East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 2, pp. 197-213

삼각형의 변들에 대한 등식을 탐구하는 한 방법에 대한 연구

강 인 주 · 한 인 기 1)

ABSTRACT. In this paper we study Soltan & Meidman's method that is able to be used in mathematical discovery. We analyze Soltan & Meidman's book "Tozdestva i Neravenstva v Treugolike" that is published in Moldova Republic. In this work we formulate Soltan & Meidman's method related with discovery of triangle's various equalities, and use the method to discovery mathematical equalities. As a result we suggest some new mathematical equalities related with triangle's sides and its proof.

1. 서론

수학교육학의 연구와 실제에서 수학 문제해결, 창의성, 수학적 발견 등의 개념들이 독립적으로 또는 서로 연결되며 강조되고 있다. 예를 들어 창의적 문제해결, 문제해결과 수학적 발견, 창의적인 수학 탐구를 통한 수학적 발견 등은 수학교육학의 흥미로운 연구 주제들이다. 그리고 수학교육과정에서도 이들 개념은 중요하게 취급되고 있다. 2011년 개정 고시된 수학과 교육과정([1], p.2)에서도 '복잡하고 전문화되어가는 미래 사회에서 사회 구성원에게 필요한 핵심 역량은 창의적 사고 능력, 문제해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등으로, 이는 주로 수학적 추론, 수학적 문제해결, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수·학습을 통하여 증진된다'고 기술하고 있다. 즉 수학과 교육과정에서 수학적 문제해결, 추론, 의사소통 등의 활동을 통한 창의적 사고 능력, 문제해결 능력, 정보처리 및 의사소통 능력의 육성이 중요한 목표가 된다는 것을 알 수 있다.

Polya([10], p.viii)는 '교과의 지식은 정보적 지식(information)과 방법적 지식(know-how)으로 이루어진다. 기초 수준이건 고등 수준이건, 참된 수학적 경험을

2012년 1월 18일 투고, 2012년 2월 22일 심사완료.
1) 교신저자
2010 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key words: 삼각형, 등식의 발견, 방정식

하고자 한다면, 단순히 정보적 지식을 소유하는 것보다는 방법적 지식을 갖추는 것이 훨씬 더 중요하다는 데는 이론의 여지가 없다'고 주장하면서, 수학 문제해결의 교육에서 수학적 탐구 방법의 중요성을 강조하였다.

수학교육학 연구에서 방법적 지식은 발견술(또는 문제해결 전략)의 개념과 관련하여 주로 논의되고 있다. 우정호([4], p.309)는 '발견술이란 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 실제적인 문제해결에서 전형적으로 유용한 발견과 발명의 방법과 규칙, 실제적인 발견과 발명의 전략과 전술이며, ...발견술은 주어진 문제의 해답을 발견하는 데 도움을 주지만, 그에 따라 사고한다고 하여 문제의 해결이 보증되는 것은 아니며...'와 같이 규정하였다.

수학 분야에서 발견술에 대한 연구는 분석법을 체계화시킨 Pappus까지 거슬러 올라가 논의할 수 있으며, Descartes, Leibniz, Bolzano, Polya 등이 두드러진 연구 결과를 남겼다. 최근에 수학적 발견술과 관련하여 주목할 만한 연구로, Lakatos([8])의 증명과 반박의 수학적 발견의 논리를 들 수 있다.

Lakatos는 '다면체에서 $v-e+f=2$이다'라는 추측으로부터 출발하여 증명과 반박의 과정을 통해 새로운 수학적 추측들을 발견하는 역동적인 과정을 제시하였다. 특히 기존의 수학적 발견술들은 주어진 문제의 효과적인 해결 방법에만 초점이 맞추어졌지만(다양한 발견술에 대해서는 Larson([9]), 신현성 · 김경희([3]), 정동권 · 김수미 · 김지원([6]) 등을 참고할 것), Lakatos의 연구는 주어진 추측의 증명과 함께 새로운 수학적 추측의 발견 과정이 체계적으로 제시되었다는 점에서 큰 가치를 부여할 수 있다. 우정호([4], p.306)는 'Lakatos의 수리철학과 수학적 발견의 논리에 관한 연구는 수학교육학 이론의 한 모형이 될 수 있으며 그 연구자를 위한 시금석이 될 수 있을 것으로 생각된다'고 하면서, Lakatos 연구의 교육적 가치를 높게 평가하였다.

Lakatos의 연구처럼, 새로운 수학적 관계를 발견하고 이를 증명하는 방법들에 대한 다양한 연구는 Polya가 주장한 방법적 지식의 측면에서, 그리고 창의적인 수학 문제해결, 창의적 수학 탐구, 수학적 발견을 지향하는 수학교육의 구현이라는 측면에서 의미가 있을 것이다. 본 연구는 수학 등식들을 증명하고 새로운 등식들을 탐구하는 한 가지 접근 방법에 대한 문헌 연구이다.

본 연구에서는 삼각형에 대한 등식들의 탐구에 관련된 Soltan & Meidman의 연구를 분석하며, 이를 활용하여 삼각형의 변들에 대한 몇몇 새로운 등식들을 얻는 구체적인 사례를 그 증명과 함께 제시할 것이다. 본 연구를 통해 중등학교 수준에서 활용할 수 있는 수학적 발견의 방법과 그 예들이 체계적으로 제시될 것이며 연구의 결과들은 창의적 수학 문제해결, 수학적 발견을 지향하는 수학교사나 중등학교 학생들의 수학 연구의 소재로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

2. 연구방법 및 절차

본 연구는 삼각형의 변들에 대한 등식을 탐구하는 방법에 대한 문헌 분석과 이를 활용한 다양한 등식의 탐구로 구성된다.

(1) Soltan & Meidman의 연구에 대한 문헌 분석

문헌 연구에서는 삼각형의 등식 증명에 관련된 Soltan & Meidman의 연구 [11]을 분석할 것이다. 이 연구에는 삼각형의 변들, 높이들, 방접원의 반지름들 등과 같은 삼각형에 관련된 250개 정도의 항등식과 부등식들이 포함되어 있다.

Soltan & Meidman([11], p.3)은 책의 머리말에서 '기하학적 도형들의 관계식들에 관련된 한 어려움은 이 관계식들의 표준화된 증명 방법이 없다는 것이다. 이 책은 삼각형의 요소들, 양들에 관련된 다양한 부류의 항등식과 부등식들을 학습하기 위해 저술되었다. 이 책에 제시된 삼각형에 대한 관계식들은 한 가지 방법에 의해 얻어질 수 있다'고 하였다. 그리고 Soltan & Meidman([11], pp.3-4)은 이 방법과 관련하여 '삼각형에서 우리가 관심을 가지고 있는 세 요소를 근으로 하는 삼차방정식을 만든다. 그런 다음, 삼각형의 요소들에 대해 대칭인 다항식들이 둘레의 절반, 외접원의 반지름, 내접원의 반지름으로 표현되는 항등식들을 비에트의 정리를 이용하여 얻을 수 있다'고 하였다. 즉 Soltan & Meidman의 방법은 삼각형의 요소들을 근으로 하는 삼차방정식 만들기, 얻어진 삼차방정식에 비에트의 정리(근과 계수의 관계)를 이용하여 항등식들을 증명하기로 구성된다.

본 연구에서는 Soltan & Meidman의 연구에 제시된 항등식의 증명 과정을 삼각형의 변들을 근으로 하는 삼차방정식 만들기, 근과 계수의 관계를 이용한 삼각형의 변들에 대한 항등식 증명을 중심으로 분석할 것이다. 이를 바탕으로, 삼각형의 변들에 대한 관계식을 증명하는 Soltan & Meidman의 방법을 분석하여 체계적으로 제시할 것이다.

(2) 삼각형에 대한 새로운 등식의 탐구

문헌 연구로부터 얻어진 Soltan & Meidman의 삼각형의 변들에 대한 등식 탐구의 방법 및 단계들을 바탕으로, 삼각형의 변들에 대한 새로운 등식들을 탐구하는 구체적인 사례들을 제시할 것이다. 특히 본 연구에서는 삼각형의 세 변 a, b, c에 대해 $a^n+b^n+c^n\,(n=3,\ 4,\ 5)$, $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}\,(n=2,\ 3)$, $\dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)}\,(n=3,\ 4)$인 꼴을 가지는 몇몇 다항식에 관련된 삼각형의 등식들을 연구하여 그 증명과 함께 제시할 것이다.

3. Soltan & Meidman의 문헌 분석

Soltan & Meidman의 접근 방법은 삼차방정식 만들기와 삼차방정식에 근과 계수의 관계를 이용하여 등식 만들기로 이루어진다. 우선 삼각형에 관련된 삼차방정식을 만드는 Soltan & Meidman의 연구 결과를 살펴보자.

(1) 삼각형의 변들에 관련된 삼차방정식 만들기

Soltan & Meidman은 삼각형 ABC의 변들의 길이 a, b, c를 근으로 하는 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$을 제시하였다. 이때 p는 삼각형 둘레의 절반, R은 외접원의 반지름, r은 내접원의 반지름이다. Soltan & Meidman([11], p.17)의 문제 해결을 구체적으로 살펴보자.

다음 관계식을 살펴보자.

$$a=2R\sin\alpha=4R\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};\ p-a=r\cot\frac{\alpha}{2}\quad (\text{단 } \alpha=\angle BAC)$$

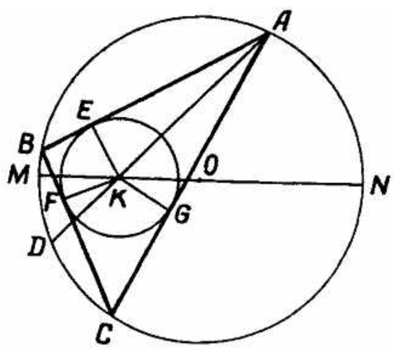
첫 번째 관계식은 사인정리이며, 두 번째 것은 직각삼각형 AEK로부터 유도된다(그림 1). 항들끼리 서로 곱하여 나누면 다음을 얻을 수 있다.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{ar}{4R(p-a)};\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{a(p-a)}{4Rr}$$

이로부터 $\dfrac{ar}{4R(p-a)}+\dfrac{a(p-a)}{4Rr}=\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$이며, 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0$$

유사한 방법으로 b, c가 구하는 방정식을 만족시킨다는 것을 증명할 수 있다.

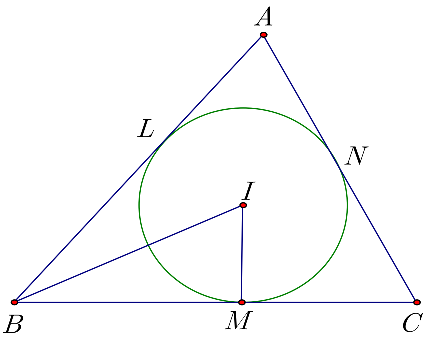


[그림 1]

살펴본 Soltan & Meidman의 증명 방법은 지나치게 간결하며, 문제 해결의 과정에 생략된 부분들이 많이 있다. 본 연구에서 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+

$4Rr)x-4pRr=0$의 유도과정을 Soltan & Meidman의 연구에 근거하여 상세하게 살펴보자.

삼각형 ABC에 중심이 I인 내접원을 작도하고, 그 접점을 L, M, N이라 하자 (그림 2). 이때 접선의 성질에 의해, $AL=AN$, $BL=BM$, $CM=CN$이다. 가령 $BM=x$, $CM=y$, $AN=z$라 하고, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$라 하자. 그러면 $x+y=a$, $y+z=b$, $z+x=c$가 된다.



[그림 2]

등식 $x+y=a$와 $z+x=c$을 더하면, $2x+y+z=a+c$가 된다. $y+z=b$이므로 $2x+b=a+c$이고 $2x=a+c-b$이다. 이로부터 $x=\dfrac{a+c-b}{2}=p-b$가 된다. 유사한 방법으로 $y=\dfrac{a+b-c}{2}=p-c$, $z=\dfrac{b+c-a}{2}=p-a$를 유도할 수 있다.

한편 삼각형 BIM에서 $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{r}{x}$이고, $x=\dfrac{r}{\tan\dfrac{B}{2}}=r\cot\dfrac{B}{2}$이다. 그런데 $x=p-b$이므로 $p-b=r\cot\dfrac{B}{2}$이다. 그리고 사인공식에 의해 $b=2R\sin B=4R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$이다. 이제 얻어진 등식 $p-b=r\cot\dfrac{B}{2}$와 $b=4R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$을 변끼리 서로 곱하면, 다음이 얻어진다.

$$b(p-b)=4Rr\cot\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=4Rr\cos^2\frac{B}{2}$$

따라서 $\cos^2\dfrac{B}{2}=\dfrac{b(p-b)}{4Rr}$이다. 한편 $p-b=r\cot\dfrac{B}{2}$에서 $b=4R\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}$를 나누면, 다음이 얻어진다.

$$\frac{p-b}{b}=\frac{r\cot\frac{B}{2}}{4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}=\frac{r}{4R\ \sin^2\frac{B}{2}}$$

따라서 $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{br}{4R(p-b)}$ 이다.

이제 $\cos^2\frac{B}{2}=\frac{b(p-b)}{4Rr}$ 와 $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{br}{4R(p-b)}$ 을 서로 더하자. $\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}=1$ 이라는 것을 생각하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}=\frac{b(p-b)}{4Rr}+\frac{br}{4R(p-b)}=\frac{b(p-b)^2+br^2}{4Rr(p-b)}=1.$$

따라서 $b(p-b)^2+br^2=4Rr(p-b)$ 이다. 즉 $b^3-2pb^2+(p^2+r^2+4Rr)b-4pRr=0$ 이 된다.

한편 [그림 2]에서 삼각형 ALI와 삼각형 CIM을 생각하면, 각각 $\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}$, $\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$ 에 대한 식을 얻을 수 있으며 다음 방정식을 얻게 된다.

$$a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0,\ c^3-2pc^2+(p^2+r^2+4Rr)c-4pRr=0$$

결국, 방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$ 에서 x 대신에 a, b, c를 넣어 얻어진 식들이 성립하므로, $x=a$, $x=b, x=c$는 이 방정식의 근이라는 것을 알 수 있다. 즉 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$ 의 세 근은 삼각형 ABC의 변들의 길이인 a, b, c 이다.

Soltan & Meidman이 제시한 삼각형의 변들을 근으로 하는 삼차방정식의 유도 과정을 다음과 같이 분석, 정리할 수 있다.

첫째, 삼각형 ABC에 중심이 I인 내접원을 작도하고 접점을 L, M, N을 표시한다.

둘째, 접선의 성질을 이용하여 $x=p-b$, $y=p-c$, $z=p-a$를 유도한다.

셋째, 삼각형 BIM에서 탄젠트의 정의, 사인공식을 이용하고 식을 적당히 변형시켜, $\cos^2\frac{B}{2}=\frac{b(p-b)}{4Rr}$, $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{br}{4R(p-b)}$ 을 유도한다.

넷째, 삼각항등식 $\sin^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{B}{2}=1$ 을 이용한 다음, 식들을 적당히 변형시켜 b에 대한 삼차방정식 $b^3-2pb^2+(p^2+r^2+4Rr)b-4pRr=0$ 을 유도한다.

다섯째, a와 c에 대해 유사한 삼차방정식을 생각하여, $x=a$, $x=b, x=c$는 방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$ 의 근이라는 것을 생각한다.

(2) 근과 계수의 관계를 이용한 등식의 증명

방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$ 의 세 근이 a, b, c 이므로, 여기

에 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면, 다음 등식들을 얻을 수 있다.

$$a+b+c=2p,\ ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr,\ abc=4pRr$$

근과 계수의 관계에 포함된 다항식 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc는 대칭다항식이라고 불린다. 권영인・신현국・김문섭([2], p.596)에 의하면 'n변수 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 대해 $s_1=x_{1+}\cdots+x_n$, $s_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$, $\cdots$, $s_n=x_1x_2\cdots x_n$을 기본대칭다항식이라고 부른다. 예를 들면, x_1, x_2, x_3에 대한 기본대칭다항식은 $\sigma_1(x_{1,}x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2(x_{1,}x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$, $\sigma_3(x_{1,}x_2,x_3)=x_1x_2x_3$이다. 즉 다항식 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc는 a, b, c에 대한 기본대칭다항식이다.

Soltan & Meidman은 삼각형 ABC의 세 변의 길이 a, b, c가 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$의 근이라는 사실, 근과 계수의 관계, 기본대칭다항식의 성질을 이용하여, a, b, c에 대한 새로운 등식을 유도하는 방법을 제시하였다.

Soltan & Meidman([11])은 $x+y+z=\sigma_1$, $xy+yz+zx=\sigma_2$, $xyz=\sigma_3$라 놓으면, $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=\sigma_1^2-2\sigma_2$가 성립한다고 기술하고, 다음과 같은 방법을 제시하였다.

> 방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$에 근과 계수의 관계를 이용하면, 삼각형의 변들의 길이 a, b, c에 대해 다음 관계식이 성립한다.
>
> $$a+b+c=2p;\ ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr;\ abc=4pRr.$$
>
> 만약 첫 번째 관계식이 정의에 의해서 성립하며 세 번째 관계식이 잘 알려져 있다면, 두 번째 관계식은 아마도 새로운 것이라고 할 수 있을 것이다. 이제 공식 $x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2$를 이용하여, 이들 등식으로부터 새로운 관계식 $a^2+b^2+c^2=2(p^2-r^2-4Rr)$를 얻을 수 있다.
>
> ([11], pp.17-18)

이제 Soltan & Meidman의 방법을 자세히 살펴보자. 기본대칭다항식 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$라 놓고, $a^2+b^2+c^2$을 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 나타내자. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=\sigma_1^2-2\sigma_2$가 된다. 한편 a, b, c가 방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$의 근이므로, 근과 계수의 관계에 의해 $a+b+c=\sigma_1=2p$, $ab+bc+ca=\sigma_2=p^2+r^2+4Rr$, $abc=\sigma_3=4pRr$이 된다.

$a^2+b^2+c^2=\sigma_1^2-2\sigma_2=(2p)^2-2(p^2+r^2+4Rr)=4p^2-2p^2-2r^2-8Rr=2p^2-2r^2-8Rr$이며, 이로부터 삼각형의 변들에 대한 새로운 등식 $a^2+b^2+c^2=2(p^2-$

$r^2-4Rr)$이 얻어진다. 이제 Soltan & Meidman이 $a^2+b^2+c^2$에 대한 등식을 얻기 위해 사용한 방법을 다음과 같이 분석, 정리할 수 있다.

첫째, 대칭다항식 $a^2+b^2+c^2$을 기본대칭다항식 $a+b+c=\sigma_1$, $ab+bc+ca=\sigma_2$, $abc=\sigma_3$로 나타낸다.

둘째, a, b, c가 방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$의 근이라는 것, 근과 계수의 관계를 이용하여 σ_1, σ_2, σ_3를 주어진 방정식의 계수들로 나타낸다.

셋째, 앞의 첫째, 둘째의 결과를 이용하여, 대칭다항식 $a^2+b^2+c^2$을 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$의 계수들을 이용하여 나타낸다.

살펴본 바와 같이, Soltan & Meidman은 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c를 근으로 하는 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$을 유도하였고, 그런 다음 a, b, c에 대한 대칭다항식들을 기본대칭다항식 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc로 나타내고 근과 계수의 관계를 이용하여 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc를 삼차방정식의 계수들로 나타내어 새로운 등식을 유도하였다.

Soltan & Meidman은 $a^2+b^2+c^2$이외에도 $a^3+b^3+c^3$, $(a+b)(b+c)(c+a)$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ 등과 같은 대칭다항식들에 관련된 항등식을 유도하여 증명하였다. 비록 Soltan & Meidman은 몇몇 대칭다항식에 대한 항등식을 탐구하는 방법의 예들을 제시하였지만, 대칭다항식의 다음과 같은 성질을 고려하면 일반화를 시도할 수 있다.

Boltyanskii & Vilenkin([7], p.45)은 'x, y, z에 대한 임의의 대칭다항식은 다항식 $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+xz+yz$, $\sigma_3=xyz$의 꼴로 나타낼 수 있다'고 하였고, 이에 대한 수학적 증명을 제시하였다. 즉 세 변수 x, y, z에 대한 임의의 대칭다항식은 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3로 나타낼 수 있다.

결국 Boltyanskii & Vilenkin과 Soltan & Meidman의 방법을 결합하면, 삼각형의 변들 a, b, c에 대한 임의의 대칭다항식들을 p, R, r을 이용하여 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있다.

4. 삼각형의 변들에 대한 등식 탐구

Soltan & Meidman의 방법에서는 a, b, c에 대한 대칭다항식들을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 삼각형의 변들에 관련된 다양한 등식들을 증명하였다. n이 3, 4, 5인 경우의 $a^n+b^n+c^n$, n이 2, 3인 경우의 $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$, n이 3, 4인 경우의 $\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$인 꼴에 관련된 삼각형

의 변들에 대한 등식들을 살펴보자.

(1) $a^n+b^n+c^n$인 꼴을 가지는 등식들의 탐구

Soltan & Meidman([11])은 $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 각각 $\sigma_1^2-2\sigma_2$, $\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$과 같이 나타내었다. $a^3+b^3+c^3$을 기본대칭다항식으로 변형시키는 과정은 다음과 같다.

$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ca)+3abc=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$$

이제 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$에서 근과 계수의 관계로부터 등식 $a+b+c=\sigma_1=2p$, $ab+bc+ca=\sigma_2=p^2+r^2+4Rr$, $abc=\sigma_3=4pRr$을 얻을 수 있다. 그리고 다음과 같은 식의 변형을 생각할 수 있다.

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=(2p)^3-3\times 2p(p^2+r^2+4Rr)+3\times 4pRr\\&=8p^3-6p^3-6pr^2-24pRr+12pRr=2p^3-6pr^2-12pRr\\&=2p(p^2-3r^2-6Rr)\end{aligned}$$

즉 $a^3+b^3+c^3=2p(p^2-3r^2-6Rr)$이 된다.

이제 4이상인 자연수 n에 대해, 다항식 $a^n+b^n+c^n$을 조사하자. 우선 $a^n+b^n+c^n$을 기본대칭다항식으로 나타내는 방법을 권영인・신현국・김문섭([2], p.597)의 연구를 중심으로 살펴보자.

$n\geq 4$인 자연수 n에 대해 대칭다항식 $S_n=a^n+b^n+c^n$을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3으로 $S_n=\sigma_1S_{n-1}-\sigma_2S_{n-2}+\sigma_3S_{n-3}$과 같이 나타낼 수 있다는 것을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하자.

$n=4$인 경우에 $S_4=a^4+b^4+c^4=\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1$로 나타낼 수 있다는 것을 보이자. 이를 위해, $\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1$을 $S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$, $S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$을 이용하여 정리하면, 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1&=\sigma_1(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3)-\sigma_2(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_3\sigma_1\\&=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3\end{aligned}$$

얻어진 식 $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3$에 $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$, $\sigma_3=abc$를 대입하여 정리하면, $\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1=a^4+b^4+c^4=S_4$가 증명된다.

이제 $S_k=\sigma_1S_{k-1}-\sigma_2S_{k-2}+\sigma_3S_{k-3}$가 성립한다고 가정하고, $n=k+1$일 때에 등식 $S_{k+1}=\sigma_1S_k-\sigma_2S_{k-1}+\sigma_3S_{k-2}$가 성립한다는 것을 증명하면 된다. 이것의 증명도 $S_4=\sigma_1S_3-\sigma_2S_2+\sigma_3S_1$의 증명과 유사하게, $\sigma_1S_k-\sigma_2S_{k-1}+\sigma_3S_{k-2}$으로부터 $a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}$을 유도하자.

$$S_{k+1}=\sigma_1S_k-\sigma_2S_{k-1}+\sigma_3S_{k-2}=\sigma_1S_k-\sigma_2S_{k-1}+abc(a^{k-2}+b^{k-2}+c^{k-2})$$

$$= \sigma_1 S_k - (ab+bc+ca)(a^{k-1}+b^{k-1}+c^{k-1}) + a^{k-1}bc + ab^{k-1}c + abc^{k-1}$$
$$= \sigma_1 S_k - ab(a^{k-1}+b^{k-1}) - bc(b^{k-1}+c^{k-1}) - ca(a^{k-1}+c^{k-1})$$
$$= \sigma_1 S_k - (a^k b + ab^k + b^k c + bc^k + a^k c + ac^k)$$
$$= (a+b+c)(a^k+b^k+c^k) - a(b^k+c^k) - b(a^k+c^k) - c(a^k+b^k)$$
$$= a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}$$

결국 등식 $S_{k+1} = \sigma_1 S_k - \sigma_2 S_{k-1} + \sigma_3 S_{k-2}$가 수학적 귀납법에 의해 증명된다.

이제 등식 $S_{k+1} = \sigma_1 S_k - \sigma_2 S_{k-1} + \sigma_3 S_{k-2}$에 $k=4$, $k=5$, $k=6$, $k=7$을 대입하면, 다음과 같은 등식을 얻을 수 있다.

$$S_4 = a^4+b^4+c^4 = \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_1$$
$$S_5 = a^5+b^5+c^5 = \sigma_1 S_4 - \sigma_2 S_3 + \sigma_3 S_2$$
$$S_6 = a^6+b^6+c^6 = \sigma_1 S_5 - \sigma_2 S_4 + \sigma_3 S_3$$

이제 $S_4 = a^4+b^4+c^4 = \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_1$인 경우로부터 얻어지는 삼각형의 변들의 등식을 살펴보자. 이를 위해, 방정식 $x^3 - 2px^2 + (p^2+r^2+4Rr)x - 4pRr = 0$에 근과 계수의 관계를 이용하고, $S_1 = \sigma_1$, $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$임을 생각하자. 그러면 $a^4+b^4+c^4$는 다음과 같이 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned} S_4 = a^4+b^4+c^4 &= \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_1 \\ &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 \\ &= 2p^4 + 2r^4 - 12p^2r^2 - 16p^2Rr + 32R^2r^2 + 16Rr^3 \end{aligned}$$

본 연구에서는 등식 $a^4+b^4+c^4 = 2p^4 + 2r^4 - 12p^2r^2 - 16p^2Rr + 32R^2r^2 + 16Rr^3$이 성립한다는 것을 Soltan & Meidman의 방법을 이용하여 새롭게 탐구하고 증명하였다.

한편 $a^5+b^5+c^5$에 관련하여서도 $a^4+b^4+c^4$와 같이 Soltan & Meidman의 방법을 이용하여 새로운 등식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_5 = a^5+b^5+c^5 = \sigma_1 S_4 - \sigma_2 S_3 + \sigma_3 S_2 &= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 \\ &= -8p^5 - 40p^3r^2 - 100p^3Rr + 10p^3 + 10pr^2 + 40pRr - 20pRr^3 - 80pR^2r^2 \end{aligned}$$

S_6을 기본대칭다항식으로 나타낸 식을 구하면 다음과 같으며, σ_1, σ_2, σ_3를 대입하여 원하는 등식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} S_6 = a^6+b^6+c^6 &= \sigma_1 S_5 - \sigma_2 S_4 + \sigma_3 S_3 \\ &= \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2. \end{aligned}$$

이제 삼차방정식 $x^3 - 2px^2 + (p^2+r^2+4Rr)x - 4pRr = 0$에서 근과 계수의 관계로부터 $a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc를 구하여, $a^6+b^6+c^6$에 대한 등식을 구할 수

있다. $a^7+b^7+c^7$, $a^8+b^8+c^8$, $\cdots$에 대해서도 유사한 방법을 통해 등식을 얻을 수 있다.

(2) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$인 꼴을 가지는 등식들의 탐구

Soltan & Meidman([11])은 대칭다항식 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$을 기본대칭다항식 σ_1, σ_2, σ_3를 이용하여 각각 $\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$, $\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}$으로 나타내어, 삼각형의 변들에 대한 등식을 유도하였다. 실제로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$은 다음과 같이 기본대칭다항식으로 변형된다.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}$$

이제 근과 계수의 관계로부터 $\sigma_1=2p$, $\sigma_2=p^2+r^2+4Rr$, $\sigma_3=4pRr$을 대입하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{\sigma_2}{\sigma_3}=\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}$$

한편 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$은 기본대칭다항식으로 다음과 같이 변형시킬 수 있다.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}{(abc)^2}=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$$
$$=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}$$

근과 계수의 관계로부터 $\sigma_1=2p$, $\sigma_2=p^2+r^2+4Rr$, $\sigma_3=4pRr$이므로, 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3}{\sigma_3^2}=\frac{(p^2+r^2+4Rr)^2-2\times 2p\times 4pRr}{(4pRr)^2}$$
$$=\left(\frac{p^2+r^2+4Rr}{4pRr}\right)^2-\frac{1}{Rr}$$

이제 3이상인 자연수 n에 대해, 다항식 $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$을 기본대칭다항식으로 나타내어 삼각형의 변들에 대한 등식을 구하자. 우선 $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$을 통분하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{b^nc^n+a^nc^n+a^nb^n}{a^nb^nc^n}$$

이로부터 $n=3$인 경우에 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{a^3b^3c^3}=\frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{\sigma_3^3}$ 이 얻어진다. 이제 $b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3$을 기본대칭다항식으로 나타내자. 곱셈공식을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3=\frac{1}{2}\{(a^3+b^3+c^3)^2-(a^6+b^6+c^6)\}$$

이제 $a^3+b^3+c^3$, $a^6+b^6+c^6$을 기본대칭다항식으로 나타내면, $a^3+b^3+c^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$, $a^6+b^6+c^6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3+6\sigma_1^3\sigma_3-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2$이다. 이제 $\frac{1}{2}\{(a^3+b^3+c^3)^2-(a^6+b^6+c^6)\}$을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3 &= \frac{1}{2}\{(a^3+b^3+c^3)^2-(a^6+b^6+c^6)\} \\ &= 3\sigma_3^2+\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}$$

이제 근과 계수의 관계로부터 $\sigma_1=2p$, $\sigma_2=p^2+r^2+4Rr$, $\sigma_3=4pRr$을 대입하여 정리하면, $b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3=(p^2+r^2+4Rr)^3-24p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)$이 된다. 즉 삼각형의 변들에 대한 등식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3} &= \frac{b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3}{\sigma_3^3} \\ &= \frac{(p^2+r^2+4Rr)^3-24p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)}{64p^3R^3r^3} \end{aligned}$$

본 연구에서는 등식 $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{(p^2+r^2+4Rr)^3-24p^2Rr(p^2+r^2+2Rr)}{64p^3R^3r^3}$ 이 성립한다는 것을 Soltan & Meidman의 방법을 이용하여 새롭게 구하고 증명하였다.

한편, $n=4$, $n=5$인 경우에 대해서도 $n=3$인 경우와 유사한 방법으로 접근하여 등식을 구할 수 있다. 이제 등식 $\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=\frac{b^4c^4+a^4c^4+a^4b^4}{\sigma_3^4}$, $\frac{1}{a^5}+\frac{1}{b^5}+\frac{1}{c^5}=\frac{b^5c^5+a^5c^5+a^5b^5}{\sigma_3^5}$ 을 생각하자.

$n=3$인 경우와 유사한 방법으로 $b^4c^4+a^4c^4+a^4b^4=\frac{1}{2}\{(a^4+b^4+c^4)^2-(a^8+b^8+c^8)\}$, $b^5c^5+a^5c^5+a^5b^5=\frac{1}{2}\{(a^5+b^5+c^5)^2-(a^{10}+b^{10}+c^{10})\}$을 생각할 수 있다.

이제 앞에서 증명한 $S_n = \sigma_1 S_{n-1} - \sigma_2 S_{n-2} + \sigma_3 S_{n-3}$을 이용하면, $a^4 + b^4 + c^4$, $a^8 + b^8 + c^8$, $a^5 + b^5 + c^5$, $a^{10} + b^{10} + c^{10}$을 계산할 수 있다. 이 계산과정은 지나치게 복잡하므로, 실제로는 Maple이나 Mathematica와 같은 컴퓨터 프로그램을 이용하는 것도 좋을 것으로 생각된다.

(3) $\dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)}$인 꼴을 가지는 등식들

$\dfrac{a^n}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^n}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^n}{(c-a)(c-b)}$인 꼴의 몇몇 대칭다항식들을 살펴보자.

$n=0$인 경우에 주어진 식은 $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$이며, 분모 $(a-b)(a-c)(b-c)$로 통분하면 분자는 $(b-c)-(a-c)+(a-b)=0$이 되고 이로부터 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0 \quad ---①$$

한편 $n=1$, 2인 경우에 다항식 $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$, $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$을 각각 분모 $(a-b)(a-c)(b-c)$로 통분하면, 첫 번째 식의 분자는 $a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)=0$이며 두 번째 식의 분자는 $a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)=(a-b)(a-c)(b-c)$가 된다. 그러므로 다음 등식을 얻을 수 있다.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0 ---②$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1 ---③$$

이제 $n=3$인 경우의 다항식 $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$을 계산하기 위해, 연구 [5]에 제시된 다음 등식을 이용하자.

$$a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0$$
$$b^3 - (a+b+c)b^2 + (ab+bc+ca)b - abc = 0$$
$$c^3 - (a+b+c)c^2 + (ab+bc+ca)c - abc = 0$$

이들 등식을 각각 $(a-b)(a-c)$, $(b-a)(b-c)$, $(c-a)(c-b)$로 나누어 세 등식을 더하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\left\{\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\right\} - (a+b+c)\left\{\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \right.$$

$$\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}+(ab+bc+ca)\Bigg\{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+$$
$$\frac{c}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}-abc\Bigg\{\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}=0$$

이제 식 ①, ②, ③을 대입하면, $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ $=a+b+c=\sigma_1$이 된다. 이로부터 다음과 같은 등식을 구할 수 있다.

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=2p$$

한편 $n=4$인 $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}$에 대해서도 앞에서와 유사한 접근을 취할 수 있다. 즉 $n=3$인 경우에 이용한 등식의 양변에 각각 a, b, c를 곱하면 다음을 얻을 수 있다.

$$a^4-(a+b+c)a^3+(ab+bc+ca)a^2-a^2bc=0$$
$$b^4-(a+b+c)b^3+(ab+bc+ca)b^2-ab^2c=0$$
$$c^4-(a+b+c)c^3+(ab+bc+ca)c^2-abc^2=0$$

이제 이들 등식을 각각 $(a-b)(a-c)$, $(b-a)(b-c)$, $(c-a)(c-b)$로 나누어 세 등식을 더하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\Bigg\{\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}-(a+b+c)\Bigg\{\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+$$
$$\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}+(ab+bc+ca)\Bigg\{\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+$$
$$\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}-abc\Bigg\{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\Bigg\}=0$$

이제 등식 ②, ③, $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c$을 대입하면, $\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=(a+b+c)^2-(ab+bc+$ $ca)$이 된다. 즉 $(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)=\sigma_1^2-\sigma_2$이며 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^4}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^4}{(c-a)(c-b)}=3p^2-r^2-4Rr$$

이제 $n=5$, $n=6$인 경우에 대해서도 앞에서와 유사한 접근을 통해 구하는 등식을 유도할 수 있다.

살펴본 바와 같이, a, b, c에 대한 대칭다항식들을 대수적인 조작을 통해 기본 대칭다항식으로 변형시키고, Soltan & Meidman의 방법을 이용하면 삼각형의 변들에 대한 다양한 등식들을 얻을 수 있었다. 대칭다항식이 본 연구에서 살펴본 것 이외에 다양한 형태들이 존재한다는 것을 감안하면, Soltan & Meidman의 방

법은 삼각형의 변들에 관련된 무수히 많은 다항식들을 발견할 수 있는 알고리즘을 포함하고 있다는 것을 알 수 있다.

특히 본 연구에서는 Soltan & Meidman이 제시한 삼각형의 변들을 근으로 가지는 한 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$을 활용하여, 대칭다항식에 관련된 다양한 등식들을 유도하는 몇몇 사례들을 살펴보았다. 만약 삼각형의 변들을 포함하는 다른 삼차방정식(p, R, r이외의 요소를 포함하는)들을 찾아내거나, 각들을 포함하는 다른 삼차방정식을 찾는다면, 삼각형에 관련된 또 다른 등식을 구하는 흥미로운 접근을 시도할 수 있을 것이다.

5. 결론

수학교육학의 연구와 실제에서 수학 문제해결, 창의성, 수학적 발견 등의 개념들이 독립적으로 또는 서로 연결되며 강조되고 있다. 본 연구에서는 삼각형의 변들에 대한 등식을 탐구하는 Soltan & Meidman의 접근 방법을 문헌 연구를 통해 분석하였으며, 이를 활용하여 삼각형의 변들에 대한 몇몇 새로운 등식들을 탐구하는 구체적인 사례를 그 증명과 함께 제시하였다.

본 연구는 삼각형의 변들에 대한 등식을 탐구하는 Soltan & Meidman의 방법에 대한 문헌연구와 Soltan & Meidman의 방법을 활용하여 다양한 등식을 구하는 방법으로 구성된다. 문헌 연구에서는 Soltan & Meidman의 연구를 분석하여 삼각형의 변들에 대한 등식을 구하고 증명하는 Soltan & Meidman의 방법을 제시하였다. Soltan & Meidman의 방법은 삼각형의 변들의 길이를 근으로 하는 삼차방정식을 만들고, 얻어진 삼차방정식에 비에트의 정리를 이용하여 변들에 대한 등식들을 구하고 증명하는 것이다.

Soltan & Meidman은 삼각형 ABC의 둘레의 절반 p, 외접원의 반지름 R, 내접원의 반지름 r에 대해 삼각형의 변들의 길이 a, b, c를 근으로 하는 삼차방정식 $x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0$을 유도하였다. 본 연구에서는 삼차방정식의 유도 과정을 수정・보완하여 제시하였고, 유도 과정의 각 단계를 분석하여 제시하였다. 한편 비에트의 정리를 활용하는 것과 관련하여 본 연구에서는 Boltyanskii & Vilenkin의 연구 결과를 바탕으로 a, b, c에 대한 임의의 대칭다항식을 비에트 정리에 포함된 기본대칭다항식 $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ac$, $\sigma_3=abc$로 나타낼 수 있음을 확인하였다. 그리하여 삼각형의 변들의 길이 a, b, c에 대한 임의의 대칭다항식들을 p, R, r로 나타낼 수 있다는 결론에 도달할 수 있었다.

본 연구에서는 Soltan & Meidman의 방법을 활용하여, n이 3, 4, 5인 경우의 $a^n+b^n+c^n$, n이 3인 경우의 $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}$, n이 3, 4인 경우의 $\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+$

$\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$ 인 꼴을 가지는 다항식들에 관련된 삼각형의 등식들을 구하여 제시하였다. 그리고 다른 n값에 대한 등식의 탐구에 대해서도 구체적인 탐구의 방향을 제시하여 후속 연구를 통해 다양한 등식을 찾을 수 있도록 하였다.

수학적 발견을 통한 창의적 수학적 탐구활동은 수학자들의 몫으로 국한하고, 이를 위한 수학적 배경의 지식들도 대학교 이상의 고등수학의 지식이 필요하다고 제한적으로 생각할 수 있다. 그러나 구성주의적 관점에서 보면, 중등학교 교사나 학생들도 자신이 수학적 활동의 주체가 되어 수학적 지식을 구성하며, 다양한 수학적 탐구를 통해 새로운 수학적 지식을 발견해야 한다. 이러한 관점에서 보면, 본 연구에서 중등학교 수준의 수학적 도구들을 이용하여 새로운 수학적 탐구 및 발견의 가능성을 모색했고, 구체적인 수학적 발견활동을 예시하였다는 것은 교육적으로 의미로운 접근이며 가치로운 연구 결과라 할 수 있다.

본 연구를 통해 얻어진 결과들은 창의적 수학 문제해결, 수학적 발견을 지향하는 수학교사나 중등학교 학생들의 수학 연구의 소재로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부, 수학과 교육과정, 교육과학기술부 고시 제2011-361호(2011).
[2] 권영인 · 신현국 · 김문섭, 학교수학에 관련된 기본대칭다항식의 활용에 대한 연구, 수학교육논문집 20(4), pp.595-602(2006).
[3] 신현성 · 김경희, 수학적 문제해결, 서울: 경문사(1999).
[4] 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부(2004).
[5] 유익승, 신현용, 한인기, Viete 정리를 이용한 여러 문자 다항식의 인수분해에 대한 연구, 수학교육논문집 20(4), pp.587-594(2006).
[6] 정동권 · 김수미 · 김지원, 수학 문제해결 지도의 이해, 서울: 학지사(2009).
[7] Boltyanskii V. G. & Vilenkin N. Ya., Simmetriya v Algebre, Moscow: MTsNMO(2002).
[8] Lakatos I., Proof and Refutations, New York: Cambridge University Press (1976).
[9] Larson L.C., Problem-Solving Through Problems, New York: Springer (1983).
[10] Polya G., 수학적 발견(I), 서울: 교우사(2005).
[11] Soltan V.P. & Meidman S.I., Tozdestva i Neravenstva v Treugolike, Moldova: Shtiintsa(1982).

Gang Inju
Jinju Jeil Middle School
Jinju, Korea
E-mail address: ganginju@hanmail.net

Han Inki[3]
Deptartment of Mathematics Education
Gyeongsang National University
Jinju, 660-701, Korea
E-mail address: inkiski@gnu.ac.kr

3) correspondent author