East Asian Mathematical Journal
Vol. 28 (2012), No. 2, pp. 135-158

연산자로서의 유리수 체계의 구성에 관한 연구

정 영 우 · 김 부 윤[1)]

ABSTRACT. The ideals of the rings of integers are used to induce rational number system as operators(=group homomorphisms). We modify this inducing method to be effective in teaching rational numbers in secondary school. Indeed, this modification provides a nice model for explaining the equality property to define addition and multiplication of rational numbers. Also this will give some explicit ideas for students to understand the concept of 'field' efficiently comparing with the integer number system.

Ⅰ. 서 론

초등학교에서 자연수와 0 그리고 분수를 다루었던 학생들은 중학교에서 음의 정수와 분수 개념[2)]으로부터 유도되는 유리수의 개념을 처음으로 접하게 된다. 그리고 소수 표현으로 유리수와 무리수를 나타내고, 그 합집합으로 실수를 정의한다. 고등학교에서는 실수 체계를 학습하며, 복소수까지 수 체계를 확장한다.[3)] 이러한 수의 확장은 대수적 구조의 보존이라는 관점과 방정식의 해와 관련된 관점 그리고 공리적 방법 등으로 다룰 수 있는데, 중등학교 수학과 교육과정에서는 이들의 결과라 할 수 있는 수의 표현으로 수를 정의하고 확장하고 있다. 그러나 이들 방법과는 관계없이 수 확장의 대원칙은 이전 체계의 구조를 유지하면서, 게다가 이전 체계를 포함하게끔 구성되어야 한다는 것이다. 이러한 맥락에서 본다

---

1) 교신저자

2012년 1월 6일 투고, 2012년 2월 21일 심사완료.
2010 Mathematics Subject Classification : 97D40, 97D20
Key words : rational numbers via modifying operators(연산자로서의 유리수), axiom of field(체의 공리), teacher's professional development(교사전문성 개발), pedagogical content knowledge(교수학적 내용지식)

2) 초등학교에서는 양의 유리수에 해당하는 것을 '분수'라는 개념으로 학습하며, 일부 중학교 교과서에서는 유리수의 정의를 '분수에 양과 음의 기호를 붙인 것'이라 정의하고 있다.

3) 교육과학기술부(2008a, 2008b, 2008c)

면, 수의 확장을 지도할 때 중요하게 다루어져야 하는 것은 그 결과물이 아니라, 수의 확장이 필요하게 되는 상황이나 필요성에 대한 인식과 그 확장 과정, 그리고 이전 체계의 구조를 보존시키는 방법이라 할 수 있다.

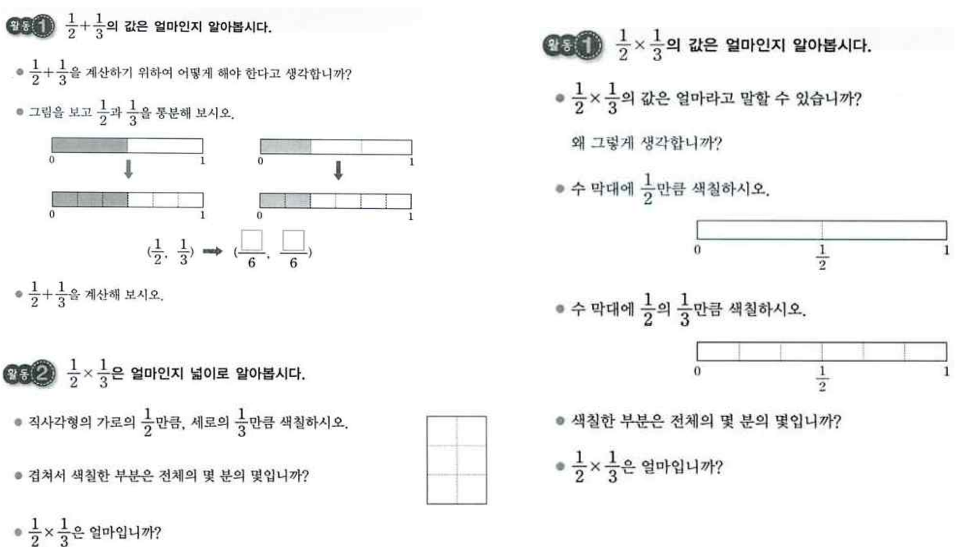
현대수학의 관점에서 유리수는 정수 체계에서 해결되지 않는 문제를 해결하기 위해 나타난 개념이라 할 수 있다. 예를 들어, 정수 체계는 정수끼리의 나눗셈의 결과를 포함하지 않는 경우가 있다든지, 일차방정식 $ax=b(a,\ b\in\mathbb{Z},\ a\neq 0)$의 해 x가 정수 집합 $\mathbb{Z}$의 원소가 아닌 경우가 있다는 불완전성을 가진다. 이러한 문제들을 해결하기 위하여 $\dfrac{b}{a}(a\neq 0)$ 꼴의 수를 정의하고, 이 수 집합에 정수 체계의 기본 성질을 보존하도록 체계를 구성한 것이 유리수체계이다. 즉, 유리수 체계는 $\dfrac{b}{a}(a\neq 0)$ 꼴의 수들의 모임인 유리수 집합에 정수 체계의 구조가 보존되도록 연산을 정의한 것이다. 따라서 정수 체계로부터 유리수 체계를 확장할 때에는 이러한 내용들이 강조될 수 있도록 구성되어야 한다. 이러한 구성은 다양한 관점에서 이루어질 수 있다. 역사 발생적 원리에 따라, 인지 발달 수준이나 학습자의 경험에 따라 또는 교육과정의 지도 영역의 관점에 따라, 혹은 구성자의 필요와 기호에 따라 구성할 수 있으며, 그 양상도 다르게 나타날 수 있다. 그러나 각 관점에서 수의 확장을 구성하는 중요한 원칙은 개념이 대두되는 계기, 그리고 그 개념을 수학적으로 형식화해 가는 과정에서 그러한 형태로 형식화될 수밖에 없는 필연성 및 당위성이 드러나야 한다는 것이다. 이는 곧 그러한 수학적 지식에 대한 맥락화를 의미한다.

본 연구에서는 이러한 원칙 아래 정수 체계에서 유리수 체계를 구성하는 하나의 방법으로, '준동형사상(homomorphism)'을 기초로 한 유리수 체계의 이론적 구성을 제안한다. 이와 같은 관점에서 정의된 유리수가 '연산자로서의 유리수' 개념인데, 이것은 유리수의 연산 규칙에 대한 당위성과 구조 보존이라는 본질에 대한 이해를 가능하게 해 준다. 본 연구는 교사에게 가르칠 수학적 지식에 대한 이론적 배경과 함께, 수학적 지식의 구성이 다양한 관점에서 다루어질 수 있음을 보여 주는 것이 목적이다. 이러한 활동은 교사의 전문성, 특히 교수학적 내용지식(PCK)을 높이고, 다양한 교수·학습 활동을 재구성하게 하는 기초적 소재를 제공한다.

Ⅱ. 본론

1. 유리수 연산 지도의 실제

유리수의 연산은 초등학교에서 배운 분수의 연산을 통해 도입되고 있다. 초등학교 2학년과 3학년에서 분수의 이해를 지도하고, 4학년에서 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을, 5학년에서 분모가 다른 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈과 나눗셈을 지도한다. 그리고 6학년에서 분수의 나눗셈을 지도한다(교육과학기술부, 2008c). 분모가 같은 분수의 덧셈은 '분모가 같다는 것은 단위가 같음을 의미하고, 계산은 분모는 그대로 쓰고 분자끼리 계산을 한다.'고 초등학교 해설서(2008)는 밝히고 있다. 이 때 기초가 되는 것은 자연수의 덧셈과 뺄셈이며, 시각적 자료인 분수막대나 넓이 모델을 사용하여 단위가 같음을 지도하고 있다. 한편, 5학년의 분모가 다른 덧셈은 먼저 약수와 배수, 공배수, 최소공배수를 지도하고, 약수와 배수 사이의 관계를 지도한 후, 약분과 통분을 지도하고, 이를 바탕으로 '4학년에서 학습한 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 바탕으로, 분모가 다른 분수는 분모를 같게 한 다음 계산해야 한다는 사실을 인식하게 한다.'고 초등학교 해설서(2008)는 밝히고 있다. 실제로 5학년에서는 이를 다음과 같이 지도하고 있다(두산동아, 2010).



(초등학교 5학년, 두산동아, 2010)

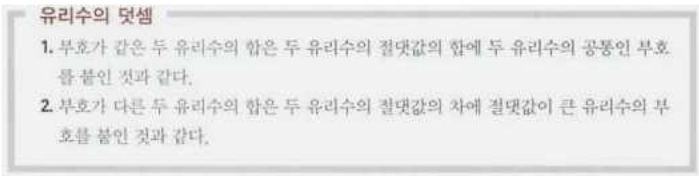
그런데 이런 활동들은 이미 등분할되어 있는 그림 상황에서 행해지며, 색칠 방법이나 답을 구하는 과정이 단계적으로 '주어지는' 수용적 활동이다. 그리고 같은 크기를 단위 1로 한정한 상황으로 인해 사고가 고정되어 있어 다양한 유리수(또는 분수)의 개념을 담아내지 못하고 있다. 특히, 곱셈에서는 활동 1과 활동 2의 개연성이 없으며, 그림에서 그렇게 색칠을 해야 할 당위성이나 이유가 다루어지

지 않은 채 단지 연산 규칙이 정해진 상태에서 그것을 지도할 적절한 모델을 개발한 것에 지나지 않는다. 즉, 확인의 수단에 지나지 않는 것이다. 이로 인해 학습한 직관적이고 시각적인 상황을 벗어난 분수의 덧셈 문제에서, 많은 학생들은 분자, 분모를 별개의 수로 생각하여 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 더하는 오류를 보이고 있다. 이것은 지금의 지도 방법이 직관적이지만, 직관적 방법이 근원적이지 않음을 보여준다고 할 수 있다.

중학교에서는 초등학교에서의 분수의 개념을 확장하여[4] 유리수를 정의하고, 연산을 다루게 된다. 유리수의 연산에 대해 중학교 교육과정 해설(2008)에서는 다음과 같이 밝히고 있다.

> 분수의 사칙계산 방법과 정수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈 방법을 바탕으로, 유리수의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈의 원리를 이해하고 계산할 수 있게 한다.

그리고 이를 구체화 한 교과서에서는 다음과 같이 계산방법을 알고리즘화하고 있다.


유리수의 덧셈

1. 부호가 같은 두 유리수의 합은 두 유리수의 절댓값의 합에 두 유리수의 공통인 부호를 붙인 것과 같다.
2. 부호가 다른 두 유리수의 합은 두 유리수의 절댓값의 차에 절댓값이 큰 유리수의 부호를 붙인 것과 같다.

(중학교 1, (주)두산, 2008)

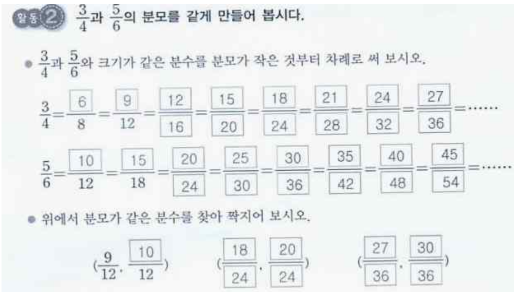
이처럼 유리수의 정의와 그 연산 규칙을 분수에 의한 확장으로 다루고 있을 뿐, 수학적 기호로 일반화 한다거나 연산 규칙의 유래와 일반화를 다루고 있지는 않다.

이와 같이 초등학교에서의 연산 지도는 주로 분수막대의 분할을 통해 이루어지고 있으며, 또 단원 말미에 넓이의 개념을 이용한 문제들이 다루어지고 있기 때문에, 수학적으로 다른 양 사이의 관계나 비 관계에서 단위 1에 의한 논의가 아닌 경우로 모델을 확대할 수 없다. 그럼에도 불구하고 통분과 약분에서는 비의

---

4) 초등에서의 분수는 $\frac{\text{자연수}}{\text{자연수}}$로 정의하고 있으며, 유리수는 $\frac{\text{정수}}{0\text{이 아닌 정수}}$로 정의하고 있다. 그러나 분수의 집합은 비의 형태로 나타나는 것으로 유리수의 집합을 포함하는 개념이다. 예를 들어, $\frac{\sqrt{2}}{3}$는 유리수가 아니지만 분수이다(김수환 외, 2010).

개념을 이용하여 이러한 맥락을 없애고 지도하고 있다.


활동 2 $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$의 분모를 같게 만들어 봅시다.

● $\frac{3}{4}$과 $\frac{5}{6}$와 크기가 같은 분수를 분모가 작은 것부터 차례로 써 보시오.

$$\frac{3}{4}=\frac{\boxed{6}}{8}=\frac{\boxed{9}}{12}=\frac{\boxed{12}}{\boxed{16}}=\frac{\boxed{15}}{\boxed{20}}=\frac{\boxed{18}}{\boxed{24}}=\frac{\boxed{21}}{\boxed{28}}=\frac{\boxed{24}}{\boxed{32}}=\frac{\boxed{27}}{\boxed{36}}=\cdots\cdots$$

$$\frac{5}{6}=\frac{\boxed{10}}{12}=\frac{\boxed{15}}{18}=\frac{\boxed{20}}{\boxed{24}}=\frac{\boxed{25}}{\boxed{30}}=\frac{\boxed{30}}{\boxed{36}}=\frac{\boxed{35}}{\boxed{42}}=\frac{\boxed{40}}{\boxed{48}}=\frac{\boxed{45}}{\boxed{54}}=\cdots\cdots$$

● 위에서 분모가 같은 분수를 찾아 짝지어 보시오.

$$\left(\frac{9}{12}, \frac{\boxed{10}}{12}\right) \quad \left(\frac{\boxed{18}}{\boxed{24}}, \frac{\boxed{20}}{\boxed{24}}\right) \quad \left(\frac{\boxed{27}}{\boxed{36}}, \frac{\boxed{30}}{\boxed{36}}\right)$$

(초등학교 5학년, 두산동아, 2010)

이처럼 초등학교에서의 유리수의 연산 규칙 지도는 시각적 모델을 통하여 직관적으로 도입한 후 알고리즘화하여 일반화하고 있으며, 이를 중학교에서는 음수의 경우를 포함하게 형식적으로 확장하고 있다. 그러나 학생들의 인지발달 수준과 선수학습을 고려할 때 직관의 의한 지도에 의존할 수밖에 없다고 할지라도 이와 관련한 교사의 교수학적 내용지식은 이 수준에 그쳐서는 안 된다. 이런 관점에서, 유리수의 연산 규칙이 왜 그렇게 정의될 수밖에 없는지에 대한 학문적 접근과 교수학적 구성이 요구된다.

2. 연산자로서의 유리수 체계 구성의 이론적 배경[5)]

정수 체계로부터 함수를 정의하여 유리수를 구성할 수 있는 배경 이론을 먼저 고찰하자.

<정의 1> R을 환(ring), $(M, +)$을 가환군(abelian group)이라 하고, 연산이

$$M \times R \to M$$
$$(m, a) \mapsto ma$$

로 정의되고, 다음을 만족하면 M을 우 R-가군(右 R-加群; right R-module)이라 한다 :

① 모든 $m \in M$, a, $b \in R$에 대하여 $m(a+b) = ma + mb$이다.

5) 본 절은 김응태・박승안(2003)과 W. K. Nicholson(1999)을 참고하였다.

② 모든 $m \in M$, a, $b \in R$에 대하여 $m(ab) = (ma)b$이다.
③ 모든 m_1, $m_2 \in M$, $a \in R$에 대하여 $(m_1 + m_2)a = m_1 a + m_2 a$이다.
④ 모든 $m \in M$에 대하여 $m \cdot 1_R = m$이다.

<**정의** 2> R을 환(ring), $(M, +)$을 가환군, $m \in M$, $a \in R$이라 할 때, am이 M의 어떤 원소로 정의되고, 다음을 만족하면 M을 좌 $R-$가군(左 $R-$加群; left $R-$module)이라 한다 :

① 모든 $m \in M$, a, $b \in R$에 대하여 $(a+b)m = am + bm$이다.
② 모든 $m \in M$, a, $b \in R$에 대하여 $(ab)m = a(bm)$이다.
③ 모든 m_1, $m_2 \in M$, $a \in R$에 대하여 $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$이다.
④ 모든 $m \in M$에 대하여 $1_R \cdot m = m$이다.

따라서 가군(module)의 개념은 벡터공간(vector space) 개념의 일반화이다.

<**정의** 3> 환 R의 공집합이 아닌 부분집합 I가 다음을 만족하면, 우 아이디얼(right ideal)이라 한다 :

① $(I, +)$는 $(R, +)$의 부분군이다.
② 각각의 $a \in I$와 $r \in R$에 대하여 $ar \in I$이다.

<**정의** 4> 환 R의 공집합이 아닌 부분집합 I가 다음을 만족하면, 좌 아이디얼(left ideal)이라 한다 :

① $(I, +)$는 $(R, +)$의 부분군이다.
② 각각의 $a \in I$와 $r \in R$에 대하여 $ra \in I$이다.

<**정의** 5> 환 R의 공집합이 아닌 부분집합 I가 우 아이디얼이면서 좌 아이디얼일 때, I를 아이디얼이라 한다.

<**정리** 1> 만일 I가 R 위에서 우 아이디얼이면 I는 우 $R-$가군이고, 이 우 $R-$가군 I_R은 R_R의 부분가군(submodule)이다. 만일 I가 R 위에서 좌 아이디얼이면 I는 좌 $R-$가군이고, 이 좌 $R-$가군 ${}_R I$은 ${}_R R$의 부분가군이다.

<정의 6> M_R과 N_R을 우 $R-$가군이라 하자. 이 때, 함수 $f: M \to N$가 다음을 만족하면, 함수 f를 $R-$준동형사상($R-$homomorphism 또는 $R-$module homomorphism)이라 한다 :

① 모든 $x, y \in M$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$이다.
② 모든 $x \in M$와 $a \in R$에 대하여 $f(xa)=f(x)a$이다.

<정의 7> $_RM$과 $_RN$을 좌 $R-$가군이라 하자. 이 때, 함수 $h: M \to N$가 다음을 만족하면, 함수 h를 $R-$준동형사상($R-$homomorphism, 또는 $R-$module homomorphism)이라 한다 :

① 모든 $x, y \in M$에 대하여 $h(x+y)=h(x)+h(y)$이다.
② 모든 $x \in M$와 $a \in R$에 대하여 $h(ax)=ah(x)$이다.

<정리 2> M_R과 N_R을 우 $R-$가군이라 하고,

$$Hom(M_R,\ N_R)=\{f \mid f: M_R \to N_R\ ;\ R-\text{준동형사상}\}$$

이라 하자. 이 때 상등과 덧셈을

① $f \sim g \Leftrightarrow f(x)=g(x),\ \forall x \in M_R$
② $f+g: \ M_R \to M_R$
$\qquad\qquad x \mapsto f(x)+g(x)$

와 같이 정의하면, $Hom(M_R,\ N_R)$은 덧셈 아래에서 가환군이다.

<정리 3> $M_R=N_R$이라 하고 $Hom(M_R,\ M_R)$에 대하여

③ $f \circ g: \ x \mapsto f(g(x))$

라 정의하면, $(Hom(M_R,\ M_R),\ +,\ \circ)$은 환(ring)이다. 이 환을 M_R의 자기준동형환(endomorphism ring)이라 하며, $Hom(M_R,\ N_R)$의 원소를 M의 $R-$자기준동형사상($R-$endomorphism)이라 한다.

<정리 4> R을 체(field), M을 n차원 벡터공간이라 하면, 다음이 성립한다 :

$$(Hom(M_R,\ M_R),\ +,\ \circ) \cong (Mat_n(R),\ +,\ \cdot)$$

3. 유리수 집합의 구성

유리수의 연산 규칙은 연산자로서의 유리수의 의미에서 구명(究明)할 수 있다. 본 절에서는 정수 집합에서 유리수의 집합을 구성하고, 여기에 연산 구조를 주어 유리수 체계를 형성하는 과정을 교수학적으로 조직화한다. 이 과정에서 유리수의 연산 규칙이 그렇게 정의될 수밖에 없는 필연성과 당위성을 경험할 수 있다.

먼저, 유리수 집합을 구성하도록 하자. 정수의 집합 $\mathbb{Z}$의 아이디얼은 모두 $n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{Z})$ 꼴이다. $n\mathbb{Z} = I_{\mathbb{Z}}$라 두자. 그러면

$$Hom(I_{\mathbb{Z}},\ \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}) = \{f \mid f : I_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}\ ;\ R-\text{준동형사상}\}$$

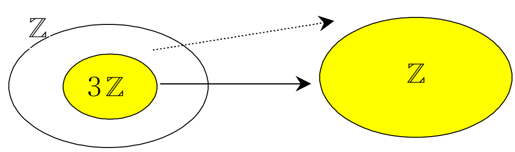
을 생각할 수 있다. 우선, $I_{\mathbb{Z}} = 3\mathbb{Z}$와 $Hom(3\mathbb{Z}_{Z},\ \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})$의 원소 f를 생각하자. 그러면 f는

$$\begin{aligned} f : 3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 3x &\mapsto x \end{aligned}$$

또는 정해진 정수 k에 대하여

$$\begin{aligned} f_1 : 3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ 3x &\mapsto kx \end{aligned}$$

로, k에 의해 여러 함수들을 생각할 수 있다. 이것을 도식화하면 다음과 같다 :



<그림 2-1>

이것을 보면 $3\mathbb{Z}$의 원소가 $\mathbb{Z}$의 원소에 대응하고 있다. 그런데 f의 규칙성을 그대로 $\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$ 부분에 적용하면 $\mathbb{Z}$의 범위를 벗어나게 된다. 따라서 정의역 $\mathbb{Z}$의 모든 정수에 규칙을 적용시키려는 사고 활동은 정수보다 확장된, 그러면서도

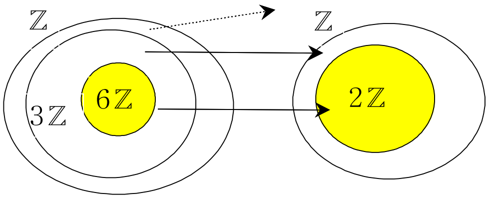
정수를 보존하는 새로운 수 체계가 필요함을 인식하게 한다. f의 규칙은 $3\mathbb{Z}$의 원소를 $\frac{1}{3}$만큼 축소시켜 $\mathbb{Z}$의 원소에 대응시키는 것이다. 이처럼 규칙성을 수치화한 것을 'f의 속성'이라 하자.

이제 $\mathbb{Z}$의 나머지 원소들에 대해서도 이러한 규칙을 적용하자. 즉, $\mathbb{Z}$에서 $\mathbb{Z}$로의 확장된 집합으로 f의 속성을 확장한 함수 $\overline{f}$를 정의하자. 예를 들어, 함수 $\overline{f}$는 $1 \in \mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}$도 $\frac{1}{3}$만큼 축소시키는 것으로 정의한다. 그러면 이러한 형태를 포함하는 수 체계는 어떤 것일까?

또 다른 예를 생각해 보자. $I_{\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$와 $h \in Hom(6\mathbb{Z}_Z, \mathbb{Z}_Z)$에 대하여

$$\begin{aligned} h : 6\mathbb{Z} &\to 2\mathbb{Z} \\ 6x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

이고, 이것을 도식화하면 다음과 같다 :



<그림 2-2>

이것을 보면 $6\mathbb{Z}$의 원소가 $2\mathbb{Z}$의 원소에 대응하고 있다. 마찬가지로 h의 규칙성을 정수 전체를 정의역으로 하기 위해서는 새로운 수 체계가 필요해진다. 이때 h의 규칙성은 $6\mathbb{Z}$의 원소를 $\frac{1}{3}$만큼 축소시켜 $2\mathbb{Z}$의 원소에 대응시키는 것이다. 따라서 f와 h는 $\frac{1}{3}$만큼 축소시킨다는 같은 속성을 가지고 있지만, 정의역의 범위는 다르다. 또한 $3\mathbb{Z} \cap 6\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$에서는 f와 h가 같은 결과를 가지며, f와 h는 $\mathbb{Z}-$가군 준동형사상이 된다. 이것을 위의 예 f를 가지고 증명해 보이도록 하자.

① $3x_1,\ 3x_2 \in 3\mathbb{Z}$일 때,

$$f(3x_1+3x_2)=f(3(x_1+x_2))=x_1+x_2=f(3x_1)+f(3x_2)$$

② $n\in\mathbb{Z}$ 일 때,

$$f((3x)n)=f(\underbrace{3x+3x+\cdots+3x}_{n\text{개}})=\underbrace{f(3x)+f(3x)+\cdots+f(3x)}_{n\text{개}}$$

$$=\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n\text{개}}=xn=f(3x)n$$

이제 이러한 집합들의 합집합 $\cup Hom(I_{\mathbb{Z}},\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})$를 생각해보자.[6)] 이 집합에서 상등은 다음과 같이 정의한다 : $f:n\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}$, $h:m\mathbb{Z}\mapsto\mathbb{Z}$일 때,

$$f\sim h\Leftrightarrow f(x)=h(x)\quad\forall x\in n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}$$

이다. 즉, $f|_{n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}}=h|_{n\mathbb{Z}\cap m\mathbb{Z}}$이다. 만일 $f:6\mathbb{Z}\mapsto 3\mathbb{Z}$, $h:4\mathbb{Z}\mapsto 2\mathbb{Z}$라 하면,

$$f\sim h\Leftrightarrow f(x)=h(x)\quad\forall x\in 12\mathbb{Z}$$

이다. 그러나 이것은 상등을 의미하는 기호적 표현일 뿐, 계산을 위한 것이 아니다. 이처럼 대수적 기호 또는 표현은 산술로 환원하여 계산 규칙을 밝혀야 한다. 따라서 위의 함수를 다음과 같이 정의함으로써 상등의 의미를 산술화 하자. $f=\frac{a}{b}$, $f_1=\frac{a_1}{b_1}$라 하자. 즉,

$$f=\frac{a}{b}:b\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\qquad\qquad f_1=\frac{a_1}{b_1}:b_1\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$
$$bx\mapsto ax\qquad\qquad\qquad b_1y\mapsto a_1y$$

6) 임의의 집합에 대해 언제나 disjoint union이 되게 구성할 수 있으며, 이 집합에 대한 다음 논의의 이론적 배경 및 존재성은 direct limit와 inverse limit에 의해 보장된다. 예를 들어, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$에서 분모를 6으로 맞추는 것이 direct limit의 개념이다. 본 내용은 학부과정을 넘어서므로 여기서는 집합의 포함관계를 이용한 직관적 수준에서 다루기로 한다.

이다. 그러면 정의역 $bb_1\mathbb{Z}$ 에서는

$$f : bb_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad\qquad f_1 : bb_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$bb_1x \mapsto ab_1x \qquad\qquad bb_1x \mapsto ba_1x$$

이다. 따라서

$$f = f_1 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \Leftrightarrow ab_1 = ba_1$$

이다. 이것은 비례식 $a : b = a_1 : b_1$을 의미한다. 그러므로 함수 f, f_1의 상등은 다음과 같이 정의할 수 있다.

<정의 1> $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ d \neq 0$일 때, $a : b$를 $\frac{a}{b}$로, $c : d$를 $\frac{c}{d}$로 나타내면,

$$a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Leftrightarrow ad = bc$$

이다.

그러면 $\uplus Hom(I_{\mathbb{Z}},\ \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})$의 f, h에 대한 규칙성을 정수 정의역으로 확장한 경우, 예를 들어, $\overline{f} = \frac{3}{6}$, $\overline{h} = \frac{2}{4}$는 상등의 정의에 의해 각각의 정의역의 교집합에 대해 같은 동치류의 원소가 된다. 다시 말해, $\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \cdots\right\}$이고, $\frac{1}{2}$과 $\frac{2}{4}$는 정의역이 $4\mathbb{Z}$일 경우에 같고, $\frac{2}{4}$와 $\frac{3}{6}$은 정의역이 $12\mathbb{Z}$일 경우에 같다. 그러므로 $\left[\frac{a}{b}\right]$는 scale을 조정해 주는 모든 함수[7]를 의미한다. 이러한 $\overline{f}$인 $\left[\frac{a}{b}\right]$의 집합들을 유리수라 정의한다. 그러므로 동치류의 집합 $\uplus Hom(n\mathbb{Z},\ \mathbb{Z})/\sim$는 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$이다. 즉,

7) 집합의 크기를 줄이거나 늘리는 규칙을 속성이라 하며, 이 속성을 수치화한 것이 함수이다.

$$\mathbb{Q} = \{\overline{f} \mid \overline{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f : n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\} = \{[f] \mid f \in \cup Hom(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})\}$$

이다. 그리고 함수 f를

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto nx \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

와 같이 정의하면, 정수의 집합은 유리수의 집합에 포함된다.

지금까지 정수 체계 $\mathbb{Z}$로부터 함수를 정의하고, 이 함수들의 모임으로 유리수의 집합을 정의하고, 이 집합이 정수의 집합을 포함함을 보였다.

이제 이 집합에 연산을 주어 수 체계가 되도록 구성해 보자. 수 체계를 구성한다는 것은 방정식을 풀 수 있는 체계를 준다는 것을 의미한다.

4. 유리수 체계의 구성

먼저 이 집합에 연산을 다음과 같이 주도록 하자 :

$[f], [g] \in \cup Hom(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})/\sim$에 대하여[8)]

$$[f] + [g] = [f + g|_{n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}}] \qquad [f] \cdot [g] = [f \circ g|_{g^{-1}(domain\, f)}]$$

로 정의하자. 이러한 정의가 연산이 되려면 '닫혀 있다'는 성질과 '등식의 성질'이 만족되어야 한다.[9)] '닫혀 있다'는 조건이 만족하도록 유리수의 집합이 구성되었으므로, '등식의 성질'을 만족하는 것만 보이면 충분하다. 함수

$$f = \frac{a}{b} : b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad f_1 = \frac{a_1}{b_1} : b_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$bx \mapsto ax \qquad b_1x \mapsto a_1x$$
$$g = \frac{c}{d} : d\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad g_1 = \frac{c_1}{d_1} : d_1\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$
$$dy \mapsto cy \qquad d_1y \mapsto c_1y$$

8) 함수 $\overline{f} = [f]$, $\overline{g} = [g]$이다.
9) 자세한 내용은 김부윤 · 정영우 · 박영식(2010) 참고.

에서 $f=f_1$, $g=g_1$이면, $f+g=f_1+g_1$과 $f \cdot g=f_1 \cdot g_1$이 성립함을 보이면 된다. 상등의 정의에 의하여 $f=f_1$, $g=g_1$라는 것은 다음과 같다 :

$$\begin{aligned} f : bb_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bb_1x &\mapsto ab_1x \\ g : dd_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ dd_1y &\mapsto cd_1y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_1 : bb_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bb_1x &\mapsto ba_1x \\ g_1 : dd_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ dd_1y &\mapsto dc_1y \end{aligned}$$

에서 $ab_1=ba_1$이고 $cd_1=dc_1$이다. 그러면

①
$$\begin{aligned} f+g : bd\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bdx &\mapsto adx \\ bdx &\mapsto bcx \\ bdx &\mapsto (ad+bc)x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_1+g_1 : b_1d_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ b_1d_1x &\mapsto a_1d_1x \\ b_1d_1x &\mapsto b_1c_1x \\ b_1d_1x &\mapsto (a_1d_1+b_1c_1)x \end{aligned}$$

이다. 이제 $f+g$를 정의역 $bdb_1d_1\mathbb{Z}$에서 생각하자. 그러면

$$\begin{aligned} f+g : bdb_1d_1\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bdb_1d_1x &\mapsto b_1d_1(ad+bc)x \end{aligned}$$

이고,

$$b_1d_1(ad+bc)x=(b_1d_1ad+b_1d_1bc)x=(bd_1a_1d+b_1dbc_1)x = bd(d_1a_1+b_1c_1)x$$

이다. 이것은 f_1+g_1을 정의역 $bdb_1d_1\mathbb{Z}$에서 생각하는 것과 같은 결과를 가진다. 따라서 $f+g=f_1+g_1$이며, 덧셈에 대하여 등식의 성질이 성립한다. 그러므로 덧셈은 연산이다.

② 이제 곱셈에 대해 생각해 보자.

$f \cdot g=f \circ g|_{bd\mathbb{Z}}$이므로

$$f \circ g : bd\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$$

$$\cup$$

$$\begin{aligned} b\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bdx &\mapsto bcx \mapsto acx \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$f \cdot g : bdb_1d_1x \mapsto bcb_1d_1x \mapsto acb_1d_1x$$

이고, $acb_1d_1x = ba_1dc_1x$ 이며

$$f_1 \cdot g_1 : bdb_1d_1x \mapsto bdb_1c_1x \mapsto bda_1c_1x$$

이므로 $f \cdot g = f_1 \cdot g_1$ 이다. 따라서 곱셈에 대하여 등식의 성질이 성립하므로 곱셈은 연산이다. 나아가 다음과 같은 덧셈과 곱셈의 계산 규칙을 얻는다 :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

이것은 유리수의 덧셈과 곱셈의 계산 규칙이 처음부터 그렇게 주어진 것이 아니라, 구조의 보존이라는 명백한 목적과 엄밀한 수학적 조작을 통해 그렇게 형식화될 수밖에 없었음을 보여주고 있다

다음으로 수 체계를 결정하기 위하여 덧셈과 곱셈이 어떤 연산의 성질을 만족하는지 확인하여야 한다[10]. 먼저 f, g, h 를

$$f = \frac{a}{b} : \begin{aligned} b\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bx &\mapsto ax \end{aligned} \qquad g = \frac{c}{d} : \begin{aligned} d\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ dx &\mapsto cx \end{aligned} \qquad h = \frac{m}{n} : \begin{aligned} n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ nx &\mapsto mx \end{aligned}$$

라 하자. 앞에서 정의한 연산은 이항연산인데, 이를 세 개 이상의 원소 사이에서도 보장받기 위하여 결합법칙이 성립하여야 한다. 그러므로 대수적 구조로 연산이 주어질 때, 덧셈과 곱셈에 대한 결합법칙이 성립하느냐 그렇지 않느냐하는 것은 매우 중요하다.

<결합법칙> ① $(f+g)+h = f+(g+h)$ 임을 보이자. $f+g$ 는 f 와 g 의 공통 정의역인 $b\mathbb{Z} \cap d\mathbb{Z}$ 에 대하여

10) 배경적 내용은 정영우 · 김부윤 · 표성수(2011) 참고.

$$f+g : bdx \mapsto (ad+bc)x$$

이고,

$$h : ny \mapsto my$$

이므로 공통 정의역 $(b\mathbb{Z} \cap d\mathbb{Z}) \cap n\mathbb{Z}$ 에 대하여

$$\begin{aligned}(f+g)+h : bdn\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ bdnx &\mapsto ((ad+bc)n+bdm)x\end{aligned}$$

이다. 그리고

$$f : bx \mapsto ax$$

이고, 공통 정의역 $d\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ 에 대하여

$$g+h : dny \mapsto (cn+dm)y$$

이므로 공통 정의역 $b\mathbb{Z} \cap (d\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z})$에 대하여

$$f+(g+h) : bdnx \mapsto (adn+b(cn+dm))x$$

이다. 그러므로 $(f+g)+h = f+(g+h)$이다.

② $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$임을 보이자. 공통 정의역인 $b\mathbb{Z} \cap d\mathbb{Z}$ 에 대하여

$$f \cdot g : bdx \mapsto bcx \mapsto acx$$

이고

$$h : ny \mapsto my$$

이므로 공통 정의역 $(b\mathbb{Z} \cap d\mathbb{Z}) \cap n\mathbb{Z}$ 에 대하여

$$(f \cdot g) \cdot h : bdnx \mapsto bdmx \mapsto acmx$$

이다. 그리고

$$f : bx \mapsto ax$$

이고, 공통 정의역 $d\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ 에 대하여

$$g \cdot h : dny \mapsto dmy \mapsto cmy$$

이므로 공통 정의역 $b\mathbb{Z} \cap (d\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z})$에 대하여

$$f \cdot (g \cdot h) : bdnx \mapsto bcmx \mapsto acmx$$

이다. 그러므로 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$이다.

이처럼 덧셈과 곱셈에 대해 결합법칙이 성립하고 나면, 이 연산들에 대한 항등원을 생각하게 된다. 즉, 연산 결과가 자기 자신이 되게 하는 원소를 생각하는 것이다. 일반적으로 체(field)에 관한 논의에 앞서 환(ring)에 대한 것이 먼저 다루어져야 하므로 항등원이 먼저 논의된다. 단, 환에는 항등원이 포함되는 경우와 포함되지 않는 경우가 있다.

<항등원> ① 덧셈에 대한 항등원은 다음과 같이 정의한다 :

$$\begin{aligned} f : n\mathbb{Z} &\mapsto \mathbb{Z} \\ nx &\mapsto 0 (\in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

즉, $[f] = [0] = \left\{ \frac{0}{n} | n \in \mathbb{Z} \right\}$로 정의한다. 그러면 임의의 $\left[\frac{a}{b}\right]$에 대하여

$$\left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{0}{n}\right] = \left[\frac{a}{b} + \frac{0}{n}\right] = \left[\frac{an + b \times 0}{bn}\right] = \left[\frac{an}{bn}\right] = \left[\frac{a}{b}\right]$$

$$\left[\frac{0}{n}\right]+\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{0}{n}+\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{0\times b+na}{nb}\right]=\left[\frac{na}{nb}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]$$

이다.

② 곱셈에 대한 항등원은 다음과 같이 정의한다 :

$$\begin{aligned} f : n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ nx &\mapsto nx \end{aligned}$$

즉, $[f]=[1]=\left\{\frac{n}{n}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$로 정의한다. 그러면 임의의 $\left[\frac{a}{b}\right]$에 대하여

$$\left[\frac{a}{b}\right]\cdot\left[\frac{n}{n}\right]=\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}\right]=\left[\frac{an}{bn}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]$$

$$\left[\frac{n}{n}\right]\cdot\left[\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{a}{b}\right]=\left[\frac{na}{nb}\right]=\left[\frac{a}{b}\right]$$

이다.

이제 두 연산에 대한 분배법칙이 성립하여야 하는데, 이 때, 좌 분배법칙과 우 분배법칙이 각각 다루어져야 한다.[11)] 분배법칙은 식의 조작을 원활하게 할 수 있도록 보장해 주는 법칙인데, 결합법칙과 분배법칙이 성립하면 방정식을 보다 수월하게 다룰 수 있게 된다.

<분배법칙> ① $(f+g)\cdot h=f\cdot h+g\cdot h$임을 보이자. 공통 정의역인 $b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z}$에 대하여

$$f+g : bdx \mapsto (ad+bc)x$$

이고,

$$h : ny \mapsto my$$

11) 관련 내용은 김부윤・정영우(2010a) 참고.

이므로 공통 정의역 $(b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z})\cap n\mathbb{Z}$에 대하여

$$(f+g)\cdot h : bdnx \mapsto bdmx \mapsto (ad+bc)mx$$

이다. 그리고 공통 정의역 $b\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}$와 $d\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}$에 대하여

$$f\cdot h : bnx \mapsto bmx \mapsto amx \qquad\qquad g\cdot h : dnx \mapsto dmx \mapsto cmx$$

이고, 정의역 $(b\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z})\cap(d\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z})$에 대하여

$$(f\cdot h)+(g\cdot h) : bdnx \mapsto admx+bcmx$$

이다. 그러므로 우 분배법칙이 성립한다.

② $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$임을 보이자.

$$f : bx \mapsto ax$$

이고, 공통 정의역인 $d\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}$에 대하여

$$g+h : dnx \mapsto (cn+dm)x$$

이므로 공통 정의역 $n\mathbb{Z}\cap(b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z})$에 대하여

$$f\cdot(g+h) : bdnx \mapsto b(cn+dm)x \mapsto a(cn+dm)x$$

이다. 그리고 공통 정의역 $b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z}$와 $b\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z}$에 대하여

$$f\cdot g : bdx \mapsto bcx \mapsto acx \qquad\qquad f\cdot h : bnx \mapsto bmx \mapsto amx$$

이고, 정의역 $(b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z})\cap(b\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z})$에 대하여

$$(f\cdot g)+(f\cdot h) : bdnx \mapsto acnx+admx$$

이다. 그러므로 좌 분배법칙이 성립한다.

분배법칙이 보장되고 나면, 부가적으로 좌 분배법칙과 우 분배법칙의 결과가 같아지도록 하는 교환법칙의 성립 여부를 논하게 된다. 그것은 대수학에서의 큰 주제 중 하나인 방정식을 풀기 위해 인수분해 가능성을 다룰 때, 교환법칙이 성립하면 계산의 편리성을 보장받을 수 있기 때문이다[12].

<교환법칙> ① $f+g=g+f$임을 보이자. $f+g$는 f와 g의 공통 정의역인 $b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z}$에 대하여

$$f: bdx \mapsto adx \qquad\qquad g: bdx \mapsto bcx$$

이므로

$$f+g: bdx \mapsto (ad+bc)x$$

이다. 한편 a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$이므로 교환법칙 $ad+bc=bc+ad$가 성립하므로, $f+g$와 $g+f: bdx \mapsto (bc+ad)x$는 같은 결과를 가진다. 즉, $f+g=g+f$가 성립한다.

② $f \cdot g = g \cdot f$임을 보이자. $f \cdot g$는 공통 정의역인 $b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z}$에 대하여

$$f: bdx \mapsto adx \qquad\qquad g: bdx \mapsto bcx$$

이므로

$$f \cdot g = f \circ g|_{b\mathbb{Z}\cap d\mathbb{Z}}: bdx \mapsto bcx \mapsto acx$$

$$g \cdot f = g \circ f|_{d\mathbb{Z}\cap b\mathbb{Z}}: bdx \mapsto adx \mapsto acx$$

가 되어 $f \cdot g = g \cdot f$가 성립한다.

이처럼 $\cup Hom(n\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$는 덧셈과 곱셈이 등식의 성질에 의해 연산으로 정의되고, 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙이 성립한다. 이제 덧셈과 곱셈에 대한 항등원과 역원이 존재하면 방정식을 효율적으로 풀 수 있다[13].

---

12) 자세한 내용은 정영우 · 김부윤 · 표성수(2011) 참고.
13) 자세한 내용은 정영우 · 김부윤 · 표성수(2011) 참고.

<역원> 역원을 생각하는 과정에서 뺄셈과 나눗셈이 정의되게 된다. 뺄셈은 정수 $\mathbb{Z}$가 1과 -1에 의해 생성되는 순환군(cyclic group)이므로 덧셈과 같이 정의할 수 있으며, 나눗셈은 곱셈의 역인 함수로 정의할 수 있다. 즉, 뺄셈과 나눗셈은

$$f-g=f+(-g),\ f\div g=f\cdot g^{-1}$$

로 정의할 수 있다. 이것은 만일

$$\begin{aligned} f: n\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ nx &\mapsto mx \end{aligned}$$

일 때, $-f$를

$$-f: nx \mapsto (-mx)$$

라 하면, $f+(-f): nx \mapsto (m-m)x$이므로 $f+(-f)=0=(-f)+f$임을 의미한다. 이 때, $-f$를 덧셈에 대한 f의 역원이라 한다. 또한 f^{-1}를

$$\begin{aligned} f^{-1}: m\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ my &\mapsto ny \end{aligned}$$

라 하면,

$$f\cdot f^{-1}: mnx \mapsto nnx \mapsto nmx$$

이므로 $f\cdot f^{-1}=[1]=f^{-1}\cdot f$이다. 이 때, f^{-1}를 곱셈에 대한 f의 역원이라 한다.

그러므로 유리수의 집합은 덧셈과 곱셈 아래에서 체를 이룬다. 다시 말해, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$는 체이다[14].

Ⅲ. 결론

14) 구조 보존에 의한 연산 규칙의 정의는 김부윤·정영우·황종철·김소영(2010)의 대칭차집합과 정영우·김부윤·황종철·김소영(2011)의 행렬연산에서도 찾아볼 수 있다.

유리수의 개념은 전체에 대한 부분의 관계를 나타내는 ‘등분할된 부분과 전체’, 분배 상황에서의 ‘분배 결과의 몫’, 비례 개념으로부터 정의되는 ‘비율’ 그리고 곱셈의 ‘연산자’ 등이 있다. 앞의 두 개념은 주로 초등학교에서 다루어지며, ‘비율’은 중등학교에서 다루어진다. 그러나 ‘연산자’로서의 유리수의 개념은 중등학교에서 강조되지는 않지만, 유리수의 사칙계산의 원리를 가장 잘 이해할 수 있는 소재이다.

‘연산자’로서의 유리수 개념은 유리수를 함수 관계로 이해하는 것으로 극도로 형식화된 현대수학의 관점을 나타내지만, 한편으로는 수학적 개념의 조작적인 본질을 함의하고 있는 것이기도 하다.[15] 여기서 ‘조작적인 본질’이란 만들어내는 과정을 경험할 수 있다는 것으로, 이를 통해서 왜 수학적 개념이 그렇게 만들어졌는지를 발생적 관점에서 이해할 수 있다. 현행 학교수학에서는 직관에 기초하여 계산 알고리즘을 강조하고 있을 뿐, 유리수 개념의 구성은 제시되지 않고 있다. 그러나 이러한 발생적 관점에서 조작적 본질을 다루는 것은 연산과 수 집합의 구조를 이해하는데 있어 중요한 요소이다. 따라서 연산을 ‘부여되는 단순한 계산 규칙’이 아니라, ‘구조를 다루려는 목적성을 가지는 형식적 조작’이라는 것을 이해시키는 것이 ‘수와 연산’ 영역의 또 하나의 지도 목표이어야 한다.

‘비율’로서의 유리수 개념은 통약가능이라는 유리수의 역사 발생적 본질[16]을 잘 나타내며, 이것은 비의 개념이기도 하다. 이러한 비 개념은 비례적으로 연결되어 있는 양을 인식하고, 그 양 사이의 관계나 양에 대한 방정식, 함수, 그리고 그래프 등을 다루는 것과 관계된다.[17] 반면 ‘연산자’로서의 유리수 개념은 연산의 정당화와 체 구조를 잘 유도할 수 있으므로 수 체계를 발생적·구조적 관점에서 다룰 때 적당하며, 방정식과 함수 등을 다룰 때 조작의 기초가 된다.

연산자로서의 유리수를 지도하기 위해서는 함수, 합성함수, 역함수 등이 먼저 학습되어야 한다. 그러나 현행 고등학교 수학과 교육과정에서는 실수 체계가 먼저 지도되고, 함수의 합성과 역함수가 뒤에 지도되고 있으므로 정규 교육과정에서 이를 지도하기는 어려운 상황이다. 하지만 수준별 수업이나 심화학습의 소재로 이러한 수학적 구성 활동을 다룰 수는 있다.

또한 이 내용은 중학교에서 유리수의 연산을 다룰 때, 함수라는 개념을 언급하지 않고, 연산 규칙의 발견에 초점을 맞추어 ‘규칙성’ 또는 ‘속성’이라는 용어로 바꾸어 지도할 수도 있다. 초등학교에서 제한된 개념에 의해 지도된 연산에 관한 내용은, 중학교에서 유리수의 연산을 지도할 때 다양한 유리수의 개념을 함의할

15) 김남희 외(2007), p.26.
16) 관련 내용은 김부윤·정영우(2008) 참고.
17) 류희찬 외(2007), p.258.

수 있는 방법으로 재구성하여 지도할 필요가 있다. 그리고 연산 규칙은 주어지는 것이 아니라 구성하는 것이라는 사실에 대한 이해가 필요하다. 물론 이 때 함수의 합성 역시 도식을 이용하여 변환 규칙으로 교수학적 변환을 할 수 있다. 이러한 지도의 목적은 엄밀한 수학을 가르치자는 것이 아니라, 그렇게 암기하도록 강요받았던 연산 규칙이 왜 그런 형태로 정해질 수밖에 없었는지를 이해하게 하자는데 있다. 즉, 연산의 본질인 대수적 구조를 만드는 것과 관련하여, 연산이 목적을 가지고 필연적으로 만들어진 산물임을 인식시키자는 것이다.

그러나 직접적인 수업 활동과 관련짓지 않더라도 교사들은 가르칠 지식에 대한 전문적 이해를 가지고 있어야 한다. 교수·학습 상황에서는 가르칠 지식으로의 교수학적 변환이 중요하지만, 그러한 가르칠 지식의 학문적 내용에 대한 깊은 이해 없이는 지도 목적에 맞는 적절한 교수학적 변환은 어려우며, 특히 교육과정 내용의 연결성 및 정당성을 맥락화 하는데 어려움을 겪을 수밖에 없다. NCTM(2007)의 주어진 넓이에 어떤 수를 곱함으로써 넓이가 늘어나거나 줄어드는 것을 경험하게 하는 내용이나, 김남희 외(2007)의 연산자로서의 유리수에 관한 설명은 이러한 조작적 본질을 직관적으로 경험하게 하는 것으로, 결과적인 ‘조작’의 의미를 교수학적으로 변환한 것에 지나지 않는다.

본 연구에서는 이러한 조작적 본질을 경험할 수 있도록 연산자로서의 유리수 개념을 정의하고, 연산을 주어 유리수 체계를 구성하였는데, 이러한 활동을 통하여 ‘상등’, ‘덧셈’, ‘곱셈’이 왜 그런 계산 규칙으로 정의되어지는지에 대한 목적성과 필연성이 명확하게 드러난다. 또한 이 과정에서 방정식과 관련하여 대수적 구조의 중요성이 드러나기도 하므로 수학 내적 연결성에 대한 이해도 얻을 수 있다.

연산자로서의 유리수의 구성은 ① 함수로서의 유리수 집합의 구성, ② 상등과 덧셈 그리고 곱셈의 계산 원리 유도, ③ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙의 성립 등이 가지는 의의를 담고 있다. 즉, 정수 체계로부터 유리수의 집합을 구성하고, 이 집합에서 상등과 연산을 정의함으로써 수 체계를 형성하고, 이 수 체계에서 방정식을 풀 수 있도록 연산의 성질을 구축함으로써 유리수의 대수적 체계를 완성하였다. 이 과정에서 각 단계의 목적에 맞게 유리수의 집합, 상등, 연산 규칙이 정의되었으며, 연산의 성질들이 증명되었다. 이로써 유리수의 집합이 체의 공리를 만족하도록 형식화되었다.

연산자로서 유리수 체계를 구성하는 것의 장점은 유리수의 상등, 연산의 계산 규칙 등의 조작적 본질을 다루는 활동을 함으로써 수학하기(doing Mathematics)를 경험할 수 있다는데 있다. 즉, 발생적 맥락에서 조작적 본질을 잘 경험하게 해 준다.

이처럼 수학적 개념은 목적을 가진 활동에 의해 추출되고 형식화되며, 자연스

러운 사고 흐름 속에 구성된다. 이러한 구성은 예비교사들이 대학수학에서 학습한 내용을 교수・학습 상황으로 맥락화 할 때, 중등학교에서 지도되는 개념들 사이의 관계를 밝히고, 수학적 개념들이 그러한 형태로 형식화되고 정의될 수밖에 없다는 것을 정당화시켜 준다. 이는 교사들의 가르칠 지식에 대한 깊은 이해를 돕는 한편, 교수 활동을 계획하는데 있어 지도 모델의 기초를 제공한다.

본 연구는 연산 규칙의 당위성을 주기 위한 유리수 체계 구성의 이론적 모델을 구성하여 교사의 교과전문성을 높이는데 초점을 두었는데, 중등학교 학생들의 심화학습 프로그램이나 영재교육 프로그램으로 개발하여 그 효과성을 확인하는 후속연구가 필요할 것으로 생각된다.

참고문헌

[1] 교육과학기술부(2008a), 고등학교 교육과정 해설 5-수학, (주)미래엔 컬쳐그룹.
[2] 교육과학기술부(2008b), 중학교 교육과정 해설 Ⅲ, 대한교과서 주식회사.
[3] 교육과학기술부(2008c), 초등학교 교육과정 해설 Ⅳ, 교육과학기술부.
[4] 교육과학기술부(2010), 초등학교 수학 e-교과서, 두산동아.
[5] 김남희・나귀수・박경미・이경화・정영옥・홍진곤(2007), 수학교육과정과 교재연구, 경문사.
[6] 김부윤・정영우(2008), 중학교에서의 무리수 지도에 관하여, 한국수학사학회지, 제21권 제1호, 139-156.
[7] 김부윤・정영우(2010a), 함수의 합성 ∘ 이 가지는 의미에 관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제49권 제2호, 161-174.
[8] 김부윤・정영우(2010b), Byproduct mathematization에 관한 연구, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 제20권 제2호, 145-161.
[9] 김부윤・정영우・박영식(2010), 연산의 관점에서 본 등식의 성질에 관한 고찰, EAMJ, 제26권 제2호, 179-190.
[10] 김부윤・정영우・황종철・김소영(2010), 대칭차집합이 가지는 중요성에 관한 고찰, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 제49권 제4호, 489-500.
[11] 김수환・박성택・신준식・이대현・이의원・이종영・임문규・정은실(2010), 초등학교 수학과 교재연구, 동명사.
[12] 김응태・박승안(2003), 현대대수학, 경문사.
[13] 류희찬・조완영・이경화・나귀수・김남균・방정숙 옮김(2007), 학교수학을 위한 원리와 규준, 경문사.
[14] 우정호 외(2008), 중학교 수학 1, (주)두산.

[15] 정영우 · 김부윤 · 표성수(2011), 수학적 연결성을 고려한 수 체계의 지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 제25권 제2호, 473-495.

[16] 정영우 · 김부윤 · 황종철 · 김소영(2011), 행렬의 연산을 통해 본 일대일 대응의 의미에 관한 고찰. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 제13권 제3호, 405-422.

[17] W. K. Nicholson(1999), *Introduction to Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Inc.

Chung Young Woo
Pusan National University
Pusan 609-735
E-mail address: nahime1130@hanmail.net

Kim Boo Yoon
Pusan National University
Pusan 609-735
E-mail address: kimby@pusan.ac.kr