East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 2, pp. 173-195

문제 해결 과정에서 규칙을 찾는 초등학생들의 사고 과정 분석

신 수 진 · 강 정 기 · 노 은 환*

ABSTRACT. The purpose of this study is to help for an in-depth understanding of their thinking process by observing and analyzing the response found by two elementary school students, Through this study, the following findings could be obtained. First, two students have a tendency trying to solve the complex situation at first. Second, we could know that it is an important factor in discovering the pattern to predict it. Third, we could know that the activity of reconstructing the data meaningfully is an important factor in discovering the pattern. Fourth, it is an important factor in finding the pattern to work organically the activity of predicting it with the activity of reconstructing the data meaningfully. We hope that this study offers the help for an in-depth understanding of students's thinking process.

Ⅰ. 서 론

2007 개정 교육과정에서의 초등학교 수학과 목표로 '수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 생활 주변에서 일어나는 문제를 합리적으로 해결하는 능력을 기른다'가 제시되고 있다(교육과학기술부, 2011). 이들 중 문제 해결력 신장은 제4차 교육과정 이래로 수학 교육의 목표로 지속적으로 강조해 온 사항이며, 개정 교육과정에서도 교육 목표, 내용, 교수・학습 방법, 평가 영역에 걸쳐 일관되게 강조되고 있다.

많은 사람들이 지식을 많이 알고 있으면 문제 해결은 저절로 된다고 생각하지만, 문제 해결력과 사고력 신장을 위해서는 학습에서 문제 해결 전략을 활용하는

2012년 1월 15일 투고, 2012년 2월 21일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key Word: 문제 해결, 규칙성, 귀납적 접근
* 교신저자

경험이 필요하다(한찬조, 1996). 이런 이유로 문제 해결의 강조는 그 전략의 강조로 이어지고 있으며, 다양한 전략에 대한 연구들이 이루어져 왔다. 문제 해결 전략으로 Polya는 15가지의 전략을 제시하였으며, 2007 개정 교육과정의 초등수학에서는 9가지 전략을 제시하고 있다. 이들 전략에서 규칙 찾기가 공통적으로 제시되고 있으며, 이는 규칙 찾기가 중요한 문제 해결 전략 중 하나임을 의미한다.

수학 교육에서 규칙성 발견은 중요한 주제로 다루어져 왔다. 강지형 외(1999)는 규칙성 학습으로 학생들은 주위 환경에서 수학이 어떻게 활용되고 있는가를 이해할 수 있으며, 주어진 정보를 분류하고 조직하는 능력을 향상시킬 수 있다고 하였다. 같은 맥락에서 교육인적자원부(2002)는 수학은 규칙성이나 관계에 대한 내용을 다루는 교과로, 아동은 이러한 수학을 학습함으로써 자연과 사회 속에서의 생활을 통하여 경험하게 되는 사상들로부터 그 안에 내재되어 있는 질서나 원리인 수학적 규칙성과 관계를 파악하게 되고, 따라서 이를 통하여 보다 바람직한 생활을 영위할 수 있는 정신적 능력을 얻게 된다고 하였다.

이처럼 자연과 사회 속에 내재된 질서나 원리로서의 규칙성을 인식하고 발견하는 것은 수학이 어떻게 활용되는가를 이해할 수 있고 수학의 아름다움을 느낄 수 있는 기회가 된다. 따라서 수학 교육에서 몇 가지 구체적 사실로부터 스스로 규칙을 발견해 나가는 활동을 지속적으로 지도해야 될 필요가 있다. 이러한 필요성에 따라 그 동안 규칙성 발견 및 학습에 관한 많은 연구가 이루어져 왔으며, 이에 대한 국내의 수학교육 연구들은 다음과 같다. 첫째, 규칙성의 일반화와 대수 학습에 대한 연구로, 강현영(2007), 김성준(2003), 김남균·김은숙(2009), 정홍춘(2008), 전주희(2005) 등의 연구가 있다. 둘째, 규칙성 인식과 영재 판별 도구에 대한 연구로는 방승진·최중오·김혁(2006) 등이 있다. 셋째, 규칙성을 이용한 교수 학습 프로그램 개발에 관한 연구로 류성림·박신정(2003), 안종률(1999), 김상미(1997) 등이 있다. 넷째, 규칙성의 유형화와 교과서 분석에 대한 연구로는 권성룡(2007), 정창섭(2007), 김은진(2008) 등이 있다. 다섯째, 규칙성을 활용한 교수단원 설계에 대한 연구로는 박교식 (2002), 오순임(2002) 등이 있다. 여섯째, 규칙성 인식과 사고 과정 분석에 대한 연구로는 최병훈·방정숙(2011) 등이 있다. 일곱째, 다양한 도구 및 활동을 통한 규칙성 찾기에 대한 연구로는 이성계·김진수·최원(2009), 윤대원·김동근(2008) 등의 연구가 있다.

규칙성과 관련된 다양한 연구가 있었지만, 이들 연구의 대부분에서 학생들의 사고 과정을 심층적으로 분석한 사례 연구는 드물었다. 규칙성 발견과 관련된 학생들의 사고 과정에 대한 심층적 이해는 규칙성 발견에서 그들이 당면하게 되는 어려움을 이해하는 단초가 될 수 있으며, 이러한 어려움은 규칙성과 관련된 교수 학습 방법 및 프로그램 개발의 토대가 될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 규칙을 찾아가는 과정에서 학생들이 보이는 반응을 관찰·분석하여 그들의 사고 과정에

대한 이해를 돕는 것을 연구의 목적으로 한다. 이러한 목적을 달성하기 위해 연구 문제를 '학생들은 규칙성과 관련된 문제에 대해 어떤 식으로 접근해 가며, 규칙성 발견을 위해 무엇이 필요한가?'로 설정하였다.

Ⅱ. 규칙성 중심의 교과서 분석

본 장에서는 초등학교 교과서의 내용을 규칙성을 중심으로 분석하여, 학생들이 규칙성을 탐색하는 과정을 이해하는데 도움을 제공하고자 한다.

1. 규칙성과 관련된 초등학교 교과서의 내용 및 제시 형태 분석

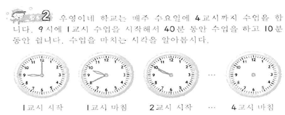
[표 1]은 초등학교 교과서에서 규칙성과 관련된 내용을 조사한 것으로, 규칙성과 관련된 내용은 초등학교 1학년부터 초등학교 6학년까지 꾸준히 등장하고 있다. 저학년에서는 주로 단순한 그림이나 도형을 제시하고 그림이나 도형이 어떤 규칙에 의해서 나열되어있는지를 묻는 문제 또는 수 배열표를 제시하여 그 속에서 규칙을 찾아내도록 하고 있다. 고학년에서는 이미 배웠던 것을 활용하여 하나의 문제를 해결하기 위해 다양한 방법을 활용하여 규칙을 찾도록 하고 있으며, 제시되어 있는 규칙을 찾는 활동 뿐 만 아니라 직접 규칙을 만들어 보는 활동도 하고 있다. 또한 교과서에서 제시하고 있는 규칙성과 관련된 단원들은 '규칙성과 문제 해결' 영역에 국한되지 않고 다른 영역과 관련지어 통합적으로 제시되고 있다.

<table>
<tr><th>단계</th><th>내용 체계(규칙성과 문제 해결)</th><th>규칙성 관련 단원</th><th>쪽수</th></tr>
<tr><td>1학년
1학기</td><td rowspan="2">• 규칙적인 배열에서 규칙 찾기
• 자신이 정한 규칙에 따라 배열하기
• 100까지의 수 배열표에서 규칙 찾고 말 하기
• □를 사용한 식
• 실제로 해 보기, 그림 그리기, 식 만들기 등으로 문제 해결하기</td><td>3단원 여러 가지 모양(일부분)</td><td>p.42～45</td></tr>
<tr><td>1학년
2학기</td><td>1단원 100까지의 수(일부분)
2단원 여러 가지 모양(일부분)
7단원 문제 푸는 방법 찾기</td><td>p.14～15
p.30～31
p.97～108</td></tr>
<tr><td>2학년
1학기</td><td rowspan="2">• 다양한 변화의 규칙 찾기
• 수 배열에서 규칙 찾고, 규칙에 따라 수 배열하기
• 곱셈표에서 여러 가지 규칙 찾기
• 미지수 구하기
• 식 만들기
• 규칙 찾기, 거꾸로 풀기 등으로 문제를 해결하기</td><td>1단원 세 자리 수(일부분)
3단원 여러 가지 모양(일부분)
6단원 식 만들기</td><td>p.16～17
p.46～47
p.81～92</td></tr>
<tr><td>2학년
2학기</td><td>1단원 곱셈구구(일부분)
7단원 문제 푸는 방법 찾기</td><td>p.18～19
p.101～112</td></tr>
<tr><td>3학년
1학기</td><td rowspan="2">• 규칙에 따라 여러 가지 무늬 꾸미기
• 표 만들기, 예상과 확인 등으로 문제를 해결하기</td><td>–1)</td><td>–</td></tr>
<tr><td>3학년
2학기</td><td>8단원 규칙 찾기와 문제 해결</td><td>p105～118</td></tr>
</table>

4학년 1학기	• 다양한 변화 규칙을 수로 나타내고 설명하기 • 규칙을 추측하고 말이나 글로 표현하기 • 규칙적인 무늬 만들기 • 규칙과 대응 • 단순화하기, 논리적 추론 등으로 문제를 해결하기 • 문제해결 과정 설명하기	8단원 규칙 찾기	p119∼130
4학년 2학기		4단원 사각형과 다각형(일부분) 8단원 규칙 찾기와 문제 해결	p.64∼65 p113∼122
5학년 1학기	• 비와 비율 • 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하기 • 주어진 문제에서 필요 없는 정보, 부족한 정보 찾기 • 문제 해결의 타당성 검토하기	–	–
5학년 2학기		(개정)[2]	
6학년 1학기	• 방정식 • 비례식 • 연비와 비례배분 • 정비례와 반비례 • 문제 해결 방법 비교하기 • 문제의 조건을 바꾸어 새로운 문제 만들기 • 문제 해결 과정의 타당성 검토하기	2단원 소수의 나눗셈(문제 풀이 과정에서) 7단원 비례식 8단원 연비와 비례배분	p.19∼34 p.99∼112 p.113∼128
6학년 2학기		(개정)	

[표 1] 규칙성과 관련된 초등학교 교과서의 내용

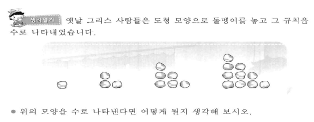
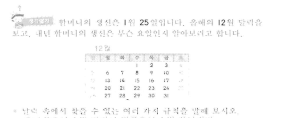
전략으로서의 규칙 찾기는 그것을 해결할 때 [표 2]에서 제시된 바와 같이 그림 그리기, 단순화하기, 표 만들기 등과 밀접한 관련을 가지고 있다. 초등학교 교과서를 분석한 결과 규칙 찾기를 할 때 사용되는 접근 방법으로 그림 그리기를 통한 방법은 12회(39%) 사용되었으며, 단순화하기를 통한 방법은 11회(35%) 제시되고 있으며, 표 만들기 방법은 8회(26%) 제시되고 있다.

	교과서에 제시된 횟수[3]	비율(%)	교과서 예
그림 그리기를 통한 규칙 찾기	1학년 1학기(43쪽)-1문항 2학년 1학기(46쪽, 49쪽)-3문항 3학년 2학기(111쪽, 116쪽)-8문항 12회	39%	 <3학년 2학기>

1) ‘ – ’ 표시는 교과서에서 규칙 찾기와 관련된 내용이 들어있지 않는다는 것을 의미함.

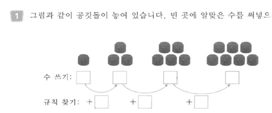
2) 2007 개정 교육과정이 진행되고 있는 5, 6학년의 경우는 새 교과서가 나오지 않아 비워 두었음.

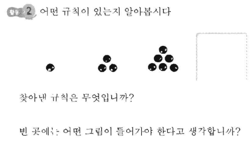
3) 교과서에 제시된 문항 중 같은 그림이나 표를 이용하여 묻고 있는 문제는 문항이 여러 개일지라도 한 문항으로 하였으며, 그림 또는 표는 같으나 문제에서 요구하고 있는 내용이 다를 경우에는 각각 독립된 다른 문항으로 기록하였다.

단순화하기를 통한 규칙 찾기	3학년 2학기(116쪽)-1문항 4학년 1학기(120쪽, 121쪽, 122쪽, 123쪽, 124쪽, 128쪽, 129쪽)-10문항 4학년 2학기(120쪽)-1문항 11회	35%	 <4학년 1학기>
표 만들기를 통한 규칙 찾기	1학년 2학기(14쪽)-2문항 2학년 1학기(16쪽)-1문항 2학년 2학기(18쪽, 19쪽)-2문항 3학년 2학기(110쪽)-2문항 4학년 2학기(120쪽)-1문항 8회	26%	 <3학년 2학기>

[표 2] 규칙 찾기 전략을 사용하여 문제 해결할 때 접근 방법

다음으로 교과서에서 규칙성을 찾는 문항들을 구조화 된 문제와 비구조화 된 문제로 나누어 살펴보았다. 구조화 된 문제는 학생들이 문제를 보다 쉽게 해결해 나갈 수 있도록 문제 해결 과정이 안내되어 있어 이를 수행해 나가다 보면 문제 해결에 도달하게 되는 형태의 문제를 의미한다. 이와는 반대로 비구조화 된 문제는 해결을 위한 어떤 실마리도 제시되어 있지 않는 것으로 학생 스스로 문제를 해결 방법을 찾아가야 하는 문제를 의미한다. 이러한 분류로 초등학교 교과서의 문제를 분석한 결과, 구조화 된 문제는 16회(67%)이며 비구조화 된 문제는 8회(33%)로 구조화 된 문제가 2배 많이 제시되고 있었다.

	교과서에 제시된 횟수	비율(%)	교과서 예
구조화 된 문제	1학년 2학기(14쪽)-1문항 2학년 1학기(16쪽)-1문항 2학년 2학기(18쪽, 19쪽)-2문항 3학년 2학기(110쪽, 111쪽, 116쪽)-3문항 4학년 1학기(121쪽, 122쪽, 123쪽, 128쪽, 129쪽)-8문항 4학년 2학기(120쪽)-1문항 16회	67%	 <4학년 1학기>

비구조화 된 문제	1학년 1학기(43쪽)-1문항 1학년 2학기(30쪽)-4문항 2학년 1학기(46쪽, 47쪽)-3문항 8회	33%	 <2학년 1학기>

[표 3] 규칙성과 관련된 구조화/비구조화 된 문제에 대한 교과서 분석

2. 규칙성의 유형에 따른 교과서 분석

김상미(1997)에 의하면 수학적 규칙성을 첫째로는 어떤 속성을 규칙화 하는가에 따라 유형화하고, 둘째로는 어떠한 방식으로 규칙성을 생성하는가에 따라 유형화하고 있다. 규칙성의 속성에 따른 유형에는 관계적인 속성, 기하적인 속성, 물리적인 속성에 따른 규칙성이 있으며, 규칙성의 생성방식에 따른 유형으로는 반복에 의한 규칙성, 증가에 의한 규칙성, 대칭에 의한 규칙성, 회전에 의한 규칙성, 카오스 현상에 의한 규칙성으로 나눌 수 있다. 이 때 하나의 규칙성이 한 가지 속성을 갖는 것은 아니며, 규칙성의 어떤 속성을 인식하느냐에 따라 하나의 규칙성을 여러 가지 방식으로 해석할 수 있다.

[표 4]는 이와 같은 규칙성 유형 분류를 통해 교과서에 제시된 문항의 빈도수를 조사한 것이다. [표 4]를 살펴보면 규칙성의 속성에 따른 유형에서 관계적 속성에 따른 규칙성과 관련된 문항이 타 문항에 비해 많이 제시되고 있음을 알 수 있다. 이것은 관계적 속성에 따른 규칙성의 인식과 이용은 수의 의미, 수의 관계 이해에 도움이 되므로 수 감각 발달에 영향을 미치며, 기본 셈에 있어 수에 대한 이해를 발전시키는 등 수 개념과 관련된 학습에서 중요하기 때문인 것으로 풀이된다. 이러한 점에 대해 김성준(2002)는 수학에서 대상 자체보다는 주로 대상간의 관계에 대해 논의하며 그 관계를 해석하는 것이 수학적 개념 형성의 기본이 된다고 하며, 관계에 대한 인식의 중요성을 언급하였다. 한편, 생성방식에 따른 유형에서는 반복 및 증가에 따른 규칙성이 많이 제시되고 있는데, 반복 및 증가에 따른 규칙성에 대해서는 도형수와 같은 시각적 소재가 주로 다루어지고 있다. 이는 수가 반복되고 증가되는 규칙을 시각적 요소로서 도입함으로써 수가 갖는 의미와 그들 사이의 관계를 개념화하기 위함이며, 결국 반복 및 증가에 따른 규칙성의 인식 역시 수 개념과 밀접한 관련을 가지고 있음을 알 수 있다. 이상의 내용으로부터 초등학교에서는 관계적 속성에 따른 규칙성, 반복 및 증가에 따른 규칙성이 많이 제시되고 있으며, 이들 문항은 수 개념 형성을 위한 목적을 함의하고 있음을 알 수 있다. 한편, 김상미·신인선(1997)은 초등학교 4학년 수학 교과서 및 익힘책을 분석한 결과 다양한 패턴이 존재함에도 불구하고 대부분의 패

턴들이 수 패턴에 한정되어 있다는 것을 문제점으로 지적하기도 하였다.

본 연구에서는 이러한 유형 분석을 토대로 연구에서 사용하고자 하는 검사 문항은 가장 많이 등장하는 유형이 되도록 문항을 선정하고자 하였으며, 이러한 문항에 대해 학생들이 보이는 사고 과정을 분석해보고자 한다.

규칙성유형 / 영역[4]		규칙성의 속성에 따른 유형			규칙성의 생성방식에 따른 유형				
		관계	기하	물리	반복	증가	대칭	회전	카오스
1학년 1학기	도형	3	4		4	3			
1학년 2학기	수와 연산	5				5			
	도형		5	5	6				
2학년 1학기	수와 연산	6				6			
	도형	3		1	2	2			
2학년 2학기	수와 연산	1				1			
	규칙성과 문제 해결	1		1	1	1			
3학년 2학기	규칙성과 문제 해결	4		4	4	4	1		
4학년 1학기	규칙성과 문제 해결	9		4	3	9	1	2	
4학년 2학기	도형			1	1		1	1	
6학년 1학기	수와 연산	1							
계		33	9	16	21	31	3	3	0
비율[5]		28%	8%	14%	18%	27%	3%	3%	0%

[표 4] 초등학교 교과서에 제시된 문항의 규칙성 유형에 따른 빈도수

본 연구에서는 표적 문제에 대한 동형인 근원 문제와 표적 문제의 일부분과 동형인 근원 문제를 통해 연구대상자들이 표적 문제를 해결하는 메커니즘을 유사성의 관점에서 탐구하고자 한다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 학생들이 문제 해결 과정에서 규칙성과 관련된 문제에 대해 어떻게 접근해 가는가와 규칙성 발견에 필요한 요소를 살펴봄으로써, 학생들의 사고 과정에 대한 이해를 돕는 것이 연구의 목적이다. 따라서 본 연구 목적에 적합한 연구대상자를 선정하고자 다음과 같은 기준을 설정하였다. 첫째, 연구 대상자들은

4) 수와 연산, 도형, 측정, 확률과 통계, 규칙성과 문제 해결의 5개 영역으로 나누어 조사하였으며, 규칙성의 유형이 나타나지 않은 영역은 표시하지 않았다.

5) 소수 첫째자리에서 반올림하였다.

규칙성과 관련된 내용에 대한 학습이 이미 이루어진 상태이어야 한다. 둘째, 연구 대상자들은 어느 정도 문제를 해결할 수 있는 능력을 갖추고 있어야 하기에, 수학 학업성취도가 상위에 해당하는 학생이어야 한다. 셋째, 연구 대상자들은 자신의 생각을 연구자에게 분명히 전달할 수 있는 의사소통 능력이 뛰어난 학생이어야 한다. 표본 추출을 위한 3가지 기준안을 바탕으로 경상남도 김해시 N초등학교 5학년으로 성적이 상위권인 두 명의 학생을 연구의 대상으로 선정하였다. 본 연구에 참여한 학생들에 대한 구체적인 정보는 [표 5]와 같다.

대상자 (성별)	학업성취도	선행정도	특성
학생 A (남)	-상 -진단평가[6] : 90점 이상 -1학기 중간학업성취도 평가[7] : 90점 이상	초 5-1과정 8단원	-수학 문제의 해결에 도전적으로 임함. -수학 관련 학원 및 수학 과외 경험은 없으며 EBS인터넷 강의 또는 문제집을 이용하여 공부함. -모르는 것에 대해 중학교 3학년인 누나에게 묻고 해결하는 편임.
학생 B (여)	-상 -진단평가 : 90점 이상 -1학기 중간학업성취도 평가 : 85점 이상	초 5-1과정 2단원	-과거에는 수학을 좋아했으나 학년이 올라가면서 원리를 이해하는 것을 어려워 함. -수학 관련 학원 및 수학 과외 경험은 없음. -모르는 것에 대해 부모님에게 묻고 해결하는 편임.

[표 5] 연구 대상자의 특성

2. 문제의 선정

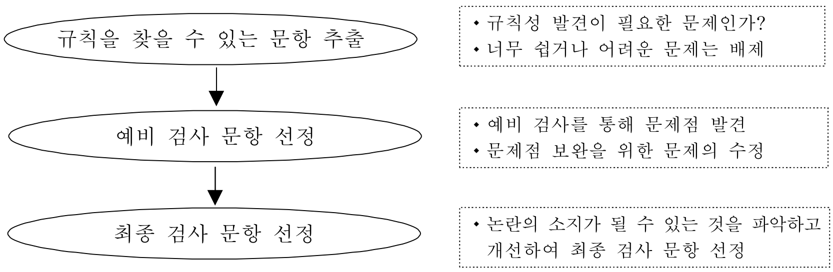
본 연구에서는 수학문제에 대해 규칙을 찾는 학생들의 반응을 분석하여 학생들의 사고 과정에 대한 이해를 돕는 것이 연구의 목적이다. 따라서 검사 문항은 규칙성 발견이 필요한 것이어야 하며, 문항이 너무 어렵거나 쉬울 경우 사고 과정 분석이 어려울 것이라 판단하여 이러한 문항은 배제하였다. 한편, 앞에서 언급한 바와 같이 검사 문항은 교과서에 가장 많이 등장하는 유형인 관계적 속성이면서 증가에 의한 규칙성과 관련된 문항이 되도록 하였다.

[검사 문항] 분모가 39이하인 모든 진분수의 합을 구하여라.

(단, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\cdots$ 과 같은 분수도 서로 다른 진분수로 본다.)

검사 문항이 선정된 일련의 과정을 도식화하면 다음 [그림 1]과 같다.

6) 2011년 3월 8일에 초등학교 3~5학년을 대상으로 전국적으로 시행된 시험임.
7) 2011년 5월 17일 초등학교 2~6학년을 대상으로 전국적으로 시행된 시험임.



[그림 1] 검사 문장 선정 과정

최종적으로 선정된 검사 문항은 다음의 선행지식을 갖추어야 하는 문제이다. 분수의 개념, 분자와 분모의 개념, 진분수의 개념, 분수의 덧셈, 분수의 약분 및 통분 등 분수와 관련된 지식이 필요한 문제이다. 이러한 내용은 초등학교 5학년 이전에 등장하는 내용이어서 검사 문항은 초등학교 5학년 이상의 학생에게 적합한 것이다. 따라서 최종 선정된 검사 문항은 초등학교 5학년인 연구 대상자들이 이것의 해결을 위해 갖추어야 할 사전 지식의 부족을 염려할 필요는 없는 문항이었다.

3. 자료 수집 및 방법

연구에 참여한 2명의 학생들은 각각 다른 시간에 연구자와 개별적인 관찰 및 면담을 가졌다. 검사 문항을 제시하여 각 학생들의 문제 해결 과정을 1차, 2차 두 번에 걸쳐 관찰하였다. 2차 관찰에서는 1차 관찰에서 나타난 어려움을 돕기 위해 적절한 권고를 제공한 이 후의 반응을 관찰한 것이다. 면담 및 관찰은 방과 후에 교실에서 이루어졌으며, 모든 과정은 녹화하고 필드노트에 기록되었다.

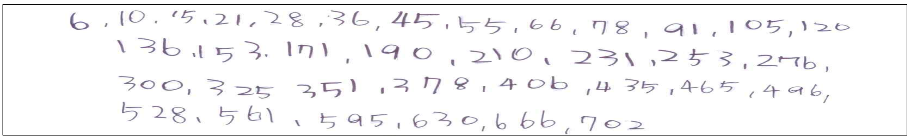
Ⅳ. 연구 결과 및 분석

1. 관찰 결과

가. 학생 A의 문제 해결 과정 및 면담

(1) 1차 관찰에서의 문제 해결 과정

학생 A는 문제가 제시되자 빠르게 문제를 파악한 후, 1에서부터 38까지의 수를 모두 적더니 [그림 2]와 같이 $6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 \cdots$를 기록하였다.



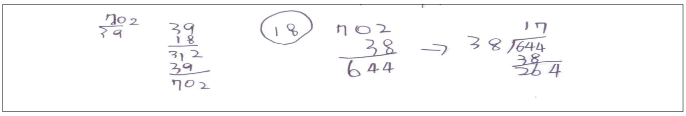
[그림 2] 학생 A가 분모가 39인 진분수의 분자의 합을 구하는 과정

연구자 : 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45⋯ 이런 것들은 무엇이지?
학생 A : 분모가 39일 때, 분자의 합을 구한 것 이예요.
연구자 : 네가 써 놓은 1에서부터 38까지의 수를 차례대로 더 한 것이니?
학생 A : 예.

이 후 이들의 합으로 702를 구한 다음 $\frac{702}{39}$를 적었다. 여기에서 학생 A는 39×19를 계산해보더니 곧 39×18을 계산하였다. 그런데 이 결과가 702가 나오는 것을 확인한 후 다음과 같이 말하였다.

학생 A : 아! 그렇군.

이 말이 있은 후 학생 A는 $702 - 38 = 644$를 계산한 후 $644 \div 38 = 17$이라고 계산해 내었다. 이 후 $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 18 = 171$이라고 계산해 내었다. 이상의 내용을 요약 정리하여 학생 A는 다음 [그림 3]과 같은 예측을 통한 규칙성을 발견한 후 최종 답안을 제출하였다.



[그림 3] 학생 A의 예측을 통한 규칙성 찾기

학생 A의 문제 해결 과정에서 $702 - 38 = 644$, $644 \div 38 = 17$에 대해 두 가지의 계산상의 실수가 보여 다음과 같이 질문하는 과정에서 이러한 실수가 학생 A의 예상과 관련이 있음을 확인하였다.

연구자 : 왜 계산 실수를 한 거지? 특히 너는 $\frac{702}{39} = 18$을 구한 다음 '아! 그렇군'이라고 했잖아. 이 부분과 계산 실수가 관련이 있는 것이니?
학생 A : ...저는 $\frac{702}{39} = 18$ 이기 때문에 $\frac{644}{38} = 17$이 나올 것이라 예측하고 계산을 했어요.

(2) 1차 관찰 후 면담

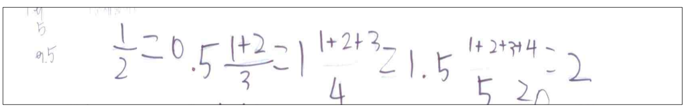
면담은 1차 관찰이 끝난 후 간단하게 진행되었으며, 수업을 마친 후 방과 후 시간에 진행되었다.

연구자 : 문제를 풀 때 어떤 생각이 들었니?
학생 A : 음, 정말 힘들었어요. 제일 처음에 그 문제를 읽고 어떻게 풀어야 할 지 막막했어요. 그런데 갑자기 '그냥 더하는 거면 문제를 내지는 않았겠지?' 하는 생각이 드는 거예요. 그래서 무언가 있을 것 같다는 생각을 했어요.
연구자 : 무언가 있을 것 같다고?
학생 A : 네. 어떤 규칙이 있을 것 같았어요.
연구자 : 규칙?
학생 A : 네, 그래서 처음 문제를 풀 때 규칙을 찾으려고 했어요. 그래서 분모가 39인 분수부터 합을 더해서 계산을 해 보니깐 규칙이 있어서 그걸 이용했어요.
연구자 : 처음 그 문제를 받았을 때 어떤 방법으로 해결해야 할 지 생각해봤니?
학생 A : 왠지 39부터 해야 할 것 같았어요. 39부터 하면 쉬울 것 같기도 했고. 분모가 39인 수에서 분자의 합을 구하면, 그 값에서 38을 빼면 분모가 38인 분수에서 분자의 합이 나올 테고. 그런 식으로 구해 나가려고 했어요.

이상의 대화를 통해 학생 A는 규칙이 있을 것이라는 예상을 하고 있으며, 분모가 39인 분수의 합을 구함으로써 규칙이 있음을 확인하였다. 하지만 학생 A는 다소 복잡한 분모가 39인 분수의 합으로부터 접근하였기에 단순화 방법을 통한 귀납적 접근을 권고하였다.

(3) 2차 관찰에서의 문제 해결 과정

연구자는 규칙성을 찾는 방법 중 하나인 단순화하기를 통한 귀납적 접근에 대한 연구자의 권고가 있은 후 1차 관찰에서 보인 문제 해결 과정과는 다르게 문항지에 $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1+2}{3}=1$, $\frac{1+2+3}{4}=1.5$, $\frac{1+2+3+4}{5}=2$ 을 [그림 4]와 같이 기록했다. 그리고는 아래에 $0.5(2)$, $1.0(3)$, $1.5(4)$, $2.0(5)$, $2.5(6)$, $3.0(8)$, $\cdots$, $19.0(39)$을 적어나갔다. 그리고 이들의 합을 19.5×9.5와 같이 계산하여 잘못된 답을 제시하였다.



[그림 4] 연구자의 권고 이후 학생 A의 반응

연구자 : 19.5×9.5에서 19.5와 9.5가 의미하는 것이 무엇인지 설명해 줄래?

학생 A : 이것은 영재반 수업에서 배운 것인데 잘은 기억이 나지 않지만 (0.5+19.0)을 하면 19.5가 나오잖아요. 그리고 (18.5+1.0)을 하면 19.5가 되요. 그런 식으로 하면 다 19.5가 되요. 그래서 19.5를 곱했어요. 그리고 19.0의 반이 9.5이기 때문에 곱해주면 되요. 항상 마지막 수의 반을 곱해주면 되요.

이 후 자신이 푼 풀이 과정을 살펴보더니 자신의 계산 결과를 의심하였으며, 규칙성을 이용해 발견한 수들을 일일이 더하는 과정을 통해 소수들의 합을 구하였다. 그리고 최종적으로 올바른 답을 제시하기에 이르렀다.

나. 학생 B의 문제 해결 과정

(1) 1차 관찰에서의 접근 과정

학생 B는 문제가 제시되자 작은 목소리로 문제를 읽었다. 그리고 연필로 문제의 ‘이하’, ‘모든 진분수’, ‘합’에 밑줄을 그었다. “39 ∼ 1′과 “38 ∼ 1′를 적었다. 이에 연구자는 그 숫자의 의미를 묻기 위해 질문하였다.

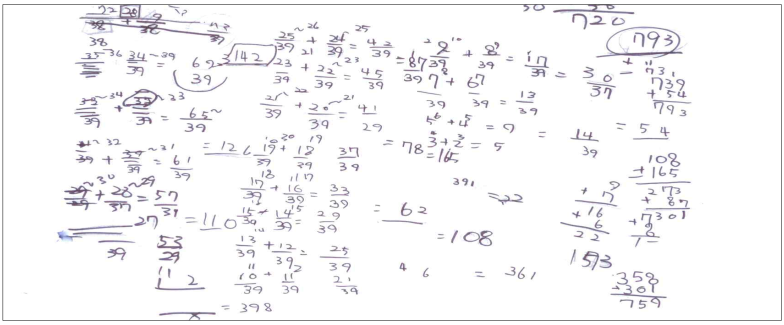
연구자 : 39∼1하고 38∼1은 무엇을 의미하니?

학생 B : 분모가 39 이하인 모든 진분수의 합이니까 39∼1, 진분수는 자기 자신은 안 되고 1 작은 수여야 하니까 38∼1이에요.

연구자 : 그럼 네 말은 분모와 분자를 표시했다는 의미니?

학생 B : 네.

38에서 6까지의 숫자를 기록한 후 다시 한 번 더 작은 목소리로 문제를 두, 세 차례 읽었다. 그리고는 분모가 39인 진분수를 차례대로 나열하고, 이 진분수들을 분수끼리 더하였으며, 이들의 합을 또 더하여 나갔다.



[그림 5] 학생 B가 분모가 39인 진분수의 합을 구하는 과정

더하는 과정 중에서 몇 번의 실수가 있었으나, 자신의 계산 실수를 발견한 것에 대해서는 다시 계산을 하였고 그렇지 않은 것은 그냥 지나쳤다. 37에서 1까

지의 분자들을 차례대로 더하여 잘못된 계산 결과인 793을 얻었다. 그 후 793－37을 계산하였다. 연구자는 그 계산의 의미를 알기 위하여 질문하였다.

연구자 : 793－37 은 어떤 계산이니?
학생 B : 37은 포함하지 않으니깐 빼야 해요.
연구자 : 조금만 더 자세히 설명해 줄래?
학생 B : 분모가 39이하인 진분수이니깐 37은 포함하지 않아요.
연구자 : 그 말은 네가 계산하려고 하는 793－37이 분모가 37일 때 분자의 합을 의미한다는거니?
학생 B : 네.

그리고는 793에서 차례차례 더하거나 빼어서 구한 계산 결과인 831(793＋38), 793, 756(793－37), 720(756－36), …을 더하여 나갔다. 계산 도중에 몇 번의 계산 실수가 있었으나 일부의 계산 실수는 찾아서 수정하였고 일부는 찾아내지 못했다. 계산이 끝난 후 학생은 최종 답안으로 “15305′를 제시했다.

(2) 1차 관찰 후 면담

1차 관찰을 마친 후 학생의 생각을 보다 상세히 이해하기 위해 면담을 실시하였다.

연구자 : 문제를 해결하면서 어떤 점이 힘들었니?
학생 B : 분모가 39인 분수의 분자를 구하기 위해서 계속 더했잖아요. 그리고 분모가 38인 분수의 분자의 합을 구하기 위해 38을 빼고, 더하고, 다시 37을 빼고, 더하고. 빼고 더하는 과정을 계속 반복하는 것이 힘들었어요.
연구자 : 그런 식으로 계산을 하는 것이 힘들었으면 분모가 39가 아닌 다른 수부터 하는 것은 생각해 보지 않았니?
학생 B : 문제에도 39가 나와 있고, 39부터 하면 뭔가 나올 것 같았어요. 그런데 계산을 하면 할수록 방법이 보이지 않았어요.

이상의 대화로부터 학생 B는 학생 A와는 다르게 규칙성이 있을 것이라는 예측을 하지 못하고, 규칙성을 발견하려고 노력하지도 않았다. 학생 B는 단순한 계산을 반복하여 수행하는 것이 힘들다고 토로하면서도 자신의 방법을 고수하였다. 한편, 학생 B 역시 다소 복잡한 분모가 39인 분수의 합으로부터 접근하였기에 2차 관찰에서는 단순화 방법을 통한 귀납적 접근을 권고하였다.

(3) 2차 관찰에서의 접근 과정

학생 A 와 마찬가지로 단순화하기 방법을 통한 귀납적 접근에 대해 설명을 하였다. 이 후 학생 B는 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, … 를 쓰고 고민하던 중 자신이 기표한 내용을 지

웠다. 이후 학생 B는 분모가 39인 분수를 나열하였다. 그리고는 $\frac{1}{39}$, $\frac{2}{39}$, $\cdots$, $\frac{9}{39}$, $\frac{10}{39}$을 적은 후 1차 관찰과는 다르게 $(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)$을 계산하였다. 그리고 $\frac{55}{39}$라는 것을 계산해 내었다. 1차 관찰에서는 가장 큰 수인 분모가 39, 그리고 분자도 가장 큰 수인 38, 37, $\cdots$ 부터 더해갔으나 2차 관찰에서는 분모는 39부터 계산 하였으나 분자는 작은 수부터 분모는 가장 큰 수부터 계산하는 모습을 보고 그 이유를 물어 보았다.

연구자 : 왜 분모가 39인 분수부터 시작해서 계산했니?
학생 B : 분모가 다르면 저는 더하기가 어려워요. 그래서 일단 39를 해서 분자를 10까지 더하면 대략 그 수가 나올 것 같아요.
연구자 : 어떤 수가 나온다는 말이지?
학생 B : 음, 대략 1~10까지 더한 수가 나오잖아요. 그리고 11~20까지 더하고, 나온 값을 계속 더하면 분자의 합을 구할 수 있을 것 같아요. 저한테는 이 방법이 쉬울 것 같아요.

이 후 학생 B는 $11\sim20$, $21\sim30$, $31\sim39$까지 합을 각각 구해나갔으며, 그 결과를 더해 나갔다. 계산하는 도중 이분모 분수의 합의 계산을 통분 없이 수행한 실수의 발견과 계산상의 실수를 발견하여 이를 수정하는 과정을 반복하더니 최종적으로 동분모인 분수끼리의 합으로 $\frac{702}{39}$, $\frac{664}{38}$, $\frac{627}{37}$, $\frac{591}{36}$, $\cdots$ 을 제시하였다. 이 과정에서 분자들은 분모가 39인 분수들의 합의 분자인 702로부터 $38, 37\cdots$을 빼 나가면서 구한 결과였다. 이 후 학생 B는 이러한 결과를 어떻게 처리해야 할지 고민을 하였고, 다음과 같이 어려움을 토로하였다.

학생 B : 통분을 해서 더해야 하나?

더 이상 풀이가 진행되지 않자 연구자는 규칙성 발견을 돕기 위해 다시 한 번 더 귀납적 접근을 권고하였다.

연구자 : 분모가 작은 수부터 계산하지 않을래?
학생 B : 분모가 작은 수?

권고 이 후, 학생 B는 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\cdots$, $\frac{37}{39}$, $\frac{38}{39}$를 적은 후 고민을 하였다.

연구자 : 왜 그러니?

학생 B : 다음일이 고민 되요. 음, 이건 아닌 거 같아요.
연구자 : 분모가 2인 분수와 분모가 39인 분수부터 계산 하는 것 중에 어떤 것이 편리하게 계산할 수 있을까?
학생 B : 분모가 2인 분수가 더 쉬울 것 같아요.
연구자 : 그런데 왜 분모가 39인 분수부터 계산을 하는 거지?
학생 B : 저한테는 이게 단순화해서 계산하는 거예요. 저번에는 무작정 더하기만 했는데 지금은 분모가 39인 분수를 차례대로 나누어서 하니깐 저한테는 이게 단순화 하는 것이고 39부터 시작할래요.

이 후 분모가 39인 분수로 관심이 전환되는 듯 보였으나, 어려움에 봉착하자 다시 $\frac{1}{2}, \frac{1,2}{3}, \frac{1,2,3}{4}\cdots$을 적었고, 이 기표를 두고 고민을 거듭하였다.

학생 B : 이렇게 하면 안 될 것 같은데...
연구자 : 왜 안 될 것 같니?
학생 B : $\frac{1}{2}, \frac{1,2}{3}, \frac{1,2,3}{4}\cdots$은 더할 수가 없어요. 분모가 다르잖아요.
연구자 : 분모가 작은 것부터 차례대로 하면 어떨까?
학생 B : 분모가 같아야 하는데... 통분만 계속 할 수도 없고. 선생님 저 못 풀겠어요.

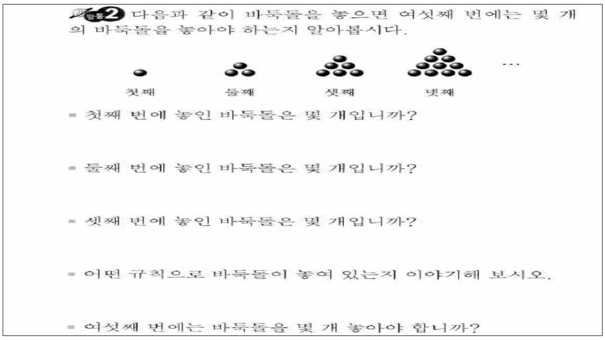
학생 B는 분모가 39인 분수와 분모가 2, 3, 4인 분수 사이를 오가며 관점을 전환하는 시도를 하였지만 끝내 규칙성 발견에 실패함으로써 문제 해결을 포기하고 말았다.

2. 관찰 결과에 대한 분석

가. 학생 A의 접근에 대한 분석

(1) 1차 풀이과정 분석

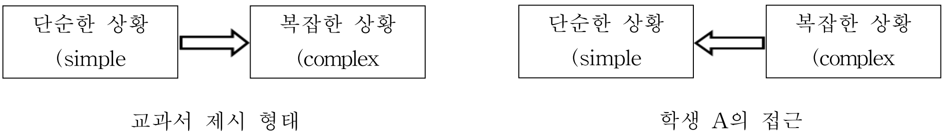
Ⅱ장에서 살펴보았듯, 초등학교 교과서에 규칙성과 관련된 내용은 대부분 [그림 6]과 같이 안내되고 구조화된 질문을 따라 가다 보면 규칙성을 발견해낼 수 있도록 제시되고 있음을 알 수 있다. 특히 단순한 것에서부터 복잡한 것으로 나아가는 귀납적 접근을 취하고 있음을 알 수 있다.


활동 2 다음과 같이 바둑돌을 놓으면 여섯째 번에는 몇 개의 바둑돌을 놓아야 하는지 알아봅시다.

- 첫째 번에 놓인 바둑돌은 몇 개입니까?
- 둘째 번에 놓인 바둑돌은 몇 개입니까?
- 셋째 번에 놓인 바둑돌은 몇 개입니까?
- 어떤 규칙으로 바둑돌이 놓여 있는지 이야기해 보시오.
- 여섯째 번에는 바둑돌을 몇 개 놓아야 합니까?

[그림 6] 교과서에서 제시된 귀납적 접근의 예

그러나 1차 관찰에서 학생 A는 교과서에서 학습한 형태인 귀납적 접근으로 문제를 해결하려고 하지 않았고, 오히려 가장 복잡한 '분모가 39'인 분수에서부터 해결을 모색하려고 하였다. 이것은 연구자가 예상하지 못한 다소 의외의 반응이었다. 교과서에서는 규칙성과 관련된 내용이 많이 등장하고, 이들은 단순한 것에서 복잡한 것으로 나아가는 귀납적 접근의 형태를 취하고 있음에도 불구하고 학생 A는 복잡한 것부터 먼저 해결을 하려고 하였다. 이상의 내용을 요약하면 [그림 7]과 같다. 여기서 화살표는 각각 제시의 흐름과 사고의 흐름을 나타낸다.



[그림 7] 규칙성과 관련된 문제의 교과서 제시 형태와 학생 A의 접근

하지만 검사 문항은 학생이 규칙성을 발견하는데 전혀 도움이 될 만한 것이 없고, 규칙성을 스스로 발견해가야 하는 상황인 것이다. 따라서 안내된 질문으로 규칙성을 발견할 수 있었던 학생은 이러한 도움이 전혀 제공되지 않는 상황에서 스스로 단순화로부터 시작하는 귀납적 접근을 하지 못하는 결과를 낳은 것으로 판단된다.

한편, 학생 A는 분모가 39인 진분수의 합을 계산하기 위해 $1+2+\cdots+37+38$을 구했고, 분모가 38인 진분수의 합을 계산하기 위해 새롭게 $1+2+3+\cdots+36+37$을 계산한 것이 아니라 이전에 계산했던 값에서 37을 빼내어 구해내었다. 면담에서도 드러난 바와 같이 학생 A의 이 같은 반응은 가장 복잡한 상황이 해결되면 나머지 상황은 쉽게 해결이 될 것이라는 생각으로 비롯된 것으로 보인다.

한편, 학생 A는 제시된 문제가 규칙성을 발견해야하는 문제임을 인식하였고,

분모가 39인 분수의 분자의 합이 702가 됨을 계산한 후 $\frac{702}{39}=18$임을 찾아내었다. 이것으로부터 분모가 38인 분수의 분자의 합을 잘못 구했지만 이것은 자신의 계산 실수라고 생각하고 17이라고 자신이 생각한 숫자를 적었다. 즉, 학생 A는 이 문제는 규칙성 발견이 필요한 문제라고 생각하였고, 비록 계산 결과가 잘못되었으나 처음 계산한 값을 통해 1씩 작아지는 규칙을 예상하였고, 두 번째 계산을 통해 자신의 예상이 맞는지 확인한 후 문제를 해결하였다. 학생A의 이러한 규칙성 예측은 1차 관찰 후 면담 내용에서도 드러났다.

비록 학생 A가 잘못된 규칙성을 발견하였음에도 불구하고 규칙성 발견에는 규칙성이 내재해 있을 것이라는 예상이 무엇보다 중요함을 알 수 있으며, 이것은 $\frac{702}{39}=18$이라는 한 가지 값의 변형을 통해 규칙성 발견에 보다 다가간 점을 보면 이러한 예상이 얼마나 위력적인지를 확인할 수 있다.

한편, 학생 A는 동분모의 합을 구하고 난 뒤, 그 값을 가분수로 두는 것이 아니라 대분수로 고치는 계산을 하였다. 이렇게 계산한 값을 가분수가 아닌 대분수로 바꿈으로써 학생 A는 자신이 예상한 규칙성이 성립하는지 확인할 수 있었으며, 이러한 사실로부터 예측한 규칙성의 확인 과정에는 규칙성 발견에 용이한 형태로의 자료 변형이 필요함을 알 수 있다.

(2) 2차 풀이과정 분석

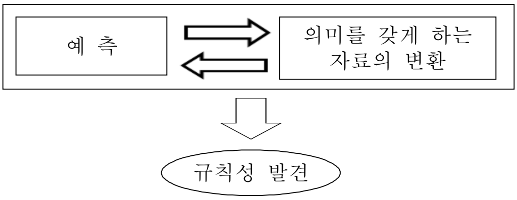
학생 A의 경우 1차 관찰에서는 가장 복잡한 상황(분모가 39)에서 해결하려고 노력하였으나 단순한 것으로부터 점차 복잡한 것으로의 규칙성을 발견해가는 귀납적 접근을 해 보도록 하는 연구자의 권고 후 분모가 2인 분수부터 차례대로 계산해 나갔다. 간단한 몇 개의 예들을 이용하여 계산상의 실수 없이 문제 풀이에 도움이 되는 규칙(동분모 합을 구하였을 때 0.5씩 커진다)을 발견해 내었다.

이 후 학생 A는 발견된 규칙성으로부터 $0.5+1+1.5+2+\cdots$을 계산하는 과정에서 '$0.5+19=19.5$, $1+18.5=19.5$, $\cdots$'이므로 19.5×9.5를 하였는데, 여기서 9.5는 마지막 수의 절반이라고 생각하고 있었다. 이는 1부터 n까지의 합이 공식인 $\frac{n(n+1)}{2}$의 의미인 초항과 말항의 합인 $(n+1)$이 $\frac{n}{2}$번 반복해서 나타난다는 것을 충분히 이해하지 못한 것 때문에 발생한 것이다. 비록 계산상의 실수가 있었으나, 학생 A는 귀납적 접근을 통해 규칙성을 발견하였으며, 이는 귀납적 접근이 규칙성 발견에 도움이 될 수 있음을 의미한다.

한편, 학생 A는 1차 관찰과 2차 관찰 모두에서 동분모 분수의 합을 구한 뒤, 이 값을 소수로 변형하는 시도를 하였다. 이는 소수로의 변형을 통해 자신이 예

측한 규칙성을 발견하기 위한 시도인 것으로 풀이된다. 이러한 사실은 1차 관찰에서 분모가 39인 분수의 합을 계산한 이 후, '아, 그렇군!'이라고 말한 대목을 보면 더욱 분명해 보인다.

따라서 규칙성의 발견에는 규칙성이 있을 것이라는 예측, 규칙성 발견에 용이한 자료로의 변형과 이러한 변형으로부터 예측한 규칙성의 확인 등의 일련의 과정이 필요함을 알 수 있으며, 이러한 과정을 [그림 8]과 같이 도식화 할 수 있다. 여기서 화살표는 사고의 흐름을 나타낸다.



[그림 8] 학생 A가 보인 규칙성 발견 과정

나. 학생 B의 접근에 대한 분석

(1) 1차 풀이과정 분석

학생 A가 보인 접근과 마찬가지로 학생 B도 교과서에서 많이 등장하는 형태인 단순한 상황에서부터 복잡한 상황으로 진행해가는 귀납적 접근 보다, 복잡한 상황에서 단순한 상황으로 진행되는 접근을 시도하려고 하였다. 이것 역시 학생 A의 분석에서와 마찬가지로 안내된 질문으로 규칙성 발견을 학습하였기에, 도움이 전혀 제공되지 않는 상황에서 스스로 단순화로부터 시작하는 귀납적 접근을 하지 못하는 결과를 낳은 것으로 풀이된다.

한편, 학생 A와는 다르게 학생 B는 규칙성이 있을 것이라는 예상을 하지 못하고, 이러한 이유로 계산한 결과를 변형하려는 시도를 하지 않았음을 알 수 있다. 이러한 사실로 볼 때, 규칙성 발견이 필요한 문제에서 규칙성 예상과 계산 결과를 규칙성 파악에 용이한 형태로 변형하는 작업은 무엇보다 중요함을 알 수 있다.

(2) 2차 풀이과정 분석

학생 B는 학생 A와 다르게 연구자의 문제 해결 과정에서 귀납적 접근의 권고가 별 도움이 되지 않았다. 여러 차례 분모가 작은 수부터 적으면서 계산을 하려고 시도하였으나 단순히 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$을 썼다가 지우며 그것을 조작하거나 계산을 하는 활동을 하려고 하지 않았다. 2차 관찰을 살펴보면 연구자의 권고로부터 학생

B는 몇 번이나 분모가 2인 분수에서 단순화하여 접근하려고 $\frac{1}{2}$, $\frac{1,2}{3}$, $\frac{1,2,3}{4}$, …을 적으면서 단순화 접근을 시도하였다. 그러나 거듭된 시도에도 불구하고 규칙성 발견에 도달하지 못하고, 분모가 39인 진분수의 합을 구하고자 한 처음의 시도로 되돌아갔고, 결국 문제 해결을 포기하기에 이르렀다.

이상의 내용으로부터 학생 A에게는 귀납적 접근의 권고가 도움이 되었지만, 학생 B에게는 도움이 되지 못하였음을 알 수 있다. 이러한 사실에 대한 이해를 위해 귀납적 접근의 권고 이후 학생 B가 문제 해결 과정에서 보인 반응 중 학생 A와 차이가 나는 부분을 살펴보기로 하자.

학생 B는 [그림 8]의 사고 과정을 거친 학생 A와는 다르게 규칙을 예측 하지도 않았을 뿐 아니라 자신이 구한 값을 규칙성 발견에 용이한 형태로 변형하려는 시도조차 하지도 않았다. 단순히 분수의 합을 구하기 위해 동분모 분수의 합을 구하여 복잡하게 보이는 그 결과를 단순히 나열하기만 하였을 뿐 그 합들이 어떠한 관계에 있는지 살펴보려고 하지 않았다. 즉, 동분모 분수의 합을 약분을 하거나 대분수로 바꾸는 일, 혹은 소수로 바꾸는 등의 자료의 변형을 하지 않았다. 학생 B가 보인 반복적인 동분모 분수의 합의 나열과 문제 해결을 포기하는 반응들은 규칙성이 있을 것이라는 예측과 규칙성 발견에 용이한 형태로의 자료를 변형하는 활동의 부재로부터 비롯된 것임을 알 수 있다.

이러한 사실로부터 단순한 상황에서 구한 몇 개의 값으로부터 발견한 규칙성은 복잡한 상황에 대한 해결로 이어질 수 있을 것이라는 믿음과 규칙성 발견에 용이한 형태로의 변형은 귀납적 접근의 성공을 돕는 활동 요소임을 확인할 수 있다.

Ⅴ. 결론 및 제언

'수학은 패턴의 과학이다'라는 주장이 있을 만큼 수학에 있어서 규칙성은 중요한 요소로서 인식되고 있으며, 일상적인 경험에서도 중요하게 다루어지고 있다. 또한 규칙성은 문제 해결의 전략의 하나로 강조되고 있으며, 학교 수학에서 꾸준히 소개되고 지도되고 있다. 이렇게 수학에서 규칙성은 수학의 본질적 요소로서의 측면과 문제 해결 전략으로서의 측면에서 지속적으로 강조되고 있으며, 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 하지만 기존의 연구에서 규칙성 발견과 관련한 학생들의 사고를 심층적으로 분석한 연구는 드물었다. 이에 본 연구에서는 학생들의 사고에 대한 심층적 이해를 모색하고자, 두 학생의 문제 해결 과정을 관찰·분석하여 규칙성 발견에서 이들이 보이는 사고 경향 및 규칙성을 발견하는데 필요한 요소를 살펴보았다. 이를 통해 다음과 같은 연구 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, [그림 6]에서 제시된 바와 같이 규칙성과 관련된 내용이 단순한 것으로부터 시작하여 규칙성을 발견해 가는 귀납적 접근의 형태로 수학 1-1에서부터 수학 6-2에 이르기까지 꾸준히 제시되고 있음에도 불구하고, 학생 A의 1차 관찰과 학생 B의 1, 2차 관찰에서 그들은 가장 복잡한 형태인 분모가 39인 진분수의 합부터 구하려고 시도하였다. 두 학생은 규칙성 발견이 필요한 문제에서 단순한 것에서부터 출발하는 귀납적 접근보다는 보다 복잡하고 까다로운 상황을 해결하려는 성향을 지니고 있었다. 학습의 형태와 해결의 형태에서 보이는 이와 같은 차이점은 복잡한 상황이 해결되면 보다 단순한 것은 절로 해결될 것이라는 생각에서 비롯된 것으로 생각된다.

둘째, 규칙성에 대한 예측이 규칙성 발견에 중요한 요소임을 알 수 있었다. 학생 A는 1차 관찰에서 오답을 도출해 내기는 하였으나 분모가 39인 분수의 합을 구해내 18이라는 값을 찾아내었고, '1씩 작아진다'라는 규칙이 있을 것이라고 예측을 하고 문제를 풀어 나갔다. 귀납적 접근을 권고한 2차 관찰에서도 분모가 2인 분수부터 5인 분수까지 차례로 계산하여 규칙을 찾고, '0.5씩 커진다'라는 규칙을 발견해 내고 문제를 해결하려고 하였는데, 이 과정에서 규칙성의 발견은 규칙성이 있을 것이라는 예측으로 비롯된 것임을 알 수 있었다. 반면 학생 B는 1, 2차 관찰에서 규칙성이 있을 것이라는 예측을 하지 않았으며, 이로 인해 규칙성을 전혀 발견하지 못하였다. 이와 같은 점을 볼 때, 규칙성 발견에 있어 규칙성 예측은 중요한 활동임을 알 수 있다.

셋째, 규칙성을 발견하기 위해서는 계산한 결과를 규칙성 발견이 용이한 형태로 변형하는 활동이 필요함을 알 수 있었다. 학생 A와 학생 B 모두 동분모 분수의 합을 구하였지만, 학생 A는 동분모 분수의 합을 가분수에서 규칙성 발견이 용이한 형태인 대분수 및 소수로 변형함으로써 규칙성 발견에 도달할 수 있었다. 그러나 학생 B는 동분모 분수의 합을 구하였으나, 이 결과를 대분수로 고치거나 소수로 변형하지 못함으로써 규칙성 발견에 실패하였다. 이러한 사실로 부터 규칙성 발견에는 규칙성 발견에 용이한 형태로의 자료 변형이 중요함을 확인할 수 있었다.

넷째, 규칙을 찾아 문제를 해결하기 위해서는 규칙을 예상하는 활동과 자료를 의미 있게 변형하는 활동이 유기적으로 연계되어 이루어져야 함을 알 수 있었다. 규칙이 있을 것이라는 예상은 이를 확인하기 위한 자료의 변형으로 이어지기 때문에 규칙성 발견에 무엇보다 중요하다. 한편, 자료의 변형은 예상한 규칙성을 확인할 수 있게 하기에 두 가지 활동이 유기적으로 이루어 질 때, 규칙성 발견이 보다 용이해 짐을 알 수 있다. 즉, 규칙성이 내재해 있을 것이라는 믿음으로부터 자료의 변형을 시도하고, 예측한 규칙성을 자료의 변형을 통해 확인하는 일련의 과정을 통해 규칙성 발견에 다가갈 수 있는 것이다.

이상의 결론에서 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있다. 첫째, 현행 교과서에서는 비 구조화된 문제에 비해 구조화된 문제가 많이 제시되어 있는데, 비 구조화된 문제의 비율을 좀 더 높일 필요가 있을 것으로 생각된다. 둘째, 주어진 문제나 상황 속에 내재된 규칙성은 이것에 대한 예측이 있을 때 더욱 효과적으로 발견 가능하게 되므로 규칙성 학습에서 규칙성의 예상에 대한 지도가 보다 강화되어야 할 것으로 보인다. 셋째, 자료의 의미 있는 변형이 규칙성 발견에 도움이 됨을 확인하였으며, 이로부터 수나 도형을 다양한 형태로 변형하는 학습이 규칙성 발견과 연계되어 지도되어야 함을 알 수 있다. 본 연구의 결과가 규칙성 발견을 위한 학생들의 사고 과정 이해에 도움이 되길 바란다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부(2011), 초등학교 교사용 지도서 수학 5-1, 두산동아 주식회사.

[2] 교육인적자원부(2002), 초등학교 교사용 지도서 6-나, 대한 교과서 주식회사.

[3] 강지형・김수환・라병소・박성택・이의원・정은실(1999), 초등수학교육, 동명사.

[4] 강현영(2007), 패턴탐구를 통한 일반화와 기호표현 -시간적 패턴을 중심으로-, 대학수학교육학회지 <학교수학> 9(2), 313-326.

[5] 권성룡(2007), 초등 수학 교과서의 규칙성과 함수 영역의 활동 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 10(2), 111-123.

[6] 김남균・김은숙(2009), 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 23(2), 399-428.

[7] 김상미(1997), 수학적 패턴에 관한 학습 프로그램 개발 연구:초등학교 4학년을 대상으로, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[8] 김상미・신인선(1997), 초등수학에서 수학적 패턴 지도, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 1(1), 3-22.

[9] 김성준(2002), 대수교육과정의 변화에 관한 고찰 -패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로-, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 12(3), 353-369.

[10] 김성준(2003), 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰, 대한수학교육학회지 <학교수학> 5(3), 343-360.

[11] 김은진(2008), 수학 7-가 교과서의 규칙성과 함수 단원 비교 분석, 공주대학교 교육대학원 석사학위논문.

[12] 류성림・박신정(2003), 인터넷을 활용한 패턴 학습에서의 수학적 의사소통 및 문제해결에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> 5(4), 459-476.

[13] 박교식(2002), 규칙성이 있는 수식을 소재로 한 교수단원 설계 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> 4(2), 297-316.

[14] 방승진 · 최중오 · 김혁(2006), 패턴인식을 이용한 과학영재 판별 도구에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집> 20(4), 551-559.

[15] 안종률(1999), 5학년 아동을 위한 수학적 패턴 프로그램 개발과 적용, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

[16] 오순임(2002), '규칙성과 함수'영역의 교수, 학습 방법 탐색, 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

[17] 윤대원 · 김동근(2008), 종이접기를 통한 패턴 탐구 활동, 한국수학교육학회, 전국수학교육연구대회 프로시딩 제40회, 11-15.

[18] 이성계 · 김진수 · 최원(2009), 사각형 종이의 접고 펼친 흔적과 (0,1)-패턴의 관계성, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 23(3), 507-522.

[19] 전주희(2005), 패턴의 일반화 과정을 통한 대수도입 학습자료 개발 및 적용: 7-가 '문자와 식'을 중심으로, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[20] 정창섭(2007), 수학 교육과정 내용의 규칙성과 함수 학습과제 분석, 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.

[21] 정홍춘(2008), 패턴에 기초한 대수 문제 해결에서 나타나는 중학생들의 일반화 전략 및 수학적 표현, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

[22] 최병훈 · 방정숙(2011), 초등학교 1학년 학생들의 수학적 패턴 인식과 사고과정 분석, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 21(1), 67-86.

[23] 한찬조(1996), 수학 문제 해결 학습에서 문제 해결 전략 훈련의 효과, 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

Shin, SuJin
Naedong Elementary School
Kim-Hae 621-903, Korea
E-mail: milk8303@hanmail.net

Kang, JeongGi
Namsan Middle School
Chang-Won 642-110, Korea
E-mail: jeonggikang@gmail.com

Roh, EunHwan
Department of Mathematics Education

Chinju National University of Education
Jinju 660-756, Korea
E-mail: idealmath@gmail.com; ehroh@cue.ac.kr