

# 완경사 방정식을 이용한 유한요소모형에서 경사경계의 처리 Treatment of Inclined Boundaries in a Finite Element Model for the Mild-Slope Equation

정태화\* · 류용욱\*\*  
Tae-Hwa Jung\* and Yong-Uk Ryu\*\*

**요 지 :** 본 연구에서는 완경사 방정식을 이용한 유한요소모형에서 경사 경계면을 효율적으로 처리할 수 있는 수치기법을 소개하였다. 유한요소법은 다른 수치기법과 다르게 불규칙한 지형에도 적용이 가능하다는 장점을 가지고 있어 복잡한 지형 형태를 갖는 연안에서 발생하는 수리현상을 해석하기 위하여 빈번히 사용되었다. 그러나 유한요소모형에 사용된 지배방정식이 타원형 미분방정식인 경우에는 연직방향으로 경사진 경계면에서의 경계처리가 쉽지 않다는 단점이 있다. 본 연구에서는 Bessel 함수를 이용하여 경사진 경계면을 처리하는 방법을 소개하고 얻어진 결과를 해석해와 비교하였다.

**핵심용어 :** 유한요소법, 경사경계면, Bessel함수, 완경사 방정식

**Abstract :** A numerical skill for effective treatment of inclined boundaries in a finite element method is introduced. A finite element method has been frequently used to simulate hydraulic phenomena in a coastal zone since it can be applied to irregular and complex geometry. In case elliptic partial equations are governing equations for a finite element model, however, there is a difficulty in treating boundary conditions properly for cases in which boundaries are vertically inclined. In this study, a method to treat such inclined boundaries using Bessel functions for a finite element method is introduced and compared with analytical solutions.

**Keywords :** finite element method, sloping boundary, Bessel function, Mild-Slope equation

## 1. 서 론

연안에서 발생하는 다양한 수리현상을 해석하기 위해 많은 방정식들이 제시되었으며, 대표적인 것 중의 하나가 Berkhoff (1972)에 의해 제안된 완경사 방정식이다. 완경사 방정식은 비록 선형과에 대해서만 적용할 수 있다는 단점이 있지만, 회절과 굴절을 동시에 모의하면서도 비교적 쉽게 수치해를 구할 수 있다는 장점이 있어, 소개된 이후 많은 학자들에 의해 꾸준히 연구되었으며, 현재까지도 항만설계 등에 널리 사용되고 있다. 지배방정식이 완경사 방정식인 모형의 수치해를 얻기 위해서는 주로 유한요소법과 유한차분법이 사용된다. 두 수치기법이 각각의 장단점을 가지고 있으며, 연안에서 발생하는 문제의 경우 지형이 불규칙적이며 복잡하기 때문에 이러한 경계면의 처리에 유리한 유한요소법이 주로 사용된다 (Panchang et al., 2000; Park et al., 1994; Walkley and Berzins, 2002; Woo and Liu, 2004a; Woo and Liu, 2004b).

수치모형의 정확한 수치해를 얻기 위해서는 지배방정식뿐만 아니라 경계조건도 적절하게 처리되어야 한다. 파가 진행하는데 장애물이 없는 경우에는 파는 외해로 그대로 빠져나가게 되며 이러한 파의 방사와 관련해서는 Sommerfeld(1896)가 제안한 방사경계조건이 널리 사용되고 있다. 이와 같은 방사경계조건을 이용할 경우, 연직 2차원과 같이 빠져나가는 파의 방향이 일정한 경우에는 문제가 없으나, 수평 2차원 문제처럼 외해로 빠져나가는 파의 방향이 일정하지 않은 경우에는 방사경계조건의 처리를 제대로 수행하기 어렵기 때문에, 이를 해결하기 위하여 경계면에 도달하기 전에 대부분의 파를 소멸시켜버리는 스폰지 경계층이라는 새로운 개념의 경계처리방식이 제시되었다(Larsen and Darcy, 1983; Lee and Suh, 1998). 파의 진행방향에 구조물이 있거나 또는 해안선과 같이 지형이 막혀 있는 경우에는 파의 반사가 발생하게 되며, 따라서 이러한 반사현상을 적절히 모의할 수 있어야 한다(천과 안, 2006). 이와 같은 경계면의 처리는 중요함에도 불

\*한밭대학교 건설환경공학과(Tae-Hwa Jung, Department of civil and Environment Engineering, Hanbat University, Daejeon 305-719, Korea. thjung@hanbat.ac.kr)

\*\*현대건설 연구개발본부(Corresponding author, R&D Center, Hyundai Engineering & Construction, Yongin, Gyeonggi-Do, Korea. uyryu@hdec.co.kr)

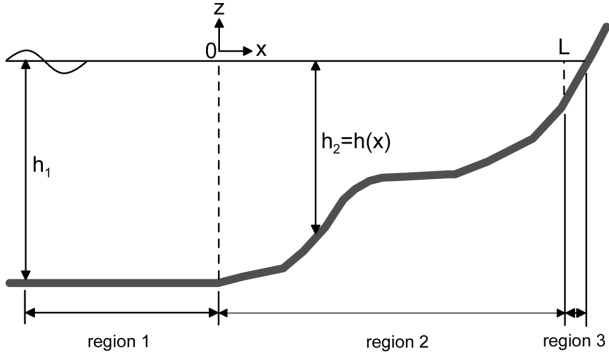


Fig. 1. Schematic definition of computational domain.

구하고, 직립형태의 장애물이 있는 경우에는 완전반사 또는 부분반사 조건을 적절히 줄 수 있는 반면, 경계면에서의 장애물이 기울어져 있는 경우, 수심이 0이 되며 이러한 경계 조건을 처리하기가 쉽지 않다. 이에 대한 대안으로 지배방정식의 형태가 시간의존형인 경우에는 이동경계기법을 이용하여 경계조건을 처리하고 있으나, 정상 상태(steady state)의 지배방정식을 사용하는 경우에는 아직까지 제시된 바가 없다.

본 연구에서는 이와 같이 경계조건 처리가 어려운 경사진 경계면을 적절히 처리할 수 있는 경계기법을 제안하였다. 경사진 경계면에서는 수심이 0이 되기 때문에 경계면 부근에서는 항상 장파의 조건을 만족한다. 또한 일정한 기울기를 가질 경우 선형장파의 해는 Bessel 함수로 나타낼 수 있다. 위의 두 조건을 사용하면 경사진 경계면을 적절하게 처리할 수 있다는 생각을 바탕으로 경계 처리기법을 제안하였으며, 이를 통해 얻어진 수치기법의 수치해와 해석해와 비교하여 그 타당성을 검토하였다.

## 2. 이론적 배경

Fig. 1에서 보는 바와 같이 대상영역을 세 영역으로 분류하였다. 영역 1은 일정수심 영역으로 입사파와 반사파가 공존하며, 영역 2는 수심이 불규칙적으로 변화하는 영역으로 유한요소법을 적용하는 영역이다. 마지막으로 영역 3은 천해조건을 만족하는 영역으로 구간의 폭을 충분히 좁게 설정하면 기울기가 일정하다고 가정하여도 무방하다.

### 2.1 지배 방정식

비압축성, 비점성 유체의 비회전 흐름을 가정하면 선형화에 관한 다음과 같은 1차원 형태의 환경사 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dx} \left( C C_g \frac{d\eta}{dx} \right) + k^2 C C_g \eta = 0 \quad (1)$$

여기서,  $\eta$ 는 자유수면변위를 의미하며,  $C$ 는 파속도,  $C_g$ 는 군속도 그리고  $k$ 는 다음 식(2)에 의해 결정되는 파수이다.

$$\omega^2 = g k \tanh k h \quad (2)$$

여기서  $\omega$ 는 각속도,  $g$ 는 중력가속도 그리고  $h$ 는 수심을 의미한다.

영역 1에서는 일정수심이기에 때문에 식 (1)은 다음과 같은 이차 선형 상미분방정식이 되며

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} + k^2 \eta = 0 \quad (3)$$

일반해는 다음과 같다.

$$\eta_1 = A e^{i k_1 x} + B e^{-i k_1 x} \quad (4)$$

여기서 아래첨자 ‘1’은 영역 1을 나타내며  $k_1$ 은  $h_1$ 에 해당하는 파수를 의미한다. 입사파의 파고를 1이라고 가정하면 미정 계수  $A$ 와  $B$ 는 각각 1과 반사율  $R$ 로 나타낼 수 있다.

영역 3은 장파의 영역이므로 파속도 및 군속도는 다음과 같이 근사가 되며

$$C = C_g \approx \sqrt{gh} \quad (5)$$

따라서, 식 (1)을 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$g \frac{d}{dx} \left( h \frac{d\eta_3}{dx} \right) + \omega^2 \eta_3 = 0 \quad (6)$$

수심이 선형적으로 변할 경우, 영역 3 내부에서의 기울기  $m$ 을 고려한  $X = h(L) - h(x)(x-L)m$ 의 변수치환을 이용하면 지배방정식은 다음 식 (7)과 같이 된다.

$$X \frac{d^2 \eta_3}{dX^2} + \frac{d\eta_3}{dX} + s \eta_3 = 0 \quad (7)$$

여기서,  $s$ 는 다음 식 (8)과 같이 정의되며  $X$ 는 실질적으로 영역 3 내부에서의 수심을 나타낸다.

$$s = \frac{\omega^2}{g m^2} \quad (8)$$

여기서, 다시 한번  $t^2 = 4Xs$ 의 변수치환을 사용하면 최종적으로 다음 식 (9)와 같은 Bessel 방정식이 구해진다.

$$t^2 \frac{d^2 \eta_3}{dt^2} + t \frac{d\eta_3}{dt} + t^2 \eta_3 = 0 \quad (9)$$

따라서, 영역 3에서의 해는 다음과 같이 Bessel 함수의 형태로 표시된다.

$$\eta_3 = C J_0(2\sqrt{X(x)s}) + D Y_0(2\sqrt{X(x)s}) \quad (10)$$

여기서,  $J_0$ 는 제1종 0차 Bessel 함수,  $Y_0$ 는 제2종 0차 Bessel 함수를 의미한다. 해안선에 접근하게 되면 수심  $X$  및 변수  $t = \sqrt{4Xs}$ 는 0으로 수렴하게 되어 식 (9)의 두 번째 항  $Y_n$ 은 발산하게 된다. 이는 해안선에서의 파고값이 유한하다는 물리적인 조건에 위배되기 때문에 이를 방지하기 위하여  $D = 0$ 으로 놓고 최종적으로 영역 3에서의 해는 다음과

같이 표현할 수 있다.

$$\eta_3 = CJ_0(2\sqrt{X(x)s}) \quad (11)$$

## 2.2 정식화

영역 2에서의 해를 유한요소법을 이용하여 구하기 위해서는 지배방정식을 유한요소식으로 변형시켜야 한다. 유체영역을 이산화하여 자유수면변위를  $\eta = N^T \eta_2^e$ 로 표현한 후 식 (1)의 지배방정식에 Galerkin 방법을 적용하면 다음과 같이 개별요소에 대한 적분식을 얻을 수 있다.

$$-\int_{\Omega^e} N \left[ \frac{d}{dx} \left( CC_g \frac{dN^T}{dx} \eta_2^e \right) \right] - k^2 CC_g \int_{\Omega^e} NN^T d\Omega^e \eta_2^e = 0 \quad (12)$$

여기서,  $\Omega^e$ 는 요소,  $N$ 은 미리 규정한 보간 함수벡터,  $T$ 는 전치행렬을 만드는 연산자, 그리고  $\eta_2^e$ 는 영역 2에서의 절점 자유수면 벡터를 의미한다. 첫 번째 적분식을 부분적분한 후 각 요소의 시스템 행렬을 더하면 다음과 같이 전체행렬식이 구성된다.

$$\begin{aligned} & \sum_e \left( CC_g \int_{\Omega^e} \frac{\partial N \partial N^T}{\partial x \partial x} d\Omega^e - k^2 CC_g \int_{\Omega^e} NN^T d\Omega^e \right) \eta_2^e \\ & - CC_g N \frac{\partial \eta_2^e}{\partial x} \Big|_{x=L} + CC_g N \frac{\partial \eta_2^e}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

경계점( $x=0, L$ )에서 식 (14)와 식(15)의 동역학적 및 운동학적 연속조건을 사용하면

$$\eta_1 = \eta_2, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \quad \text{at } x=0 \quad (14)$$

$$\eta_2 = \eta_3, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x} \quad \text{at } x=L \quad (15)$$

다음과 같은 관계식을 얻게 되며,

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \Big|_{x=0} = (-ik_1 \eta_2(x) + 2ik_1) \Big|_{x=0} \approx N \frac{\partial \eta_2^e}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{J_0'(2\sqrt{h(x)s})}{J_0(2\sqrt{h(x)s})} \eta_2(x) \Big|_{x=L} \approx N \frac{\partial \eta_2^e}{\partial x} \Big|_{x=L} \quad (17)$$

이를 식 (13)에 대입하여 계산함으로써 대상영역에서의 수면변위를 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_e \left( \int_{\Omega^e} CC_g \frac{\partial N \partial N^T}{\partial x \partial x} d\Omega^e \right) \eta_2^e - \frac{J_0'(2\sqrt{h(x)s})}{J_0(2\sqrt{h(x)s})} CC_g N \eta_2^e \Big|_{x=L} \\ & - ik_1 CC_g N \eta_2^e \Big|_{x=0} = -2ik_1 CC_g \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (18)$$

## 3. 해의 검증

본 연구에서 유도한 식을 검증하기 위하여 해석해와 본 연구의 수치해를 Fig. 2로 표현되는 지형에 적용하여 비교해 보

았다. 해석해는 식 (4)와 식 (11)에 대하여 식 (14) 및 (15)로 표현되는 동역학적 및 운동학적 경계조건을 적용하면 구할 수 있다 (정 등, 2007; Dean, 1964).

$$\eta_{analytic} = \begin{cases} e^{ik_1 x} + \frac{ik_1 J_0(2\sqrt{X(0) \cdot s}) - J_0'(2\sqrt{X(0) \cdot s})}{ik_1 J_0(2\sqrt{X(0) \cdot s}) + J_0'(2\sqrt{X(0) \cdot s})} e^{-ik_1 x}, & x \leq 0 \\ \frac{2ik_1}{ik_1 J_0(2\sqrt{X(0) \cdot s}) + J_0'(2\sqrt{X(0) \cdot s})} J_0(2\sqrt{X(x)s}), & x > 0 \end{cases} \quad (19)$$

해석해의 경우 천해영역에서만 성립되기 때문에 입사파의 조건은  $kh_1 = 0.05\pi$ 로 설정하여 천해조건을 만족하도록 하였으며 일정 수심 영역에서의 수심은  $h_1 = 5.0 \text{ m}$ 으로 가정하였다.

Fig. 3은 서로 다른 기울기를 가지는 경우에 대하여 무차

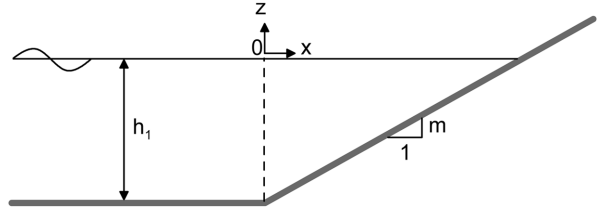


Fig. 2. Computational bathymetry of constant bottom slope.

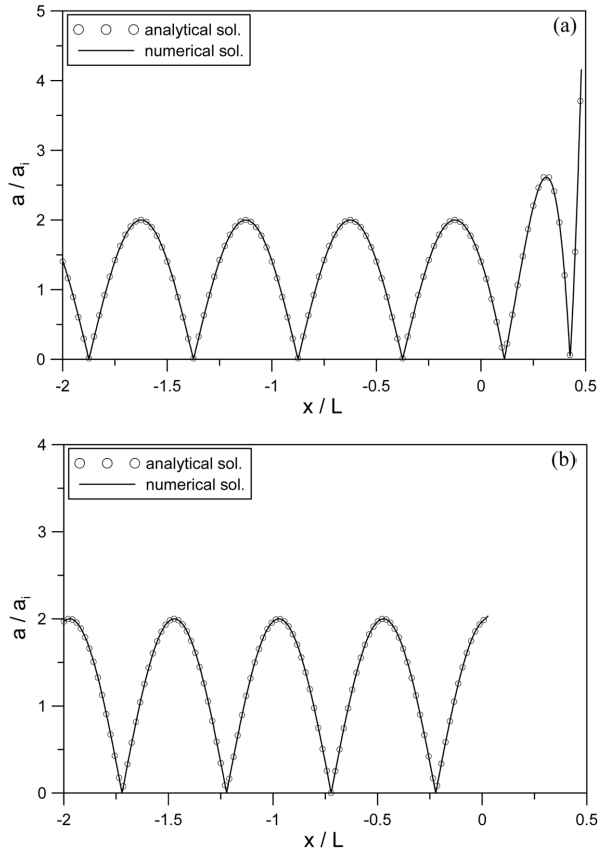


Fig. 3. Comparison between numerical and analytical solutions for  $kh_1 = 0.05\pi$ : (a)  $m = 0.05$ ; (b)  $m = 0.9$ .

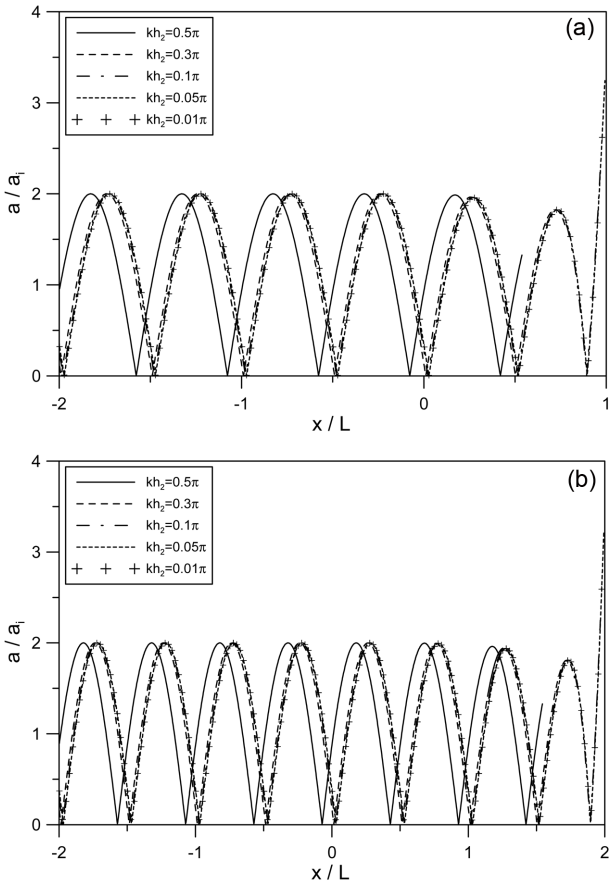


Fig. 4. Comparison of numerical solutions for different  $kh_2$ s: (a)  $kh_1 = 1.0$ ; (b)  $kh_1 = 2.0$ .

원화된 진폭을 비교한 것이다.  $x$ 축은 입사파의 파장으로 무차원화하였으며  $y$ 축은 입사파의 진폭으로 무차원화하였다. Fig. 3(a)는 기울기가 아주 완만한 경우( $m = 0.05$ )에 해당하며 Fig. 3(b)는 기울기가 아주 급한 경우( $m = 0.9$ )에 해당한다. 수치해의 경우에는  $kh = 0.01\pi$ 를 만족시키는 지점에서 내해 경계조건을 사용하였다. 이 경우, 입사파의 조건이 천해 조건을 만족시키므로 내해 경계지점은 어느 지점으로 잡아도 무방하다. 본 연구에서 사용한 모델은 쇄파나 바다 마찰과 같은 에너지 감쇠를 고려하지 않았기 때문에 완전반사가 발생한다. 따라서 위상 값을 비교함으로써 수치해의 정확도를 측정할 수 있다. 그림에서 보이듯이 기울기에 상관없이 두 경우 모두 수치해와 해석해가 매우 잘 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 기울기가 급한 경우에는 해안선 부근( $x \approx 0$ )에서 반사가 발생하는 반면, 기울기가 완만한 경우에는 경사 지형 위로 반파장 이상 진행하면서 천수 현상이 발생하였다.

다음으로, 천해 영역을 벗어난 지역에서의 적용성을 검토해 보았다. Fig. 4는 Fig. 2와 동일한 지형 조건에서 입사파의 조건을 달리하면서 수치해의 수렴성을 검토한 그림이다. 이 경우 초기 입사파가 천해 영역을 벗어나기 때문에 내해 경계지점을 어느 지점으로 잡느냐에 따라 해의 정확도가 결정된다. 본 연구에서는 내해 경계지점의 조건을  $kh_2 = 0.5\pi, 0.3\pi, 0.1\pi, 0.05\pi$  및  $0.01\pi$ 로 하면서 파고값을 비교해 보았다. Fig. 4(a)는 입사파의 조건이  $kh_1 = 1.0\pi$ 이며 Fig. 4(b)는  $kh_1 = 2.0\pi$ 이다. 두 경우 모두 내해 경계지점이 천해 영역을

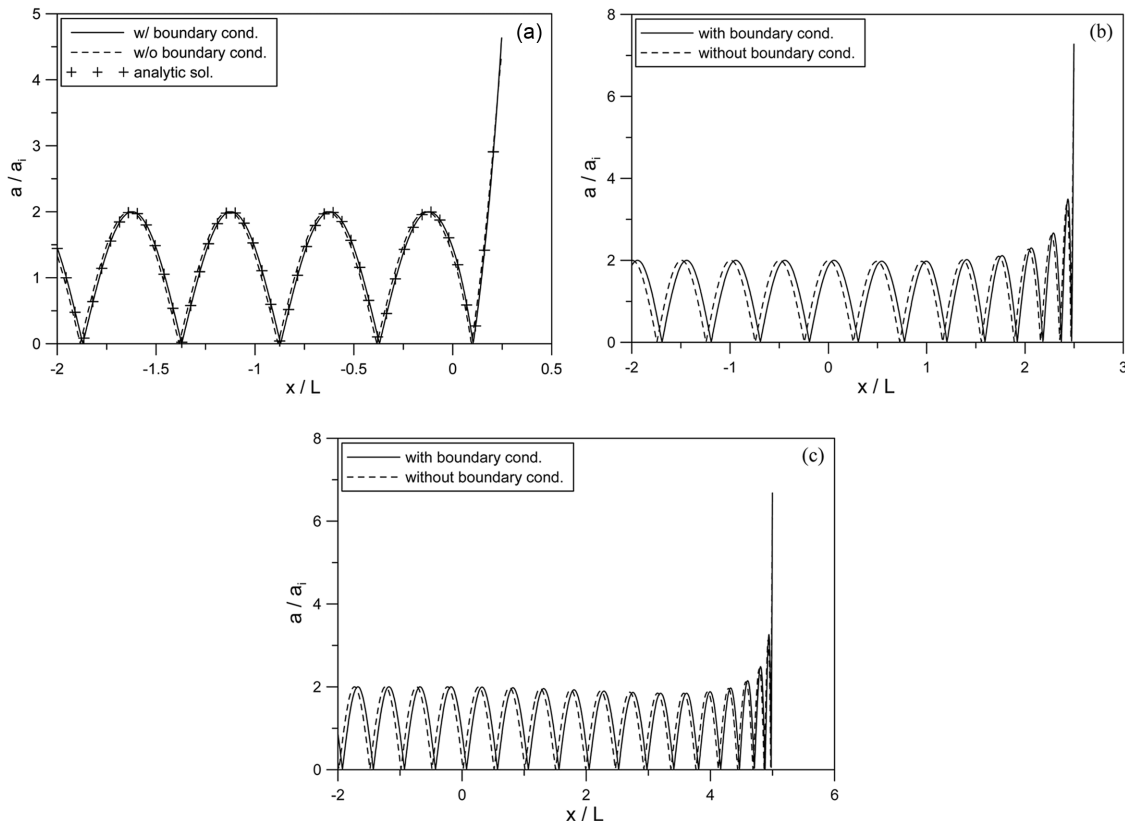


Fig. 5. Comparison of numerical solutions between with and without boundary conditions: (a)  $kh_1 = 0.05\pi$ , (b)  $kh_1 = 0.5\pi$ , (c)  $kh_1 = 1.0\pi$ .

벗어난 경우에는 서로 다른 위상값을 보이지만 천해 영역에 가까운  $kh_2 = 0.3\pi$  조건부터 비슷한 값을 보이다가 천해조건에서는 서로 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

다음으로, 본 경계조건을 사용한 경우와 사용하지 않은 경우에 대하여 수치해를 비교해 보았다. 본 경계조건을 사용하지 않은 경우에 대해서는 일반적으로 가상의 수직벽이 존재하여 수평방향 유속이 0이라고 가정하였다. 가상벽이 존재하는 위치는 오차를 최소화하기 위하여 최대한 해안선에 가깝게 하였으며 다양한 수치모의를 통하여 수치해의 변화가 더 이상 발생하는 않는  $kh = 0.005\pi$ 가 되는 지점에 위치한다고 가정하였다. Fig. 5는 Fig. 2와 동일한 지형에서 입사파의 조건을 달리하면서 본 연구에서 제시한 경계조건을 사용하였을 경우의 수치해와 사용하지 않았을 경우의 수치해를 비교한 것이다. 경사면의 기울기는 0.1로 하였으며 입사파의 주기는 상대수심이  $kh = 0.05\pi, 0.5\pi, 1.0\pi$ 를 만족하도록 설정하여 천해, 중간수심영역, 심해 모두를 고려하였다. Fig. 5(a)는 상대수심이  $0.05\pi$ 인 경우로 천해조건을 만족한다. 이 경우에는 해석해가 존재하기 때문에 해석해를 함께 비교하였다. 그림에서 보여지듯이 본 연구에서 유도한 경계조건을 사용하였을 경우에는 해석해와 잘 일치하지만 사용하지 않았을 경우에는 약간의 오차가 발생하는 것을 알 수 있다. Fig. 5(b) 및 (c)에서도 역시 비슷한 결과가 발생하였다. 두 수치해의 차이는 중간수심영역에서 가장 컸으며, 심해, 천해역순으로 감소하였다. 또한, 그림으로 보여주지는 않았지만 기울기가 커질수록 오차는 감소하였으며 기울기가 작아질수록 오차는 증가하는 것을 확인하였다. 그 이유는 기울기가 커질수록 연직의 가상벽과 가까워지고 기울기가 작아질수록 연직의 가상벽과 멀어지기 때문에 오차도 이에 따라 변하는 것으로 해석할 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 유한요소모형에서 경사진 경계면의 처리기법을 제시하였다. 일반적으로 유한요소모형을 이용한 경사진 지형의 수치모의에서는 해안선에서의 수심이 0이 되기 때문에 경계조건을 처리하기가 쉽지 않지만, 본 연구에서는 해안선 부근에서는 항상 장파의 조건을 만족하는 영역이 존재한다는 점과 이러한 영역을 아주 작게 설정하면 기울기가 일정한 수심이라고 가정할 수 있다는 점을 경사 경계 처리에 적용하였다. 이와 같은 두 가정을 사용하면 Bessel 함수를 사

용하는 해석해를 구할 수 있으며, 이를 유한요소모형과 결합하여 경사진 경계면을 갖는 임의의 지형에 적용 가능한 유한요소모형을 제시하였다. 해석해가 존재하는 천해영역에서는 해석해와 비교하여 본 경계기법의 타당성을 검증하였으며, 천해영역 이외에서는 수렴성 검토를 통하여 본 경계기법의 적용성을 검증하였다. 또한, 본 경계기법을 사용하지 않았을 경우의 해와 비교하여 그 차이를 검토하였다. 다양한 수치실험 결과, 중간수심영역에서 기울기가 완만할수록 오차가 커지는 것을 확인할 수 있었다.

#### 참고문헌

- 정원무, 이길성, 박우선, 채장원 (1998). 확장형 완경사방정식에 기초한 Galerkin 유한요소 모형, 한국해안해양공학회지, 10, 174-186.
- 정태화, 강규영, 조용식 (2007). 해저 지형을 이용한 연직 구조물의 처오름 감소, 한국해안해양공학회지, 19, 436-445.
- 천제호, 안경모 (2006). 완경사 방정식에서 간편화된 파의 부분 반사 및 투과 처리기법, 한국해안해양공학회지, 18, 84-96.
- Bellotti, G., Beltrami, G.M. and Girolamo, P.D. (2003). Internal generation waves in 2D fully elliptic mild-slope FEM models, Coastal Engineering, 49, 71-81.
- Berkhoff, J.C.W. (1972). Computation of combined refraction diffraction, Proceedings of 13th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, 471-490.
- Dean, R.G. (1964). Long wave modification by linear transitions, Rev. Mat. Hisp.-Am, 1 (90), 1-29.
- Larsen, J. and Darcy, H., 1983. Open boundaries in short wave simulations - a new approach, Coastal Engineering, 7, 285-297.
- Lee, C. and Suh, K.D. (1998). Internal generation of waves for time-dependent mild-slope equations, Coastal Engineering, 34, 35-57.
- Panchang, V., Chen, W., Xu, B., Schlenker, K., Demirbilek, Z. and Okihiro, M. (2000). Exterior bathymetric effects in elliptic harbor wave models, J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 126, 71-78.
- Park, W.S., Chun, I.S. and Jeoung, W.M. (1994). Infinite element for the analysis of harbor resonances, J. KSCOE, 6, 139-149.
- Tsay, T. and Liu, P.L.-F. (1983). A finite element model for wave refraction and diffraction, Journal of Fluid Mech., 72, 373-384.

원고접수일: 2011년 10월 4일

수정본채택: 2012년 2월 8일

게재확정일: 2012년 3월 5일