

## 구속조건 힘 설계기법을 이용한 강체와 스트링의 위상 최적설계<sup>§</sup>

허재청\* · 윤길호\*\*

\* 한양대학교 기계공학과

### Topology Design of Rigid-String Mechanism Using Constraint Force Design Method

Jae Chung Heo\* and Gil Ho Yoon\*\*

\* Dept. of Mechanical Engineering, Hanyang Univ.

(Received December 19, 2011; Revised April 10, 2012; Accepted April 17, 2012)

**Key Words:** Topology Optimization(위상 최적화), Rigid-Body Mechanism(강체 메커니즘), Constraint Force Design Method(구속 힘 설계기법)

**초록:** 이 논문에서는 강체 메커니즘의 위상 최적설계를 위해 제안된 구속조건 힘 설계 기법(constraint force design method)을 확장하여 로프-링크(string-link)를 고려한 위상 최적설계기법을 제안한다. 기존의 메커니즘 설계이론을 이용하여 메커니즘을 구성하는 강체 링크의 길이와 조인트의 위치를 최적설계하는 것은 가능하다. 하지만 강체 메커니즘의 최적 위상을 설계하는 것은 어렵다는 것으로 알려져 있다. 강체 메커니즘의 최적 위상을 설계할 수 있는 기법인 구속조건 힘 설계 기법이 본 연구자들에 의해 제안되었다. 구속조건 힘 설계 기법은 이진수 설계 변수를 이용하여 강체 링크의 위상 최적설계를 가능하게 한다. 이번 연구에서는 강체 링크뿐만 아니라 로프-링크로 구성된 메커니즘을 위상 최적설계하기 위한 발전된 해석기법과 설계 기법을 제안한다.

**Abstract:** This study extends the constraint force design method allowing topology optimization for planar rigid-link and string mechanisms. To our best knowledge, by applying conventional machine and mechanism design theories, it is likely that it is possible to find out optimal locations of joints and lengths of rigid-links but somewhat difficult to find out optimal topology of rigid-links. To achieve optimal topology of rigid links, there is our previous contribution so called the new constraint force design method with the binary design variables determining the existence of the auxiliary forces imposing apparent lengths among unit masses. By adding new binary design variables, this research extends the constraint force design method to find out optimal mechanism consisting of stringy links as well as rigid links that seems impossible in the conventional machine and mechanism design theories.

- 기호설명 -

$L$	: 라그랑지안(Lagrangian)	$\mathbf{g}_i$	: 길이 제한 조건에 의해 발생하는 구속 힘 (constraint force)
$m_i$	: $i$ 번째 mass 의 질량	$\tilde{\mathbf{r}}_i$	: 구속 조건이 가해지기 전 $i$ 번째 mass 의 위치벡터
$\mathbf{r}_i$	: $i$ 번째 mass 위치벡터	$\tilde{\tilde{\mathbf{r}}}_i$	: 구속 조건이 가해진 후 $i$ 번째 mass 의 위치벡터
$d_{ij}$	: $i$ 와 $j$ 번째 mass 사이의 구속거리(Length Constraint)	$\sigma_k$	: $k$ 번째 링크의 제한 조건
$\lambda_k$	: 라그랑지 계수	$U(\mathbf{r}_i)$	: 포텐셜 에너지
$\mathbf{f}_i$	: 외력		

§ 이 논문은 대한기계학회 2011년도 추계학술대회(2011.

11. 2.-4., EXCO) 발표논문임

† Corresponding Author, ghy@hanyang.ac.kr

© 2012 The Korean Society of Mechanical Engineers

## 1. 서론

강체 메커니즘의 해석 기법은 간단한 기계 구조물의 위치벡터 해석에서부터 복잡한 기계의 운동 해석

에 이르기까지 다양한 분야에 사용되는 중요한 기계 공학적 기법이다.<sup>(1)</sup> 또한 일반적인 강체 메커니즘 설계는 설계자의 경험과 직관에 의존하여 강체 메커니즘을 설계하거나 강체 메커니즘 표를 참고하여 설계가 가능한 모든 강체 메커니즘 중 적절한 형상을 가지는 강체 메커니즘을 선별하여 설계 하는 것이 일반적이다. 하지만 이러한 설계 방법들은 많은 경험과 노력을 요구하고 반복적인 수치계산이 필요하다. 따라서 좀 더 효과적으로 강체 메커니즘의 설계를 할 수 있는 방법이 요구되어 왔으며 최근까지 강체 메커니즘을 최적 설계하기 위해 많은 방법들이 제안되고 연구되고 있다.<sup>(1-5)</sup> 최근에 강체 메커니즘의 최적 위상을 찾기 위하여 운동학(kinematics) 해석을 이용한 위상 최적화(topology) 연구가 제안되었다.<sup>(6)</sup> 또한, 운동역학(kinetics)해석과 유전 알고리즘(genetic algorithm)을 이용하여 강체 메커니즘을 설계하는 방법 또한 제안되었다.<sup>(1)</sup> 새롭게 제안된 설계 방법들은 기존의 방법들과는 다르게 링크의 최적위상을 찾을 수 있다는 장점이 있다. 본 연구에서는 설계에서 강체 링크뿐만 아니라 로프-링크(string-link)를 고려 하기 위하여 구속조건 힘 설계 기법(constraint force design method)을 확장한다.<sup>(1)</sup> 새로운 설계기법에서는 운동역학(kinetics)해석을 적용하기 위해 사용되는 질점(unit masses)이 회전 조인트(revolute Joint) 또는 미끄럼 조인트(prismatic Joint)로 모델링이 된다. 또한, 강체 링크를 표현하기 위해 질점 사이에 길이 구속(length constraint)을 적용하게 된다. 이 방법에서 구속조건은 질점에 적용되는 구속 힘으로 나타나며 라그랑지 계수를 이용하여 Fig. 1와 같이 외력의 형태로 작용하게 된다.<sup>(1)</sup> 강체 메커니즘의 최적위상을 설계하기 위해 이진수 설계변수를 사용하여 구속 힘의 존재 여부를 결정하며 유전 알고리즘을 이용하여 강체 메커니즘을 최적설계하게 된다. 강체 메커니즘 설계에 운동학 해석이 아닌 운동역학 해석을 이용 함으로서 강체 링크 메커니즘뿐만 아니라 여러 종류의 링크를 고려하여 설계하는 방법을 이 논문에서 연구한다.

## 2. 운동역학을 이용한 강체 메커니즘의 위상설계

### 2.1 구속조건 힘 설계 기법

구속조건 힘 설계기법에서는 강체 링크의 운동학적인 움직임을 간접적으로 해석하기 위하여 Fig. 1과 같이 운동역학 정보를 이용한다.

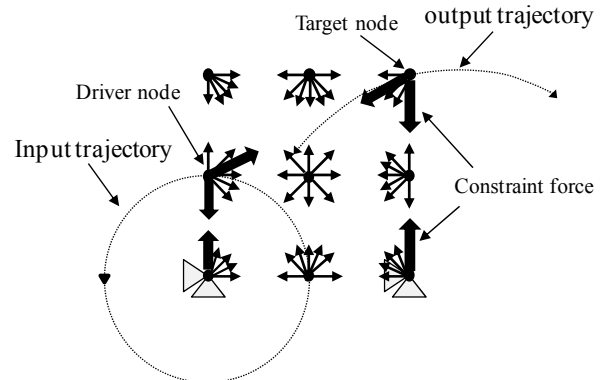


Fig. 1 The concept of the constraint force design method

### 2.2 운동역학 구성방정식

강체 메커니즘을 구성하는 강체 링크의 구현은 각 질점에 구속 조건 힘이 적용되어 질점 사이의 거리가 일정하게 유지됨으로 나타낼 수 있다.<sup>(1)</sup> 이를 유도하기 위하여 일반적인 라그랑지안 식을 이용하며 아래와 같이 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_{k=1}^{N_i^{RL}} \lambda_k (\mathbf{r}_{ij}^2 - d_{ij}^2) \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (1)$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_i) \quad (2)$$

각 질점의 질량을 나타내는  $m_i$ 은 모든 질점에서 크기가 동일하다고 가정하며  $\mathbf{r}_i$ 는 질점의 위치 벡터를 표현한다. 구속조건이 없는 라그랑지안 식과는 다르게 강체 메커니즘을 고려한 해석을 위해서 우변에  $N_i^{RL}$ 개의 구속조건이 들어 있다고 가정한다. 여기서  $RL$ 은 강체 링크를 나타낸다. 그리고,  $i$ 와  $j$ 번째의 질점 사이의 현재 벡터는  $\mathbf{r}_{ij}$ 이고 구속 조건의 길이는  $d_{ij}$ 이다. 구속 조건이 포함되어 있는 식 (2)를 이용하여 총  $n$ 개의 질점으로 구성된 디자인영역에 적용되는 일반적인 운동방정식을 아래 식과 같이 구할 수 있다.

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (3)$$

여기서  $\mathbf{f}_i$ 는 각 질점에 적용되는 외력을 나타내고  $\mathbf{g}_i$ 는 강체 링크를 표현해주기 위해 각 질점에 적용되는 구속 힘을 나타낸다. 그리고, 구속 힘을 유도하기 위하여 먼저 구속조건을 다음과 같이 표현한다.

$$\sigma_k \equiv \mathbf{r}_{i_k j_k}^2 - d_{i_k j_k}^2 \quad (4)$$

$\mathbf{r}_{i_k j_k}^2$  은 두 질점  $i$  와  $j$  사이의 현재 거리의 제곱이고  $d_{i_k j_k}^2$  은  $i$  와  $j$  질점에 적용되는 구속 거리의 제곱을 나타낸다. 여기서 하첨자  $k$  는  $k$  번째 구속조건임을 표현하는 첨자이다. 따라서 두 질점 사이의 거리와 구속거리로 구성된 조건  $\sigma_k$  는 각 강체 링크에 적용되는 제한 조건을 나타낸다. 그리고,  $\sigma_k$  는 아래의 식과 같이 구속 조건 힘을 구하는데 사용된다.<sup>(1)</sup>

$$\mathbf{g}_i = -\sum_{k=C_i}^{N^{RL}} \lambda_k \nabla_i \sigma_k \quad (i=1,2,3,\dots,n) \quad (5)$$

$\mathbf{g}_i$  는 식 (3)에서의 구속 힘을 나타내며  $C_i$  는  $i$  번째 질점에 적용되는 구속조건이다.  $\nabla_i$  은  $i$  번째 질점에 적용되는 길이 구속조건에 대한 법선 방향으로서의 변분(gradient)이다.

### 2.3 설계변수의 정식화

강체 메커니즘을 구성하는 강체 링크를 설계하기 위해서 본 연구에서는 이진수 설계변수를 이용하였다. 이 변수를 이용하여 식 (5)를 다음과 같이 변환시킨다.<sup>(1)</sup>

$$\mathbf{g}_i = -\sum_{k=C_i}^{N^{RL}} \lambda_k \nabla_i \sigma_k \gamma_k \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_i \mid \gamma_i \in [0,1] \text{ and } i=1,\dots,nl\} \quad (7)$$

$nl$  은 디자인영역을 구성하는 강체 링크의 총 개수이다.

예를 들어 Fig. 2 는 4 개의 질점과 총 6 개의 길이 제한조건을 포함하는 디자인영역을 나타내고 있다. 길이 제한조건은 이진수 설계변수를 이용하여 표현하였으며 식 (7)을 이용하여 Fig. 2 와 같은 형상을 모델링 할 수 있다.

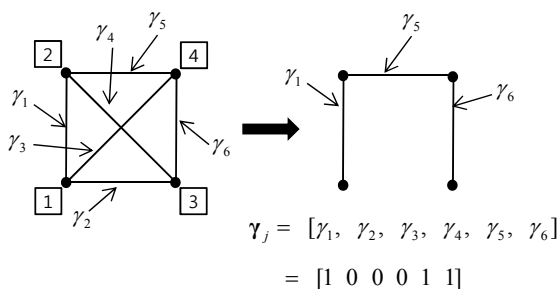


Fig. 2 An example of representation a given mechanism of constraint force design method

### 2.4 최적설계 문제의 정식화

GA 를 이용하여 강체 메커니즘의 위상최적화 모델링을 수행하기 위해서 적절한 목적함수를 선택하여야 한다. 본 연구에서는 위상최적화 모델링을 위하여 두 가지 목적함수를 선택 하였다.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N_p} \|\mathbf{r}_W^k - \mathbf{r}_{W,Target}^k\| + \alpha \sum_{k=1}^N \gamma_k \quad (8)$$

여기서  $N_p$  는 강체 메커니즘의 궤적을 표현하는 목표점의 개수이며  $N$  은 강체 메커니즘을 구성하는 강체 링크의 개수이다.  $\mathbf{r}_W^k$  와  $\mathbf{r}_{W,Target}^k$  은 강체 메커니즘의 현재 궤적과 목표궤적을 나타낸다. 첫 번째 목적함수는 설계자가 원하는 목표궤적과 설계된 강체 메커니즘이 가지는 목표궤적 사이의 오차를 최소화하는 것이다. 두 번째 목적함수는 강체 메커니즘을 구성하는 강체 링크의 개수를 최소화하는 것이다. 강체 링크의 개수를 최소화 하는 것은 강체 메커니즘을 구성하는데 불필요한 링크를 줄이기 위함이다.

### 2.5 로프-링크(string-link)의 표현

강체 메커니즘 설계에 운동학 해석을 사용하지 않고 운동역학 해석을 사용함으로 강체 링크로 구성된 메커니즘 뿐만 아니라 특정한 거리 이상에서만 인장력을 받는 로프-링크로 구성된 메커니즘 설계 또한 가능하다.

Fig. 3 에서 간단한 강체 및 로프 메커니즘을 보여주고 있다. 로프-링크는 강체 사이에 연결되어 있으며 일정한 길이를 가진다. Fig. 3(a)는 강체 링크의 이동 반경이 로프의 길이를 넘지 않은 상태를 나타내고 있다. 이 상태에서는 강체 링크는 다른 링크의 움직임에 영향을 미치지 못한다. 하지만 강체 링크의 이동 반경이 로프의 길이를 넘어서게 되면 Fig. 3(b)와 같이 이동하는 강체의 링크의 움직임이 다른 링크에 영향을 미치게 된다.

로프-링크의 모델링을 위해서 식 (5)로 표현되는 구속 힘을 라그랑지 계수의 부호에 영향을 받게 수정한다.

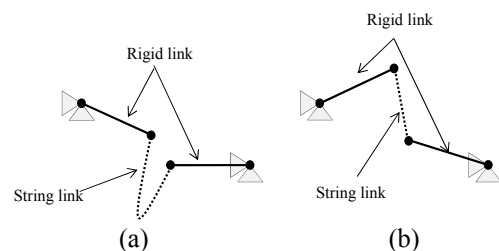


Fig. 3 Mechanism of rigid-string link

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{cases} \gamma_i \mid \gamma_i \in [0,1] \text{ for } i = 1, \dots, nl \\ \text{and } \gamma_i \in [0,1] \text{ for } i = nl + 1, \dots, 2 \times nl \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{cases} -\sum_{k=C_i}^{N_{RL}} \lambda_k \nabla_i \sigma_k & \text{if } \gamma_i = 1, \gamma_{i+nl} = 1, \mathbf{r}_{ij}^2 \geq d_{ij}^2 \text{ (String link)} \\ 0 & \text{if } \gamma_i = 1, \gamma_{i+nl} = 1, \mathbf{r}_{ij}^2 < d_{ij}^2 \text{ (String link)} \\ -\sum_{k=C_i}^{N_{RL}} \lambda_k \nabla_i \sigma_k & \text{if } \gamma_i = 1, \gamma_{i+nl} = 0 \text{ (Rigid link)} \\ 0 & \text{if } \gamma_i = 0 \text{ (No link)} \end{cases} \quad (10)$$

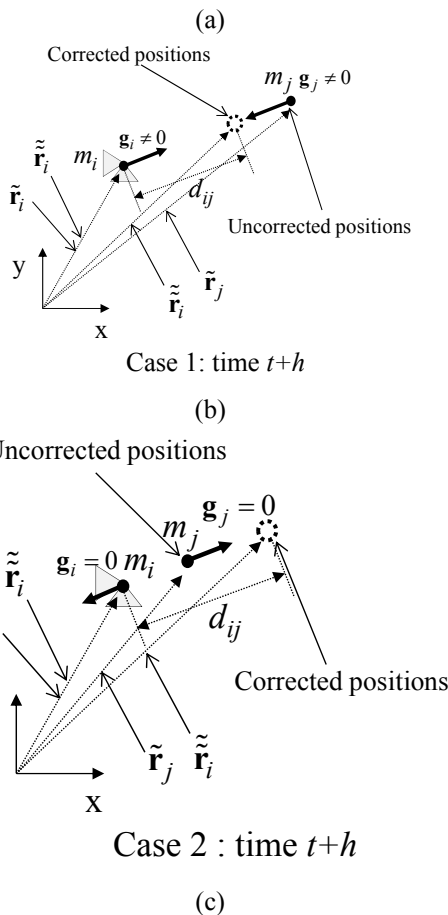
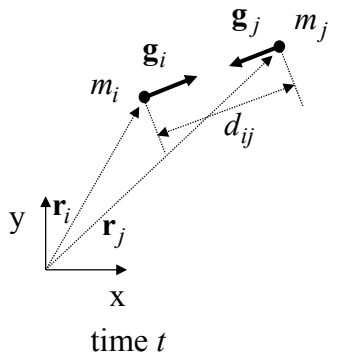


Fig. 4 Constraint force design method for string link

로프-링크를 모델링 해주기 위해 식 (7)에서 정의한 설계변수에 추가적인 설계변수가 필요하게 되며 식 (9)에 나타나 있다. 추가적인 설계변수 역시 이진수 설계변수를 사용하였고 설계변수에 따라 식 (10)과 같이 길이제한조건을 고려한다.

Fig. 4 의 (a)는 초기위치의 질점을 나타내고 있다. 여기서 수정되지 않은 위치(uncorrected positions)는 초기의 질점의 위치가 변경되어 질점의 위치가 구속 조건을 만족하지 못하는 상태를 말하며 수정된 위치(corrected position)는 위치가 변경된 질점에 구속 힘이 적용되어 구속조건을 만족하는 상태를 말한다. Fig. 4(b,c)에서 확인할 수 있듯이 질점의 위치가 구속 조건 값보다 큰 경우 구속 조건 값은 양의 값을 가지며 구속 조건 값보다 작은 경우 영의 값을 가지게 변환시킨다. 따라서, 질점의 위치에 따라 구속 조건 값이 다르게 적용되는 것을 모델링 할 수 있다. 로프 링크는 강체 링크의 길이가 로프 링크의 길이를 넘어설 때만 강체 링크와 같은 역할을 모델링 한다. 즉 Fig. 4(b,c)와 같이 강체 링크 움직임 반경이

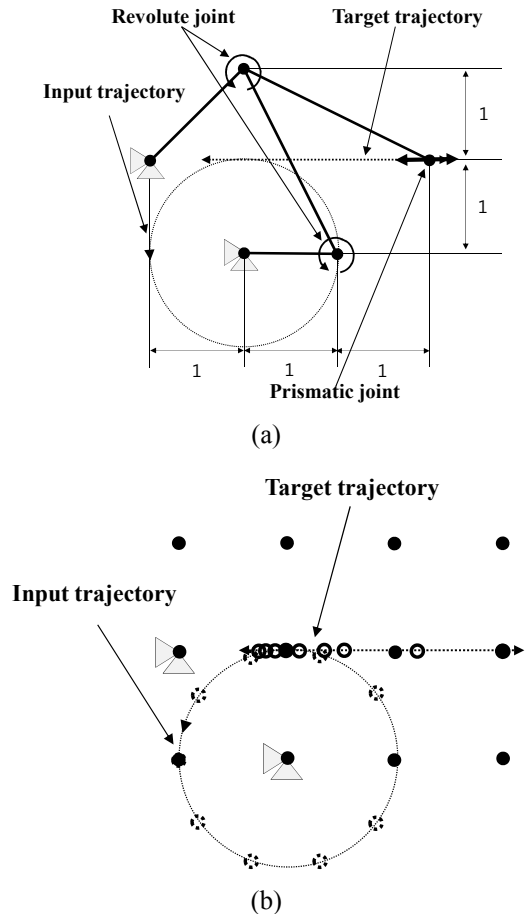


Fig. 5 Numerical example of rigid-mechanism. (a) reference mechanism and (b) design domain of mechanism of rigid link

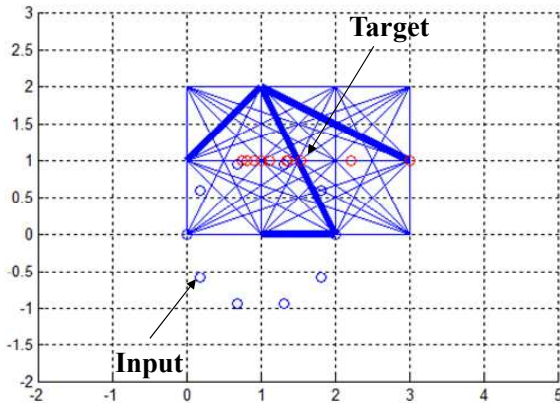


Fig. 6 An optimal solution

로프 링크의 길이를 넘지 않으면 로프 링크에 구속 힘을 적용시키지 않도록 모델링 한다. 따라서 절점의 위치에 따라 다르게 적용되는 구속 힘의 조건의 확장 및 이용하여 강체-로프 메커니즘을 설계할 수 있다.

### 3. 수치 예제

#### 3.1 5 절 링크의 설계

구속조건 힘 설계기법이 강체 메커니즘의 위상 최적설계에 적용될 수 있음을 보이기 위하여 Fig. 5의 설계예제를 살펴 본다. 이 예제는 Fig. 5에서 볼 수 있듯이 회전운동을 직선운동으로 바꾸는 메커니즘이다. 이 메커니즘의 특징으로 회전 조인트(revolute joint)뿐만 아니라 미끄럼 조인트(prismatic joint)도 같이 있다.

최적설계를 위하여 총 12 개의 절점을 고려하였다. 따라서, 총 66 개의 길이 제한조건을 고려한다. 강체 메커니즘의 입력 (input)운동을 주는 드라이버를 지정하고 구속조건을 지정한다. 마지막으로 목표 궤적을 지정함으로써 강체 메커니즘의 설계가 가능해진다. 길이 제한 조건은 66 개의 2진수 설계 변수로 지정하고 GA 를 이용하여 강체 메커니즘을 Fig. 6과 같이 설계 할 수 있었다.

#### 3.2 String-link 를 고려한 설계

제한된 방법의 효용성을 살펴보기 위하여 강체 링크와 로프-링크로 구성된 Fig. 7(a)의 메커니즘의 설계를 고려한다. Fig. 7(b)는 강체-로프 링크로 구성된 메커니즘의 설계를 위한 디자인 영역을 나타내고 있다. 디자인 영역은 총 8 개의 절점으로 구성되어 있으며 8 개의 절점을 연결하는 28 개의 길이 제한조건을 고려할 수 있다. 그리고 로프-링크를 모델링하는 28 개의 설계변수를 추가적으로

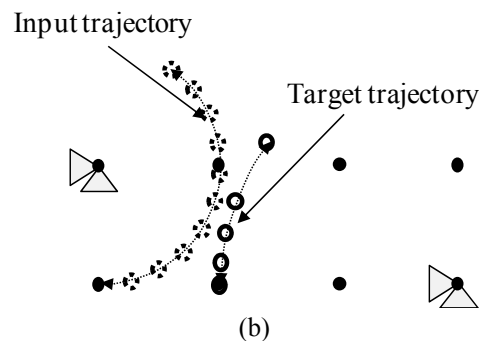
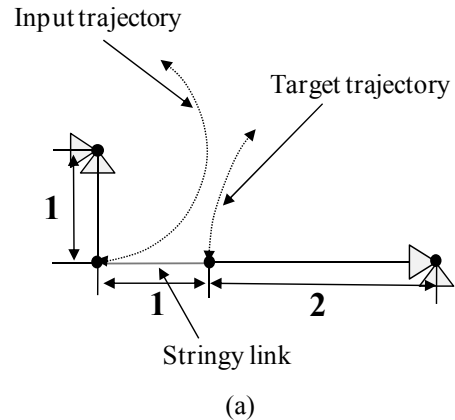


Fig. 7 Numerical example. (a) reference mechanism and (b) design domain of mechanism

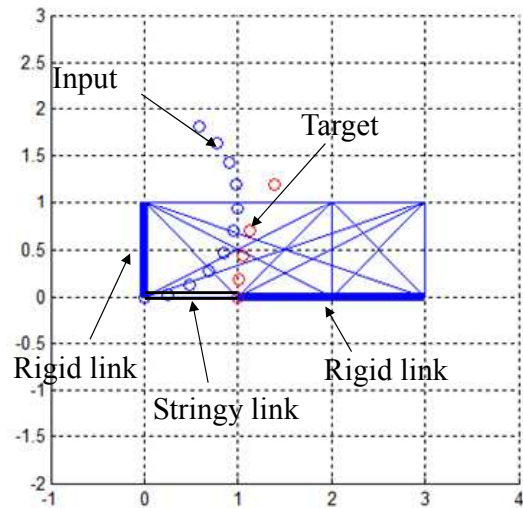


Fig. 8 An optima mechanism with rigid-string links

고려한다. 따라서 총 56 개의 설계변수를 고려하게 된다. 그리고, 식 (10)에서와 같이 강체-링크 메커니즘과 동일하게 드라이버를 지정하고 구속조건을 지정한다. 마지막으로 목표 궤적을 지정함으로써 강체-로프 메커니즘의 설계가 가능해진다. Fig. 8은 강체-로프 메커니즘의 최적설계 결과를 나타내고 있다. 여기서 볼 수 있듯이 정확히 기준 구조물을

얻을 수 있었으며 제안된 방법이 로프와 강체를 고려한 메커니즘의 설계에 유용하게 사용될 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에서 개발된 구속조건 힘 설계 기법은 메커니즘 설계에 주로 이용되었던 운동학 정보를 이용하지 않고 운동역학 정보를 이용하여 메커니즘을 설계하는 방법이다. 기존의 운동학 정보를 이용하여 메커니즘을 설계하는 방법들은 메커니즘을 최적설계 하기 위해 초기의 메커니즘 형상에 제한을 많이 받았다. 하지만 구속조건 힘 설계 기법은 초기 메커니즘의 형상에 제한을 받지 않고 메커니즘의 위상최적설계를 가능하게 한다. 또한 운동학 정보를 이용하여 표현이 불가능한 강체-로프 메커니즘을 운동학 정보를 이용하여 설계를 가능하게 한다. 차후 연구에서는 제안된 방법의 효율을 높이고, 링크로 구성된 메커니즘뿐만 아니라 다양한 메커니즘 구성요소를 고려하는 설계로 확장할 것이다.

#### 참고문헌

- (1) Heo, J. C., Kim, H. J. and Yoon, G. H. 2011, "Development of the Constraint Force Design Method for Topology Optimization of 2 Dimensional Planar Rigid Body Mechanism," *Conference of the KSME*, pp. 12~14.
- (2) Wang, Y. X. and Yan, H. S., 2002, "Computerized Rules-Based Regeneration Method for Conceptual Design of Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 37, pp. 833~849.
- (3) Kawamoto, A., Bendsoe, M. P. and Sigmund, O., 2004, "Articulated Mechanism Design with a Degree of Freedom Constraint," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, pp. 1520~1545.
- (4) Chiou, S. J. and Sridhar, K., 1999, "Automated Conceptual Design of Mechanisms," *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 34, pp. 467~495.
- (5) Kim, Y. Y., Jang, G. W., Park, J. H., Hyun, J. S. and Nam, S. J., 2007, "Automatic Synthesis of a Planar Linkage Mechanism With Revolute Joints by Using Spring-Connected Rigid Block Models," *Journal of Mechanical Design*, Vol. 129, pp. 930~940.