에 불확실성이 지배하는 주식시장의 특징을 고려하기 위하여 수익률 평균, 수익률 공분산 및 상태제환(state feedback) 원리를 활용한 확률적 풀이법을 가미한 새로운 투자기법으로, 구간이동 최적화 기법이 갖

는 이론적 가치, 범용성 및 효용 등을 고려할 때 투자기간(investment horizon)내에서의 동적 포트폴리오 분야에서 또 하나의 주요한 기술혁신이 될 가능성을 가지고 있다. 이에 본 논문에서는 Primbs의 기법[8]에 대한 이론적 고찰을 바탕으로 향후 다양한 방향으로의 확장을 염두에 두고 상태와 입력이 분리된 형태를 사용하는 SDP 형태로 단순화한 후 MATLAB을 통하여 구한 결과를 바탕으로 해의 비교를 수행해보았다. 그리고, 단순화된 SDP를 한국 주식 시장에 적용하여 투자성적을 관찰하기 위하여, 한국거래소 유가증권시장에서 시가총액이 큰 종목 중 5개를 선정하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다: 2장에서는 Primbs의 확률적 이동구간 최적화 기반 포트폴리오 선정 기법[8]을 설명하고, 그 응용 분야를 동적 포트폴리오 선정 문제로 한정할 경우에 해당 구간이동 최적화 기반 풀이법이 단순화될 수 있음을 관찰한다. 3장에서는, 이 단순화된 풀이법을 한국 주식시장에 적용하여 투자성적을 관찰해본다. 마지막으로, 4장에서는 결론 및 추후 연구과제 등을 제시한다.

## 2. 구간이동 기반 동적 포트폴리오 선정

본 장에서는 확률적 이동구간 최적화 과정을 이용하여 동적 포트폴리오 선정을 수행하는 기법[8]을 설명하고 단순화 방안에 대해 논의한다. 본 논문의 관점에서 볼 때, 본 장에서 제시된 내용 중 가장 중요한 부분은 동적 포트폴리오 선정 문제가 기본적으로 구간이동 최적화를 통해 접근될 수 있다는 점이 될 것이다.

$i$  번째 주식의 시점  $k$  때의 가격을  $S_i(k)$  라고 하면, 이 가격은 다음 식을 만족한다:

$$S_i(k+1) = (1 + \mu_i + w_i(k))S_i(k), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

여기에서  $\mu_i$  는  $i$  번째 주식의 기대수익률이고,  $w_i(k)$  는  $E[w_i] = 0$ 와  $E[ww^T] = \Sigma$ 를 만족하는 iid 잡음이다 (단,  $w = [w_1 \dots w_n]^T$ ). 본 방법론은 시장에 나와 있는  $n$  개의  $S_i(k)$  중  $l \leq n$  개의 주식에 투자하는 경우를 생각하고, 시점  $k$  때 포트폴리오로부터 얻어지는 부(wealth)를  $W(k)$  로 표기한다.  $W(k)$  의 시간에 따른 변화는 다음과 같은 상태 방정식(state equation)으로 표현될 수 있다[8]:

$$W(k+1) = (1 + r_f)W(k) + \sum_{i=1}^l (\mu_i - r_f + w_i(k))u_i(k) \quad (2)$$

여기에서  $u_i(k)$  는 시점  $k$  때에  $S_i(k)$  에 투자하는 금액을 나타내고,  $r_f$  는 단위 시간동안의 무위험 이자율(risk free rate of interest)을 의미한다. 그리고, (2)식의 상태방정식(state equation)은 다음과 같은 성질을 가짐을 알 수 있다:

① 상태 방정식 (2)는 다음과 같이 잡음이 상태 또는 입력에 곱해져서 상태변화에 영향을 주는 구조의 선형 시스템으로 표현될 수 있다:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \sum_{j=1}^q [C_j x(k) + D_j u(k)]w_j(k) \quad (3)$$

(여기에서,  $w_j(k), j = 1, \dots, q$  는 iid 랜덤변수로

$E[w_j(k)] = 0, \quad E[w_j(k)w_l(k)] = 0 \quad \text{for } j \neq l$  및  $E[w_j(k)w_j(k)] = 1$  을 만족함)

⑥ 상태 방정식 (2)의 우변은 다음 식 (4)와 같이 “무위험 투자(risk free investment)로부터 얻어지는 부”와 “위험 투자(risky investment)로부터 얻어지는 부”의 합으로 표현될 수 있다:

$$\begin{cases} W(k+1) = (1+r_f)W(k) + \sum_{i=1}^l (\mu_i - r_f + w_i(k))u_i(k) \\ = (1+r_f)(W(k) - \sum_{i=1}^l u_i(k)) + \sum_{i=1}^l (1+\mu_i + w_i(k))u_i(k) \end{cases} \quad (4)$$

수익률의 기댓값을 높이면서 수익률의 변동성을 낮출 수 있는 투자 전략 중 하나로 아래와 같이 위험조정 기대수익(risk adjusted expected return)을 극대화하도록 주식종목에 투자되는 금액  $u_i(k)$  에 따라 포트폴리오를 구성하는 방안을 들 수 있다[8][9]:

$$\text{Maximize } \sum_{k=1}^{\infty} (E[W(k)] - \lambda \text{Var}[W(k)]) \quad (5)$$

subject to

$$W(k+1) = (1+r_f)W(k) + \sum_{i=1}^l (\mu_i - r_f + w_i(k))u_i(k) \quad (6)$$

여기에서 고려하는 최적화 문제에서는, 전체  $n$ 개의 주식 종목 중  $l$  개의 종목과 무위험 채권(risk free bond)에 투자하여 위험정도를 고려한 부(risk adjusted wealth)의 최대화를 다룬다. 위의 문제는 제약조건으로 시스템 동특성(system dynamics) 관련 조건식 (6)에 추가하여, 다음과 같은 조건들을 직접 혹은 근사적으로 고려할 수 있다[8]:

- 투자 금액에 대한 한도  
(예)  $P[u_i(k) \leq U] \geq 0.95 \quad (7)$

- 위험가치(Value-at-Risk)에 대한 한도:  
(예)  $P[W(k) \geq \delta W(0)] \geq 0.95 \quad (8)$

- Short selling에 대한 제약:  
(예)  $u_i(k) \geq 0 \quad (9)$

이상에서 설명한 동적 포트폴리오 선정문제의 해를 구하기 위해 참고문헌 [8]는 확률적 구간이동 기법(stochastic receding horizon approach)을 활용한다. 이 동구간 최적화 기법은 모델예측제어(model predictive control, MPC) 등의 분야에 주로 사용되는 기술이다 [10]. 이 기법의 특징은, 시스템의 모델을 기반으로 하여 일정한 구간의 미래 출력 값을 예측하고 이를 바탕으로 성능지수에 관한 최적화 문제를 풀어 입력을 구하는 과정을 매 시간스텝마다 반복하는 전략을 사용한다는 점이다. 이러한 전략에 따라 본 논문에서 고려하는 문제 (5)-(6)를 풀고자 할 때 우리는 매 시간스텝마다 다음의 두 단계를 반복적으로 적용하게 된다.

(1) 일정한 시간구간(horizon length)  $N$  동안을 고려하는 유한구간 최적화 문제(finite horizon optimization problem)를 실시간으로 푼다.

(2) 위의 풀이의 결과 중 첫 번째 시간스텝의 입력만 사용한다.

구간이동 최적화 기법에 관한 설명과정에서 표기법이 지나치게 복잡해지는 것을 방지하기 위해,  $k$ 번째 시간스텝 때의 현재 상태는  $x(k)$ 로 표기된다. 그리고, 입력과 상태를 위한 예측값을 위해서는 각각 다음과 같은 표기를 채용한다:

-  $u_N(i|k), i = 0, \dots, N-1$  은  $i$  스텝이후의 입력에 대한 예측값을 나타냄.

-  $x_N(i|k), i = 1, \dots, N$  은  $i$  스텝이후의 상태에 대한 예측값을 나타냄.

이와같은 표기법을 따르면, 다음과 같은 등식이 성립한다.

$$x_N(0|k) = x(k) \quad \text{and} \quad u_N(0|k) = u(k). \quad (10)$$

여기에서 고려하는 유한구간 최적화 문제가 풀릴 수 있도록 하기 위하여 Primbs[8]는 입력  $u_N(i|k)$  가 항상 다음과 같은 형태로 표현될 수 있음을 가정하였다:

$$u_N(i|k) = \bar{u}(i|k) + K(i|k)(x_N(i|k) - \bar{x}_N(i|k)). \quad (11)$$

여기에서, 위쪽에 붙은 bar 기호는 기댓값을 의미한다. (예를 들면,  $\bar{x}_N(i|k) = E_k[x_N(i|k)]$ ). 식 (11)의 입력은 페루프를 이루는 선형폐환항  $K(i|k)(x_N(i|k) - \bar{x}_N(i|k))$  과 개루프 형태의 입력항  $\bar{u}(i|k)$  의 합으로 구성된다.

$i=0$ 일 때에는  $x_N(0|k) = x(k)$  이 성립하므로,  $u_N(0|k) = u(k) = \bar{u}(0|k)$  이 성립하게 된다. 그리고, (7)-(8)에 제시된 확률적 제약조건(probabilistic constraints)은 Primbs[8]에 의해 유도된 전략을 따르면 다음과 같은 이차형식의 제약조건  $C(x(k), N)$  으로 근사될 수 있다:

$$E_k \left( \begin{bmatrix} x_N(i|k) \\ u_N(i|k) \end{bmatrix}^T H_i \begin{bmatrix} x_N(i|k) \\ u_N(i|k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}_N(i|k) \\ \hat{u}_N(i|k) \end{bmatrix}^T \hat{H}_i \begin{bmatrix} \hat{x}_N(i|k) \\ \hat{u}_N(i|k) \end{bmatrix} + h_i^T \begin{bmatrix} x_N(i|k) \\ u_N(i|k) \end{bmatrix} \right) \leq \beta_i, \quad (12)$$

$$l = 1, \dots, L. \quad (\text{단, } H_l, \hat{H}_l \geq 0, \quad \hat{x} = x - E_k[x], \quad \hat{u} = u - E_k[u])$$

이상에서 설명된 바와 같이 동적 포트폴리오 선정을 위한 입력  $u_{rhc}(k) = u_N^*(0|k)$  을 구하는 과정은 유한 시간스텝 위에서 정의되는 구간 이동 최적화 문제를 고려하는데, 참고문헌 [8]는 이를 위하여 다음 형태의 문제를 고려한다:

$$\text{Maximize } J_N(x(k), u_N(\cdot|k)) = E_k \left( \sum_{i=0}^{N-1} (f^T [x_N(i|k)] \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} x_N(i|k) \\ u_N(i|k) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} x_N(i|k) \\ u_N(i|k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{x}_N(i|k) \\ \hat{u}_N(i|k) \end{bmatrix}^T \hat{M} \begin{bmatrix} \hat{x}_N(i|k) \\ \hat{u}_N(i|k) \end{bmatrix} \right) \\ \left. + \phi^T x_N(N|k) - x_N^T(N|k) \Phi x_N(N|k) - \hat{x}_N^T(N|k) \hat{\Phi} \hat{x}_N(N|k) \right) \quad (13)$$

subject to

$$W(k+1) = (1+r_f)W(k) + \sum_{i=1}^l (\mu_i - r_f + w_i(k))u_i(k) \quad (14)$$

(단, 필요에 따라 부등식 (12) 형태의 제약조건  $C(x(k), N)$  가 추가될 수 있음)

(13)의 목적함수와 (14)의 제약조건을 갖는 최적화 문제는 SDP(semi-definite program) 기법과 랜덤변수의 기댓값 및 공분산 정보를 활용하여 풀릴 수 있다[8]. SDP는 목적함수가 변수에 대한 선형함수이고 제약조건이 선형행렬부등식(linear matrix inequality, LMI)인 경우를 의미한다. 선형행렬부등식은 다음의 (15) 형태의 부등식을 의미하며, 여기에서  $x_i$  는 변수이고  $A_i$  는 상수항들로 구성된 대칭행렬이고 “ $\geq$ ” 부분은 좌변이 양의 반한정(positive semidefinite)임을 의미한다:

$$x_0 + x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \geq 0 \quad (15)$$

선형행렬부등식 및 SDP에 대한 자세한 사항을 위해서는 참고문헌 [14]를 참조하면 된다.

구간 이동 최적화 문제 (13)-(14)의 풀이를 위해 기댓값 및 공분산 행렬 등이 도입된 SDP를 푸는 과정은 다음과 같이 설명될 수 있다. 포트폴리오 선정 문제 (5)-(6)은 기본적으로 랜덤변수에 대한 선형 및 이차형식의 정보를 담고 있으므로, 상태 및 입력변수의 평균 및 분산 정보가 중요한 역할을 할 수 있다. 편리하고 간단한 표기를 위하여

$$u(i) = u_N(ik), \quad (16)$$

$$x(i) = x_N(ik), \quad (17)$$

$$\bar{x}(i) = E_k[x(i)], \quad (18)$$

$$\hat{x}(i) = x(i) - \bar{x}(i), \quad (19)$$

$$\Sigma(i) = E_k[\hat{x}(i)\hat{x}(i)^T] = E_k[(x(i) - \bar{x}(i))(x(i) - \bar{x}(i))^T] \quad (20)$$

를 사용하면,  $\bar{x}(i)$ 와  $\Sigma(i)$ 는 다음을 만족하게 된다:

$$\bar{x}(i+1) = A\bar{x}(i) + B\bar{u}(i), \quad (21)$$

$$\Sigma(i+1) = \quad (22)$$

$$(A+BK(i))\Sigma(i)(A+BK(i))^T + \sum_{j=1}^q (C_j + D_jK(i))\Sigma(i)(C_j + D_jK(i))^T + \sum_{j=1}^q (C_j\bar{x}(i) + D_j\bar{u}(i))(C_j\bar{x}(i) + D_j\bar{u}(i))^T$$

참고문헌 [8]에서는 선형행렬부등식을 이용한 풀이를 가능하도록 하기 위해 변수 치환

$$U(i) = K(i)\Sigma(i), \quad (23)$$

과 새로운 변수도입

$$S(i) = E_k\left[\begin{bmatrix} \hat{x}(i) \\ \hat{u}(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(i) \\ \hat{u}(i) \end{bmatrix}^T\right], \quad (24)$$

$$P(i) = E_k\left[\begin{bmatrix} x(i) \\ u(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(i) \\ u(i) \end{bmatrix}^T\right], \quad (25)$$

를 활용하였는데, 이 과정을 거치면 (13)-(14)로 표현된 동적 포트폴리오 선정을 위한 구간이동 최적화 문제는 다음과 같은 SDP 문제로 표현된다(이 부분에서는, 수식의 표기가 지나치게 복잡해지는 것을 피하기 위해  $q=1$ 인 경우에 한해서 기술되었음):

$$\text{Maximize} \sum_{i=0}^{N-1} f^T \begin{bmatrix} \bar{x}(i) \\ u(i) \end{bmatrix} - \text{Tr}(MP(i)) - \text{Tr}(\hat{M}S(i)) + \phi^T \bar{x}(N) - \text{Tr}(\Phi'P(N)) - \text{Tr}(\Phi'S(N)) \quad (26)$$

subject to

$$\bar{x}(i+1) = A\bar{x}(i) + B\bar{u}(i), \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma(i+1) & * & * & * \\ (A\Sigma(i) + BU(i))^T \Sigma(i) & * & * & * \\ (C\Sigma(i) + DU(i))^T & 0 & \Sigma(i) & * \\ (\bar{C}\bar{x}(i) + \bar{D}\bar{u}(i))^T & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ for } i=1\dots N-1, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma(1) & * \\ (\bar{C}\bar{x}(0) + \bar{D}\bar{u}(0))^T & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} P(i) & \begin{bmatrix} \Sigma(i) \\ U(i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(i) \\ u(i) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Sigma(i) & U^T(i) \end{bmatrix} & \Sigma(i) & 0 \\ \begin{bmatrix} \bar{x}^T(i) & \bar{u}^T(i) \end{bmatrix} & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ for } i=1\dots N-1, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} S(i) & \begin{bmatrix} \Sigma(i) \\ U(i) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Sigma(i) & U^T(i) \end{bmatrix} & \Sigma(i) \end{bmatrix} \geq 0 \text{ for } i=1\dots N-1. \quad (31)$$

위의 SDP 문제에도, 필요에 따라 부등식 (12) 형태의 추가적인 제약조건  $C(x(k), N)$ 이 추가될 수 있다. 이와같이  $C(x(k), N)$ 을 고려하는 경우에는 다음의 선형행

렬부등식이 제약조건으로 추가된다[8]:

$$\text{Tr}(H_l P(i)) + \text{Tr}(\hat{H}_l P(i)) + h_l^T \begin{bmatrix} \bar{x}(i) \\ u(i) \end{bmatrix} \leq \beta_l \quad (32)$$

for  $l=1, \dots, L$  and  $i=0, \dots, N-1$ .

여기에서, (26)식의 목적함수 부분에 사용된  $\Phi'$ 과  $\hat{\Phi}'$ 는 각각 원래의 문제 (13)에 사용된  $\Phi$ 과  $\hat{\Phi}$ 에 적절한 개수의 0을 추가하여 전체 행렬의 크기가  $(n+m) \times (n+m)$ 이 되도록 정의된 결과이다. 그리고, 위의 문제의 풀이결과로 얻어진 최적해  $u^*(i)$ ,  $i=0, \dots, N-1$  중 시점 0일 때의 입력이 우리가 구간 이동 최적화 기법에서 사용하는 해가 된다(즉,  $u_{rhc}(k) = u^*(0)$ ).

본 논문에서 다루는 첫 번째 주제는, 이상에서 설명된 확률론적 구간이동 최적화 기반 동적 포트폴리오 선정 방법론에 등장하는  $S(i)$ 와  $P(i)$ 가 각각  $\hat{x}$ 와  $\hat{u}$ ,  $x$ 와  $u$ 의 크로스 항(cross term)에 의존하는 형태로 정의되고 있다는 사실로부터 출발한다. 이러한 크로스 항 형태의 변수 사용은 상황에 따라, 예컨대 확률적 구간이동 기법을 다양한 방향으로 확장시키고자 할 때 필요 이상의 복잡성을 야기할 수 있다. 이에 따라 본 논문에서는 동적 포트폴리오 선정 문제 (5)-(6)의 풀이를 위해 고려하는 확률적 구간이동 최적화 문제가, 참고문헌 [8]의 기본 꼴 (13)-(14)에서 크로스 항을 기반으로 정의되는  $S(i)$ 와  $P(i)$ 를 사용하지 않는 형태로 단순화될 수 있음을 관찰한다. 이러한 관찰에 대한 보다 구체적인 설명은 다음과 같다. 식 (5)에 나타난 동적 포트폴리오 선정 문제의 목적함수는 상태변수를 구성하는 부(wealth), 즉,  $W(k)$ 의 기댓값과 분산으로 구성된다. 따라서, 동적 포트폴리오 선정 문제 (5)-(6)을 확률적 구간이동 기법으로 풀고자 할 때 고려하는 목적함수 (13)식에 등장하는 가중행렬(weight matrices)은 다음과 같은 블록행렬(block matrices) 표현을 갖게 되어 크로스 항에 대한 가중치는 0이 된다:

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, M=0, \hat{M} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \phi = 1, \Phi = 0, \hat{\Phi} = \lambda \quad (33)$$

(단, 이 식에 등장하는 0는 문맥에 따라 스칼라 값 0, 영벡터, 혹은 영행렬을 의미함)

이러한 관찰로부터 (26)-(31)로 구성된 SDP 기본꼴이 본 논문에서 고려하는 동적 포트폴리오 선정 문제의 경우에는 다음과 같은 단순화된 형태로 고쳐 쓸 수 있음을 알 수 있다:

$$\text{Maximize} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{x}(i) - \lambda \Sigma(i)) + \bar{x}(N) - \lambda \Sigma(N) \quad (34)$$

subject to

$$\bar{x}(i+1) = A\bar{x}(i) + B\bar{u}(i), \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma(i+1) & * & * & * \\ (A\Sigma(i) + BU(i))^T \Sigma(i) & * & * & * \\ (C\Sigma(i) + DU(i))^T & 0 & \Sigma(i) & * \\ (\bar{C}\bar{x}(i) + \bar{D}\bar{u}(i))^T & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \text{ for } i=1\dots N-1, \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma(1) & * \\ (\bar{C}\bar{x}(0) + \bar{D}\bar{u}(0))^T & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (37)$$

이상에서 설명된 단순화된 SDP에는 크로스 항과 관련된  $S(i)$ 와  $P(i)$ 는 등장하지 않는다. 아울러 (7)-(9)에

서 보여진 추가적인 제약조건도 상태  $x$ 와 입력  $u$ 이 분리된 형태로 주어지므로  $C(x(k), N)$ 를 위한 부등식 (32)에서  $S(i)$ 와  $P(i)$ 를 사용하는 대신, 기댓값  $\bar{x}$ 와 공분산 행렬  $\Sigma$ 를 직접 사용하는 형태를 통하여 대체 혹은 근사가 가능하다. 이러한 단순화는 향후에 확률적 구간이동 기법 기반 동적 포트폴리오 선정문제를 다양한 방향으로 확장시키고자 할 때 유용한 출발점이 될 것으로 기대된다.

이상에서 논의한 단순화 작업을 계산적으로 확인해보기 위하여, MATLAB을 이용하여 [8]에서 고려한 예제를 대상으로 간단한 계산을 수행하여 보았다. 참고문헌 [8]에서는  $S_1 = \text{IBM}$ ,  $S_2 = \text{3M}$ ,  $S_3 = \text{Altria}$ ,  $S_4 = \text{Boeing}$ ,  $S_5 = \text{AIG}$ 의 다섯 가지 종목에 대하여 다음과 같은 연간 수익률의 기댓값과 공분산을 구한 후,  $\lambda = 10^{-3}$ 를 사용하여 월별로 포트폴리오의 입력을 조정하는 경우를 위해 SDP 문제 (26)-(31)를 풀어 표 1의 두 번째 행과 같은 해를 구하였다:

$$\mu = [0.0916, 0.1182, 0.1462, 0.0924, 0.1486]^T \quad (38)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.09401, 0.01374, 0.01452, 0.01237, 0.01838 \\ 0.01374, 0.05062, 0.01475, 0.02734, 0.02200 \\ 0.01452, 0.01475, 0.09017, 0.01029, 0.01286 \\ 0.01237, 0.02734, 0.01029, 0.09922, 0.02674 \\ 0.01838, 0.02200, 0.01286, 0.02674, 0.07318 \end{bmatrix} \quad (39)$$

같은 문제를 대상으로 하여, 본 논문에서 관찰한 결과에 따르는 단순화된 SDP (34)-(37)를 MATLAB 기반 SDP solvers로 풀어본 결과 참고문헌 [8]와 매우 가까운 결과가 얻어졌다(표 1의 세 번째 및 네 번째 행 참조). 계산과정에는 sedumi와 yalmip[13]을 기반으로 하는 방법과 MATLAB LMI Control Toolbox[15]의 사용을 모두 고려하였는데, 두 방법 모두 비슷한 해를 제공하였다. 이러한 결과는 본 장에서 기술한 단순화 과정에 대한 계산적 검증은 보여주는 사례라고 할 수 있다.

표 1. SDP 해의 비교  
Table 1. Comparison of SDP solutions

방법론	SDP의 풀이를 통하여 구한 해
참고문헌 [8]	$u_{\text{IBM}} = 14.1016$ , $u_{\text{3M}} = 376.1655$ , $u_{\text{Altria}} = 417.7363$ , $u_{\text{Boeing}} = -71.5679$ , $u_{\text{AIG}} = 529.2700$
단순화된 SDP (sedumi와 yalmip [13] 활용)	$u_{\text{IBM}} = 14.0865$ , $u_{\text{3M}} = 376.2391$ , $u_{\text{Altria}} = 417.7886$ , $u_{\text{Boeing}} = -71.5384$ , $u_{\text{AIG}} = 529.3234$
단순화된 SDP (LMI Control Toolbox [15] 활용)	$u_{\text{IBM}} = 14.2807$ , $u_{\text{3M}} = 381.4274$ , $u_{\text{Altria}} = 423.5498$ , $u_{\text{Boeing}} = -72.5249$ , $u_{\text{AIG}} = 536.6227$

### 3. 한국 주식시장에 대한 적용 및 성과 분석

본 논문에서 고려하는 확률적 구간이동 최적화 방법을

이용한 동적 포트폴리오 선정 기법의 한국 주식시장 적용가능성을 살펴보기 위하여 본 장에서는 2007년 3월 6일부터 2008년 9월 5일까지의 총 1년 6개월 동안 모의 투자를 시행하였다. 참고문헌 [12]에서 언급한 바와 같이 위의 기간 동안 KOSPI지수는 시작시점(2007년 3월 6일)의 값인 1402.93과 최종시점(2008년 9월 5일)의 값인 1404.38이 거의 비슷할 뿐만 아니라, 그 사이 기간이 상승기(2007-03-06부터 2007-07-23일까지), 횡보기(2007-07-23부터 2008-05-26까지) 및 하락기(2008-05-26부터 2008-09-05까지)로 구성되어 있으므로 투자성과를 분석하는 데에 적절한 선택이 될 수 있다(참고문헌 [12]의 <그림 1> 참고).

본 논문에서는 한국 주식시장에서 시가총액이 큰 종목 중 5개 종목(삼성전자, SK텔레콤, 한국전력, POSCO, 현대차)으로 구성된 포트폴리오를 기반으로 펀드를 운용하는 것으로 가정한다. 이와 같은 가상의 펀드에 대하여 2장에서 다룬 단순화된 확률적 구간이동 최적화 기반 동적 포트폴리오 선정 알고리즘을 MATLAB으로 구현하면서 모의적으로 운영하여 보았다. 식 (2)의 무위험 이자율  $r_f$  값으로는, 해당 기간 동안의 국고채3년물 수익률 자료를 고려하여 0.05를 선택하였다. 참고로 위의 5개 종목의 모의투자 시행 이전 1년간(2006년 3월 6일부터 2007년 3월 6일)의 주가변화와 모의투자 시행 기간(2007년 3월 6일부터 2008년 9월 5일) 동안의 주가변화가 각각 그림 1과 그림 2에 나타나 있다. 본 논문에서 시행한 모의 투자에서는, 투자 시점으로부터 최근 일년 동안 수집한 일종가 자료를 가지고, 기대수익률 벡터와 공분산 행렬을 구한다. 이렇게 구한 자료를 본 논문에서 고려하는 SDP에 적용하여 그 해에 따라 투자하고, 다음번 교체 주기가 도달할 때까지 현재의 포트폴리오를 그대로 유지하는 형태로 시뮬레이션을 진행하였다. 다음번 교체 주기가 도달하면 해당 시점까지의 수익률을 기록한 후, 최근 일년 동안에 수집된 일종가 자료를 이용하여 개별 주식의 기대수익률 벡터 및 공분산 행렬을 다시 구한 후, 이를 바탕으로 정의된 SDP를 풀어서 새로운 포트폴리오를 구한다. 총 1년6개월 동안 이와 같은 방식으로 정해진 주기마다 포트폴리오의 구성을 변경해 가며 가상의 펀드를 계속 운영한다. 이러한 성과분석을 위한 일종가 데이터는 한국거래소로부터 입수하였으며, 초기시점의 부(wealth)는  $W(0) = 100$ 을 가정하였다. 그리고, SDP를 이용한 계산과정에는 2장에서와 마찬가지로 sedumi와 yalmip 기반 solver[13]를 사용하였으며 관련 파라미터로는  $N = 5$ ,  $\lambda = 0.01$ 를 선택하였다. 계산의 편의를 위하여 주식거래 수수료 및 세금 등으로 구성되는 거래비용은 무시하였다. 그리고, 본 논문의 시뮬레이션을 위한 포트폴리오 교체 기간은 8주로 잡았다. 따라서, 매 스텝에서 결정된 포트폴리오의 구성비율은 8주 동안은 그대로 유지되고 8주가 경과한 후에는 SDP가 제공하는 해를 바탕으로 새로운 포트폴리오로 업데이트된다. 이와 같은 방식을 반복하여 포트폴리오를 매 8주의 간격으로 조정하면서 전체 기간 동안 약 10회에 걸쳐서 모의 투자를 시행하였다.

그림 3에는 (34)-(37)의 SDP에 기본적으로 공매도를 허용하되 가용자금의 50% 이내에서 long 및 short position이 구성되는 제약조건 (즉,

$|\sum_{i=1}^5 u_i(k)| \leq 0.5 \times W(k)$  )를 추가적으로 부과하는 경우

의 부(wealth)의 변화가 보여졌고, 그림 4에서는 5개 종목에 투자되는 금액을 도시하였다. 그림 3의 결과는 1년6개월의 모의투자 기간동안 180% 정도의 수익률을 보여주는데, 이는 short selling의 허용에 따르는 공격적인 투자의 결과로 보여진다. 보다 현실적인 상황을 고려하기 위해서 같은 시장 데이터에 대해 가용자금 이내에서의 투자 및 공매도 불가의 조건 (즉,

$\sum_{i=1}^5 u_i(k) \leq W(k), u_i(k) \geq 0 \text{ for } \forall i$ ) 아래에서 얻은

결과가 그림 5와 6에 보여졌다. 이 경우에는 1년 6개월의 해당 고려기간 동안 KOSPI 지수가 0.1%의 변화를 보이는 데에 반해, 본 논문에서 고려한 가상의 펀드는 40%이상의 수익률을 기록하는 성과를 보였다. 이러한 성과는, 본 논문의 고려와 같이 평균 수익율과 분산 정보를 반영하며 확률적 구간이동 기법으로 시장에 대처하는 경우에 상승, 하강 및 횡보 현상이 골고루 나타나는 시변적인(time-varying) 특성이 있는 경우에도 어느 정도 효과를 거두는 대응방법이 될 수 있음을 보여준다. 상승기 혹은 하강기만을 갖는 일관성 있는 변화패턴을 갖는 시장에 대한 대응은, 시변적인 특성의 부재로 말미암아 일반적으로 상승기, 하강기, 횡보기가 골고루 존재하는 경우보다 더 다루기가 용이하다고 볼 수 있는데, 이러한 사례를 최신 근사적 동적 계획법(approximate dynamic programming)인 min-max ADP를 통하여 다룬 예로는 [16]을 들 수 있다. 마지막으로, 본 논문에서 얻어진 결과는 데이터 수집 기간이 최근 1년이고 포트폴리오 업데이트가 매 8주마다 시행되는 투자 패턴을 기반으로 하고 있다. 투자 때에 사용하였던 데이터 수집 기간 및 포트폴리오 교체 시기가 변경되면 이러한 성과는 어느 정도 차이를 보일 수 있다. 이러한 측면을 고려할 때, “데이터 수집기간”과 “포트폴리오 교체시기”에 관한 민감도 분석은 향후에 다루어야 할 중요한 연구과제 중 하나라고 할 수 있다.

#### 4. 결론 및 향후 연구 과제

최근에 구간이동 최적화 방법론과 투자론 분야에서 소개된 바 있는 확률적 구간이동 최적화 기반 동적 포트폴리오 선정 기법[8][9]은, 구간이동기법이 갖는 이론적 가치, 범용성 및 효용을 고려할 때 현대 포트폴리오 이론 분야에서 주요한 기술혁신이 될 가능성을 가지고 있다.

본 논문에서는 Primbs의 기법[8]을, 향후 다양한 방향으로의 확장을 염두에 두고 상태와 입력이 분리된 형태를 사용하는 SDP 형태로 단순화한 후 MATLAB을 통하여 결과를 구한 후 비교하였다. 그리고, 단순화된 SDP를 한국 주식 시장에 적용할 경우 어느 정도의 성과가 얻어지는가를 고찰하기 위하여, 한국거래소의 유가증권 상장종목 가운데 시가 총액이 큰 5개 종목을 선택하여 모의 운영한 가상적인 펀드의 운용성과를 KOSPI 지수의 변화율과 함께 비교·관찰하였다. 데이터 수집기간을 1년으로 하고 포트폴리오를 매 8주마다

변경하였을 때 본 논문에서 모의운영한 가상펀드는 공매도가 허용되지 않고 가용자금내에서 투자하는 경우에도 40% 이상의 수익률을 기록하였고, 이는 해당 기간동안의 KOSPI 지수 변화율 0.1%을 상회하는 수치이다. 본 논문에서 보여준 이러한 모의운영 결과는 공학적 방법론을 이용하여 투자론을 연구하는 학자들에게 추가적인 연구에 대한 매력을 제공하는 고무적인 결과라고 할 수 있다.

향후 연구과제 중 하나로, 다기간에 걸친 포트폴리오 최적화 문제에서 활용할 수 있는 기존의 다양한 포트폴리오 전략의 투자성과와 확률적 구간이동 기법에 의한 동적포트폴리오의 투자성과를 비교·대조함으로써 확률적 구간이동 기법의 상대적 우수성을 확인하는 작업을 들 수 있다. 이때 비교대상이 되는 기존의 포트폴리오 전략으로는 매수-보유 전략(buy and hold strategy), 조정 포트폴리오(rebalanced portfolio), 최적 조정 포트폴리오(optimal rebalanced portfolio)등을 고려하여 볼 수 있을 것이다. 또한 데이터 수집기간과 포트폴리오 교체 시기에 대한 민감도 분석, 보다 다양한 주식 종목의 고려, 그리고 옵션 등 파생상품을 포함하는 포트폴리오의 운영 등의 연구도 의미있는 추가 연구가 될 것이다.

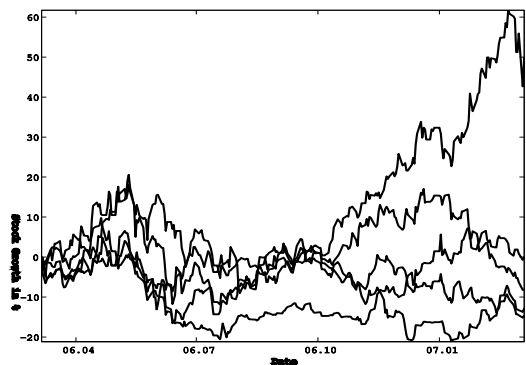


그림 1. 2006년 3월 6일부터 2007년 3월 6일까지의 정규화된 주가  
Fig. 1. Normalized stock prices during 2006/03/06-2007/03/06

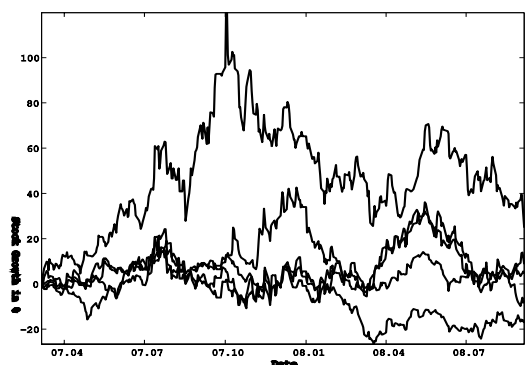


그림 2. 2007년 3월 6일부터 2008년 9월 5일까지의 정규화된 주가  
Fig. 2. Normalized stock prices during 2007/03/06-2008/09/05

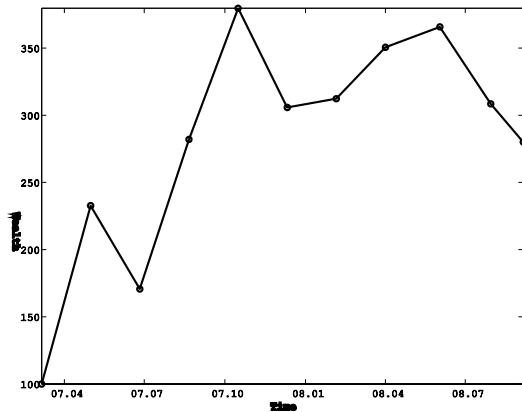


그림 3. 공매도가 허용되는 경우에 얻어지는 부  
Fig. 3. Wealth obtained when short selling is allowed.

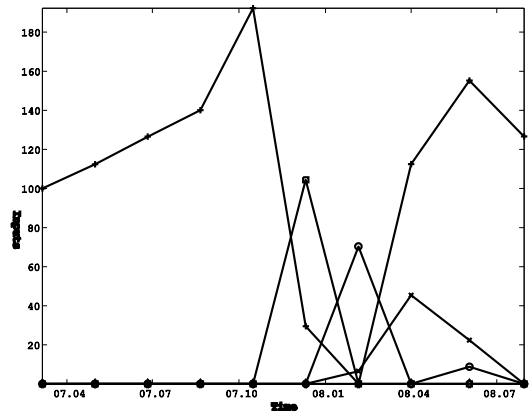


그림 6. 공매도가 허용되지 않는 경우에 각  
주식에 투자되는 금액  
Fig. 6. Amounts of money invested to each  
stock when short selling is not allowed.

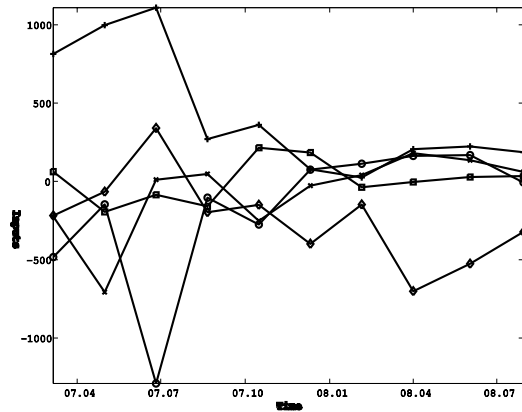


그림 4. 공매도가 허용되는 경우에 각 주식에  
투자되는 금액  
Fig. 4. Amounts of money invested to each  
stock when short selling is allowed.

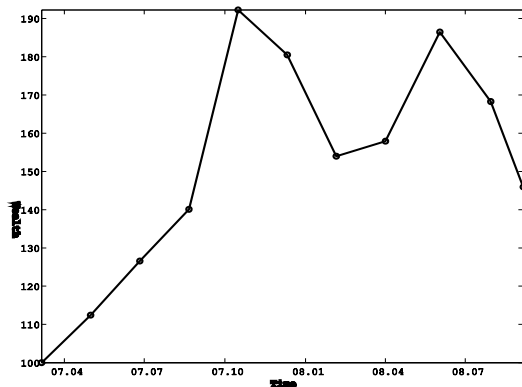


그림 5. 공매도가 허용되지 않는 경우에  
얻어지는 부  
Fig. 5. Wealth obtained when short selling is  
not allowed.

### 참 고 문 헌

- [1] A. Cerny, *Mathematical Techniques in Finance: Tools for Incomplete Markets*, 2nd Edition, Princeton University Press, 2009.
- [2] H. M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Cowles Foundation Monograph, No. 16, John Wiley and Sons, 1959.
- [3] R. Merton, "Optimum consumption and portfolio rules in an continuous time model," *Journal of Economic Theory*, vol. 3, pp. 373-413, 1971.
- [4] P. A. Samuelson, "Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming," *Review of Economics and Statistics*, vol. 51, pp. 239-246, 1969.
- [5] I. Bajeux-Besnainou, J. V. Jordan, and R. Portait, "Dynamic asset allocation for stocks, bonds and cash," *Journal of Business*, vol. 76, no. 2, pp. 263-287, 2003.
- [6] 김상호, 김동현, 한창희, 김원일, "주가지수 관계와 유전자 알고리즘을 이용한 주식예측," *한국지능시스템학회 논문지*, 18권 6호, pp. 781-786, 2008.
- [7] 이상홍, 임준식, "자동 특징 추출기법에 의한 최소의 주식예측 특징선택," *한국지능시스템학회 논문지*, 19권 2호, pp. 206-211, 2009.
- [8] J. Primbs "Portfolio Optimization Applications of Stochastic Receding Horizon Control", *Proceeding of the 2007 American Control Conference*, New York, NY, pp. 1811-1816, July 2007.
- [9] B. Kim and J. A. Primbs, "A Kalman filter based model for asset prices and its application to portfolio optimization," (Available at [http://www.stanford.edu/~baehokim/Kalman\\_RHC](http://www.stanford.edu/~baehokim/Kalman_RHC)).

pdf, 또는  
[http://biz.korea.ac.kr/~baehokim/research/Kalman\\_RHC.pdf](http://biz.korea.ac.kr/~baehokim/research/Kalman_RHC.pdf)

- [10] E. F. Camacho and C. Bordons, *Model Predictive Control*, Springer Verlag, 2004.
- [11] J. A. Primbs, *Nonlinear Optimal Control: A Receding Horizon Approach*, PhD Thesis, Control and Dynamical Systems, California Institute of Technology, 1999.
- [12] 김성문, 김홍선, “한국 주식시장에서 비선형계획법을 이용한 마코위츠의 포트폴리오 선정 모형의 투자 성과에 관한 연구”, *경영과학*, 26권 2호, pp. 19-35, 2009.
- [13] <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>
- [14] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1994.
- [15] P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, MathWorks Inc., 1995.
- [16] 박주영, 권기영, 양동수, 정진호, 박경욱, “근사적 동적 계획법 기반 포트폴리오 최적화에 관한 고찰”, *한국지능시스템학회 2012년도 춘계학술대회 논문집*, 22권1호, pp. 109-110, 2012년 4월.



**정진호(Jinho Jeong)**

1982년 : 고려대학교 경영학과 경영학사  
 1991년 : 조지아 주립대학교 재무학과 경영학박사 (석,박사통합)  
 2007년~현재 : 고려대학교 경상대학 경영학부 교수  
 2011년~2012년 : 한국재무관리학회 학술위원장

관심분야 : 기업재무, 국제재무, 행동재무, 문화금융  
 E-mail : jayjeong@korea.ac.kr



**박경욱(Kyungwook Park)**

1983년 : 서울대학교 경영학과 경영학 학사  
 1985년 : 서울대학교 국제경영학 석사  
 1993년 : Univerisy of Texas at Austin, 재무학 박사  
 1994년~현재 : 고려대학교 경상대학 경영학부 교수

관심분야 : 재무관리, 금융공학  
 E-mail : pkw@korea.ac.kr

저 자 소 개



**박주영(Jooyoung Park)**

1983년 : 서울대학교 전기공학과 공학사  
 1985년 : KAIST 핵공학과 공학석사  
 1992년 : Univerisy of Texas at Austin, 전기 및 컴퓨터공학과 공학박사  
 1993년~현재 : 고려대학교 과학기술대학 제어계측공학과 교수

관심분야 : 기계학습, 제어이론, 학습이론  
 E-mail : parkj@korea.ac.kr